МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФГБОУ ВО «Брянский государственный технический университет»
(БГТУ)

Политехнический колледж (ПК БГТУ)

УТВЕРЖДАЮ
Директор ПК БГТУ

____________ В.М. Малашенко

«_______»___________ 2019 г.

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 3E0E6C00DDAD69AC496A79E33A58FAAB
Владелец: Федонин Олег Николаевич
Действителен: с 11.11.2021 до 11.02.2023

Методические рекомендации для проведения практических работ

по учебной дисциплине

ЕН.01 Элементы высшей математики

Специальность:	**09.02.03 Программирование в компьютерных системах**
Уровень образования выпускника:	среднее профессиональное образование (СПО)
Программа подготовки специалиста среднего звена (ППССЗ):	базовая
Присваиваемая квалификация:	Техник-программист
Форма обучения:	очная
Срок получения СПО по ППССЗ:	3 года 10 месяцев
Уровень образования, необходимый для приема на обучение по ППССЗ:	основное общее образование
Год приема на обучение на 1-й курс:	2019

Брянск 2019

Методические рекомендации для проведения практических работ по учебной дисциплине ЕН.01 Элементы высшей математики для специальности 09.02.03 «Программирование в компьютерных системах», предназначены для закрепления знаний по изучаемому материалу и формированию умений, а также для проверки усвоения теоретического материала и умений решать различные математические задачи.

Разработали:

Преподаватель ПК БГТУ Бедина Е.Г

Методическая разработка рассмотрена одобрена предменой комиссией «Математических и общих естественно научных дисциплин»

Протокол № _______ от «_____» ___________ 20_____г.

Председатель ____________________ Л.А Лазарева

Область применения методических указаний

Методические указания для выполнения практических работ являются частью примерной основной профессиональной образовательной программы в соответствии с ФГОС по специальности СПО **09.02.03 «Программирование в компьютерных системах»**

Цели и задачи методических указаний для выполнения практических работ:

В результате освоения учебной дисциплины обучающийся должен **уметь**:

- выполнять операции над матрицами и решать системы линейных уравнений;

- решать задачи, используя уравнения прямых и кривых второго порядка на плоскости;

- применять методы дифференциального и интегрального исчисления;

- решать дифференциальные уравнения;

- пользоваться понятиями теории комплексных чисел.

В результате освоения учебной дисциплины обучающийся должен **знать**:

- основы математического анализа, линейной алгебры и аналитической геометрии;
- основы дифференциального и интегрального исчисления;
- основы теории комплексных чисел.

Формируемые компетенции

ОК 1. Понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес.
ОК 2.Организовывать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.
ОК 3. Принимать решения в стандартных и нестандартных ситуациях и нести за них ответственность.
ОК 4. Осуществлять поиск и использовать информацию для эффективного выполнения профессиональных задач, профессионального и личностного развития.
ОК 5. Использовать информационно – коммуниккационные технологии в профессиональной деятельности.
ОК 6. Работать в коллективе и команде, общаться с коллегами, руководством, потребителями.
ОК 7. Брать на себя ответственность за работу членов команды 9подчиненных) за результат выполненного задания.
ОК 8. Самостоятельно определять задачи профессионального и личностного развития, заниматься самообразованием, осознанно планировать повышение квалификации.

ОК 9. Ориентироваться в условияхсмены технологий в профессиональной деятельности.

ПК 1.1 Выполнять разработку спецификаций отдельных компонент.
ПК 1.2 Осуществлять разработку кода программного продукта на основе готовых спецификаций на уровне модуля.
ПК 2.4 Реализовывать методы и технологии защиты информации в базах данных.
ПК 3.4 Осуществлять разработку тестовы наборов и тестовых сценариев

1.3. Рекомендуемое количество часов на освоение рабочей программы учебной дисциплины:

максимальной учебной нагрузки обучающегося 226 часа, в том числе:

обязательной аудиторной учебной нагрузки обучающегося 152часов;
практические работы 60 часов
самостоятельной работы обучающегося 74 часа.

ПЕРЕЧЕНЬ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

1	Решение систем уравнений по формулам Крамера. Решение систем уравнений методом Гаусса
2	Решение матричных уравнений, СЛАУ матричным методом.
3	Элементы векторной алгебры
4	Прямая линия
5	Кривые второго порядка
6	Предел функции. Непрерывность функции. Точки разрыва
7	Нахождение производных сложных функций. Геометрический смысл производной. Дифференциал функции
8	Исследование функции с помощью производной и построение графика по результатам исследования
9	Нахождение частных производных. Полный дифференциал
10	Экстремум функции двух переменных
11	Вычисление неопределенных интегралов
12	Интегрирование рациональных дробей
13	Интегрирование тригонометрических функций и иррациональных функций
14	Вычисление определенных интегралов
15	Вычисление площадей плоских фигур
16	Приближенное вычисление определенных интегралов
17	Вычисление двойных интегралов в декартовой системе координат
18	Вычисление двойных интегралов в полярной системе координат

19	Вычисление площадей и объемов
20	Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными
21	Однородные дифференциальные уравнения первого порядка
22	Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Уравнение Бернули.
23	Дифференциальные уравнения второго порядка. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка
24	Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка
25	Исследование числовых рядов на сходимость
26	Область сходимости степенного ряда
27	Разложение функций в степенной ряд
28	Действия над комплексными числами в алгебраической форме
29	Действия над комплексными числами в тригонометрической форме
30	Решение уравнений на множестве комплексных чисел

Практическая работа № 1.

Тема «Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера и методом Гаусса»

Цель: научиться вычислять определители второго и третьего порядка, решать системы линейных уравнений методом Крамера и методом Гаусса.

Время выполнения 90 минут

Материальное обеспечение

1.Теоретические сведения

2.Задание

3.Лист А 4

4.Калькуляторы

Порядок выполнения работы

1.Изучить задание

2. Изучить теоретические сведения

3. Выполнить и оформить работу

4.Показать результаты преподавателю

Домашнее задание

1.Подготовить ответы на контрольные вопросы

Ход работы

Теоретические сведения

Определение. Матрицей размера m×n, где m- число строк, n- число столбцов, называется таблица чисел, расположенных в определенном порядке. Эти числа называются элементами матрицы. Место каждого элемента однозначно определяется номером строки и столбца, на пересечении которых он находится. Элементы матрицы обозначаются a_{ij}, где i- номер строки, а j- номер столбца.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Виды матриц

Матрица может состоять как из одной строки, так и из одного столбца. Вообще говоря, матрица может состоять даже из одного элемента.

Определение. Если число столбцов матрицы равно числу строк (m=n), то матрица называется **квадратной**.

Определение. Матрица вида:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix} = E,$$

называется **единичной матрицей**.

<u>Определение.</u> Если $a_{m\,n} = a_{n\,m}$, то матрица называется **симметрической**.

<u>Пример.</u> $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \\ 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ - симметрическая матрица

<u>Определение.</u> Квадратная матрица вида $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_{22} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$ называется **диагональной** матрицей.

Действия с матрицами

Сложение и вычитание матриц сводится к соответствующим операциям над их элементами. Самым главным свойством этих операций является то, что они ***<u>определены только для матриц одинакового размера</u>***. Таким образом, возможно определить операции сложения и вычитания матриц:

Суммой (разностью) матриц является матрица, элементами которой являются соответственно сумма (разность) элементов исходных матриц.

$c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$

$C = A + B = B + A.$

Операция **умножения (деления)** матрицы любого размера на произвольное число сводится к умножению (делению) каждого элемента матрицы на это число.

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & ... & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & ... & \alpha a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & ... & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$$

$\alpha\ (A+B) = \alpha A \pm \alpha B$

$A(\alpha\pm\beta) = \alpha A \pm \beta A$

Пример. Даны матрицы A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; B = $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, найти 2A + B.

$$2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 8 \\ 6 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \qquad 2A + B = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 10 \\ 9 & 9 & 16 \\ 7 & 6 & 10 \end{pmatrix}.$$

Произведением матриц A·B = C; называется матрица, элементы которой могут быть вычислены по следующим формулам: $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$

Из приведенного определения видно, что операция умножения матриц определена только для матриц, **число столбцов первой из которых равно числу строк второй.**

<u>Определение</u>. Матрицу B называют **транспонированной** матрицей A, а переход от A к B **транспонированием**, если элементы каждой строки матрицы A записать в том же порядке в столбцы матрицы B.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \qquad B = A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix};$$

другими словами, $b_{j\,i} = a_{i\,j}$.

<u>Пример.</u> Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ и число $\alpha = 2$.

Найти $A^TB+\alpha C$.

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \qquad A^TB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot1+2\cdot3+1\cdot2 \\ 0\cdot1+4\cdot3-4\cdot2 \\ 3\cdot1+1\cdot3+2\cdot2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix};$$

$$\alpha C = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}; \qquad A^TB+\alpha C = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

<u>Пример.</u> Найти произведение матриц $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot2 & 1\cdot4 & 1\cdot1 \\ 4\cdot2 & 4\cdot4 & 4\cdot1 \\ 3\cdot2 & 3\cdot4 & 3\cdot1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 8 & 16 & 4 \\ 6 & 12 & 3 \end{pmatrix}.$$

$BA = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot 1 + 4 \cdot 4 + 1 \cdot 3 = 2 + 16 + 3 = 21.$

<u>Пример.</u> Найти произведение матриц $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+10 & 4+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 16 \end{pmatrix}.$

Определителем второго порядка называется число, которое поставлено в соответствие таблицы коэффициентов $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$

по следующему правилу: произведение по главной диагонали берется со знаком плюс, по другой диагонали со знаком минус.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

<u>Пример:</u> вычислить определитель второго порядка

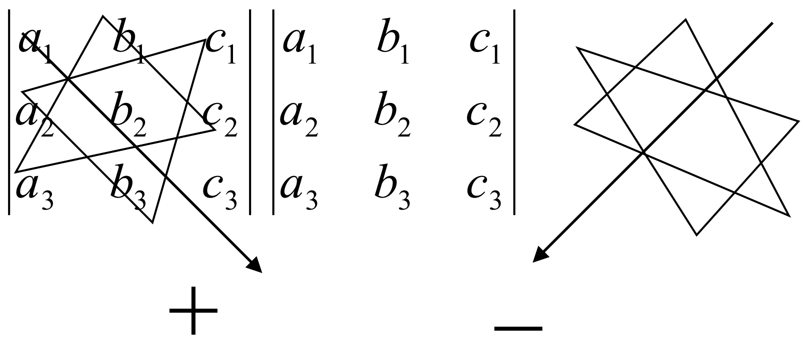
1) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 4 = 4 - 12 = -8$

2) $\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot 1 - 3 \cdot (-2) = -1 + 6 = 5$

Определителем третьего порядка называется число, которое поставлено в соответствие таблицы коэффициентов по следующему правилу:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3$$

Это определение определителя наглядно можно представить следующим образом:



Это правила называют еще «Правило треугольника»

<u>Пример</u> Вычислить определитель третьего порядка

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3\cdot 4\cdot 3 + 2\cdot 2\cdot 1 + 1\cdot 2\cdot 5 - 1\cdot 4\cdot 1 - 2\cdot 2\cdot 3 - 3\cdot 2\cdot 5 =$$

$$= 36 + 4 + 10 - 4 - 12 - 30 = 4$$

Системой линейных алгебраических уравнений, содержащей *m* уравнений и *n* неизвестных, называется система вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

где числа a_{ij} , $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$ называются коэффициентами системы, числа b_i – свободными членами. Подлежат нахождению числа x_n.

Здесь A – матрица коэффициентов системы, называемая *основной матрицей*:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} - \textit{ вектор} - \textit{столбец из неизвестных } x_j$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} - \textit{ вектор} - \textit{столбец из свободных членов } b_j$$

Произведение матриц A * X определено, так как в матрице A столбцов столько же, сколько строк в матрице X (*n* штук).

Расширенной матрицей системы называется матрица $\bar{A}$ системы, дополненная столбцом свободных членов

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Решением системы называется *n* значений неизвестных $x_1 = c_1$, $x_2 = c_2$, … , $x_n = c_n$, при подстановке которых все уравнения системы обращаются в верными равенства. Всякое решение системы можно записать в виде матрицы-столбца

$$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix}$$

Система уравнений называется ***совместной***, если она имеет хотя бы одно решение, и ***несовместимой***, если она не имеет ни одного решения.

Совместная система называется *определённой*, если она имеет единственное решение, и *неопределённой*, если она имеет более одного решения. В последнем случае каждое её решение называется *частным решением* системы. Совокупность всех частных решений называется *общим решением*.

Решить систему – это значит выяснить, совместна она или несовместна. Если система совместна, найти её общее решение.

Две системы называются *эквивалентными* (равносильными), если они имеют одно и то же общее решение. Другими словами, системы эквивалентны, если каждое решение одной из них является решением другой, и наоборот.

Эквивалентные системы получаются, в частности, при *элементарных преобразованиях* системы при условии, что преобразования выполняются лишь над строками матрицы.

Система линейных уравнений называется *однородной,* если все свободные члены равны нулю:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Однородная система всегда совместна, так как $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ является решением системы. Это решение называется *нулевым* или *тривиальным.*

Пример 4.3. Решить систему $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + 3x_2 = 7 \end{cases}$

Решение: $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7 \neq 0,\ \Delta_{1=} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 7, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 14$

Значит, $x_1 = \frac{7}{7} = 1,\ x_2 = \frac{14}{7} = 2$

Правило Крамера

<u>**Теорема.**</u> *Система из n уравнений с n неизвестными*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

в случае, если определитель матрицы системы не равен нулю, имеет единственное решение и это решение находится по формулам:

$$x_i = \Delta_i/\Delta, \text{ где}$$

Δ = det A, а Δ_i – определитель матрицы, получаемой из матрицы системы заменой столбца J столбцом свободных членов b/

Суть ***метода Гаусса*** заключается в последовательном исключении неизвестных.

Рассмотрим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Разделим обе части 1–го уравнения на $a_{11} \neq 0$, затем:

1) умножим на a_{21} и вычтем из второго уравнения

2) умножим на a_{31} и вычтем из третьего уравнения и т.д.

Получим:

$$\begin{cases} x_1 + d_{12}x_2 + \ldots + d_{1n}x_n = d_1 \\ d_{22}x_2 + d_{23}x_3 + \ldots + d_{2n}x_n = d_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ d_{m2}x_2 + d_{m3} + \ldots + d_{mn}x_n = d_m \end{cases}$$, где $d_{1j} = a_{1j}/a_{11}$, $j = 2, 3, \ldots, n+1$.

$d_{ij} = a_{ij} - a_{i1}d_{1j}$ $\quad i = 2, 3, \ldots , n;$ $\quad j = 2, 3, \ldots , n+1.$

Далее повторяем эти же действия для второго уравнения системы, потом – для третьего и т.д.

К элементарным преобразованиям относятся:

1) Прибавление к обеим частям одного уравнения соответствующих частей другого, умноженных на одно и то же число, не равное нулю.

2) Перестановка уравнений местами.

3) Удаление из системы уравнений, являющихся тождествами для всех x.

Задания для проведения практической работы

1.Вычислить определители второго порядка:

1) $\Delta = \begin{vmatrix} -\kappa_1 & 2+\kappa_2 \\ \kappa_1 \cdot \kappa_2 & 5 \end{vmatrix}$, 2) $\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{\kappa_1}{3} & 5^2 \\ 3 \cdot \kappa_2 & 6 \end{vmatrix}$, 3) $\Delta = \begin{vmatrix} 9^{0,5} & \kappa_1 \cdot 64^{\frac{1}{6}} \\ (0,5)^{-3} & \sqrt{4^2} \end{vmatrix}$

2.Вычислить определители третьего порядка:

1) $\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 3\kappa_1 & 2 \\ 2 & 8 & \kappa_2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, 2) $\Delta = \begin{vmatrix} 3\kappa_2 & 4 & -5 \\ 8 & 7\kappa_2 - 2 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$, 3) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & \kappa_1 \cdot \kappa_2 \\ 3 & \kappa_1 & -5 \\ 2 & \kappa_2 & 5 \end{vmatrix}$

3.Решить систему уравнений методом Крамера, сделать проверку:

1. $\begin{cases} 2x+y+3z=7, \\ 2x+3y+z=1, \\ 3x+2y+z=6. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 2x-y+2z=3, \\ x+y+2z=-4, \\ 4x+y+4z=-3. \end{cases}$ 3. $\begin{cases} 3x-y+z=12, \\ x+2y+4z=6, \\ 5x+y+2z=3. \end{cases}$ 4. $\begin{cases} 2x-y+3z=-4, \\ x+3y+3z=11, \\ x-2y+2z=-7. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 3x-2y+4z=12, \\ 3x+4y-2z=6, \\ 2x-y-z=-9. \end{cases}$ 6. $\begin{cases} 8x+3y-6z=-4, \\ x+y-z=2, \\ 4x+y-3z=-5. \end{cases}$ 7. $\begin{cases} 4x+y-3z=9, \\ x+y-z=-2, \\ 8x+3y-6z=12. \end{cases}$ 8. $\begin{cases} 2x+3y+4z=33, \\ 7x-5y=24, \\ 4x+11z=39. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 2x+3y+4z=12, \\ 7x-5y+z=-33, \\ 4x+z=-7. \end{cases}$ 10. $\begin{cases} x+4y-z=6, \\ 5y+4z=-20, \\ 3x-2y+5z=-22. \end{cases}$ 11. $\begin{cases} 3x-2y+4z=21, \\ 3x+4y-2z=9, \\ 2x-y-z=10. \end{cases}$ 12. $\begin{cases} 3x-2y-5z=5, \\ 2x+3y-4z=12, \\ x-2y+3z=-1. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 4x+y+4z=19, \\ 2x-y+2z=11, \\ x+y+2z=8. \end{cases}$ 14. $\begin{cases} 2x-y+2z=0, \\ 4x+y+4z=6, \\ x+y+2z=4. \end{cases}$ 15. $\begin{cases} 2x-y+2z=8, \\ x+y+2z=11, \\ 4x+y+4z=22. \end{cases}$ 16. $\begin{cases} 2x-y-3z=-9, \\ x+5y+z=20, \\ 3x+4y+2z=15. \end{cases}$

17. $\begin{cases} 2x-y-3z=0, \\ 3x+4y+2z=1, \\ x+5y+z=-3. \end{cases}$ 18. $\begin{cases} -3x+5y+6z=-8, \\ 3x+y+z=-4, \\ x-4y-2z=-9. \end{cases}$ 19. $\begin{cases} 3x+y+z=-4, \\ -3x+5y+6z=36, \\ x-4y-2z=19. \end{cases}$ 20. $\begin{cases} 3x-y+z=-11, \\ 5x+y+2z=8, \\ x+2y+4z=16. \end{cases}$

21. $\begin{cases} 3x-y+z=9, \\ 5x+y+2z=11, \\ x+2y+4z=19. \end{cases}$ 22. $\begin{cases} 2x+3y+z=4, \\ 2x+y+3z=0, \\ 3x+2y+z=1. \end{cases}$ 23. $\begin{cases} 2x+3y+z=12, \\ 2x+y+3z=16, \\ 3x+2y+z=8. \end{cases}$ 24. $\begin{cases} x-2y+3z=14, \\ 2x+3y-4z=-16, \\ 3x-2y-5z=-8. \end{cases}$

25. $\begin{cases} 3x+4y-2z=11, \\ 2x-y-z=4, \\ 3x-2y+4z=11. \end{cases}$ 26. $\begin{cases} x+5y-6z=-15, \\ 3x+y+4z=13, \\ 2x-3y+z=9. \end{cases}$ 27. $\begin{cases} 4x-y=-6, \\ 3x+2y+5z=-14, \\ x-3y+4z=-19. \end{cases}$

28. $\begin{cases} 5x+2y-4z=-16, \\ x+3z=-6, \\ 2x-3y+z=9. \end{cases}$ 29. $\begin{cases} x+4y-z=-9, \\ 4x-y+5z=-2, \\ 3y-7z=-6. \end{cases}$ 30. $\begin{cases} 7x+4y-z=13, \\ 3x+2y+3z=3, \\ 2x-3y+z=-10. \end{cases}$

Вариант	κ_1	κ_2	***Вариант***	κ_1	κ_2	***Вариант***	κ_1	κ_2
1	3	-2	***11***	4	-1	**21**	-2	4
2	4	1	***12***	5	1	**22**	1	3
3	3	-4	***13***	2	0	**23**	-3	2
4	2	1	***14***	-2	1	**24**	-4	-1
5	3	-3	***15***	2	-2	**25**	-1	5
6	1	5	***16***	0	7	**26**	4	-2

7	-2	3	***17***	-1	4	**27**	-1	3
8	6	-2	***18***	-3	3	**28**	2	-3
9	-6	1	***19***	-4	1	**29**	-2	5
10	-5	1	***20***	0	8	**30**	-5	-1

Контрольные вопросы:

1. Что называется определителем матрицы?
2. Как вычислить определитель второго порядка?
3. Какие способы вычисления определителя третьего порядка вам известны?
4. Перечислите свойства определителей.
5. Сформулируйте теорему Крамера.

6.Алгоритм применения метода Гаусса.

Ответы

вариант	1 задание			2 задание			вариант	1 задание			2 задание		
	1	2	3	1	2	3		1	2	3	1	2	3
1.	-15	6	-180	-84	-220	127	16.	-16	63	-244	-89	-100	109
2.	-32	-63	-244	-63	-68	55	17.	-40	-65	68	-72	-68	45
3.	-39	6	-180	-104	2372	261	18.	-10	4	-116	-52	232	60
4.	-16	-71	-20	-45	-68	63	19.	16	-79	140	-9	-68	59
5.	-24	-219	-180	-94	1212	185	20.	-10	146	-116	-64	-220	90

6.	-40	-373	-52	-20	4028	145	21.	0	-925	12	-21	8092	85
7.	40	-229	140	-19	1308	-23	22.	29	-302	76	-24	2500	9
8.	-30	162	-372	-138	-220	286	23.	45	231	204	-16	1308	-85
9.	48	-87	396	27	-68	-65	24.	32	-83	268	9	-68	-9
10.	40	-85	332	18	-68	-35	25.	0	-600	12	-20	10628	90
11.	10	-304	140	-24	2500	-68	26.	-20	158	-244	-102	-220	172
12.	-20	-223	-52	-36	1308	91	27.	20	-227	76	-18	1308	27
13.	39	156	204	-8	452	-27	28.	14	229	-116	-73	1212	123
14.	16	63	268	31	-100	45	29.	80	-379	-140	-29	4028	-125
15.	40	-377	76	-26	4028	-15	30.	30	65	332	46	-100	55

вариант	1	2	3	4	5
			-12,36,24,-		-60,0,240,-

Δ	12,36,24,12	-6,12,18,2	12	8,-8,28,4	300
x, y, z	3 , 2, 1	-2, 3, -1/3	3, -2, 1	-1, 3,5, 0,5	0, -3, 5
вариант Δ	6 -1,-1,-6,-5	7 1,3,-6,-1	8 -261, -1827, 1305, -261	9 61,-122,244,61	10 96,96,0,-480
x, y, z	1 ,6, 5	3, -6, -1	7, 5, 1	-2, 4, 1	1, 0,-5
вариант Δ	11 -60,-300,60,-60	12 58,174,116,0	13 -6,-6,6,-24	14 6,0,12,6	15 -6,-6,-12,-24
x, y, z	5, -1, 1	3, 2, 0	1, -1, 4	0, 2, 1	1, 2, 4
вариант Δ	16 44,-44,176,44	17 -44,-44,44,-44	18 -49,49,-245,294	19 49,-109,-651,782	20 27,0,270,-27
x, y, z	-1, 4, 1	1, -1, 1	-1, 5, -6	-109/49, -93/7, 782/49	0, 10, -1
вариант Δ	21 27,9,-60,156	22 12,-12,24,0	23 12,-12,36,60	24 -58,-58,116,-174	25 -60,-180,-60,-60
x, y, z	1/3,-20/9,52/9	-1, 2, 0	-1, 3, 5	1, -2, 3	3, 1, 1
вариант Δ	26 104,208,-104, 208	27 99,-99,198,-297	28 67,-150,-329,-84	29 92, -92, -184, 0	30 102,0,306,-102
x, y, z	2, -1, 2	-1, 2, -3	-150/67, -329/67, -84/67	-1, -2, 0	0, 3, -1

Практическая работа № 2

Тема Решение матричных уравнений, СЛАУ матричным методом.

Цель: научиться вычислять миноры, алгебраические дополнения, определители четвертого порядков , находить обратные матрицы ,решать простейшие матричные уравнения, СЛАУ матричным методом .

Время выполнения 90 минут

Материальное обеспечение

1.Теоретические сведения

2.Задание

3.Лист А 4

4.Калькуляторы

Порядок выполнения работы

1.Изучить задание

2. Изучить теоретические сведения

3. Выполнить и оформить работу

4.Показать результаты преподавателю

Домашнее задание

1.Подготовить ответы на контрольные вопросы

Ход работы

Теоретические сведения

Минором некоторого элемента a_{ij} определителя *n-го* порядка называется определитель n – 1-го порядка, полученный из исходного путём вычёркивания строки и столбца, на пересечении которых находится выбранный элемент. Обозначается m_{ij}.

$$Так\ если\ \Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, то\ m_{11}=\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \qquad m_{32}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} определителя называется его минор, взятый со знаком «плюс», если сумма $i + j$ – чётное число, и со знаком «минус», если эта сумма нечётная. Обозначается A_{ij}: $A_{ij} = (-1)^{i+j} * m_{ij}$.
Так, $A_{11} = +m_{11}$, $A_{32} = -m_{32}$.

Свойство («Разложение определителя по элементам некоторого ряда»). Определитель равен сумме произведений элементов некоторого ряда на соответствующие им алгебраические дополнения.

Проиллюстрируем и одновременно докажем свойство 7 на примере определителя 3-его порядка. В этом случае свойство 7 означает, что

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} * A_{11} + a_{12} * A_{12} + a_{13} * A_{13}$$

В самом деле, имеем

$$a_{11} * A_{11} + a_{12} * A_{12} + a_{13} * A_{13} == a_{11} * \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} *$$

$$\left(-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}\right) + a_{13} ** \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) =$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} = \Delta$$

Свойство содержит в себе способ вычисления определителей высоких порядков.

Пример   Вычислите определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 & 8 \\ -1 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

Решение: Для разложения определителя обычно выбирают тот ряд, где есть нулевые элементы, т.к. соответствующие им слагаемые в разложении будут равны нулю.

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 8 \\ -1 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 3 * \begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 5 & 3 & 2 \\ -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} + 1 * \begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 5 & 3 & 2 \\ -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} + 0 * \begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 7 & 0 & 1 \\ -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} - 1 * \begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 7 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3 * (7 * 3 * 4 + (-1) * 0 * 2 + 5 * 7 * 1 - (-1) * 3 * 1 - 7 * 7 * 2 - 5 * 0 * 4) + (5 * 3 * 4 + (-1) * 7 * 2 + 5 * 7 * 8 - (-1) * 3 * 8 - 5 * 7 * 4 - 5 * 7 * 2) - (5 * 0 * 2 + 7 * 1 * 5 + 7 * 3 * 8 - 5 * 0 * 8 - 3 * 1 * 5 - 7 * 7 * 2) = 122$$

Свойство . Сумма произведений элементов какого- либо ряда определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов параллельного ряда равна нулю.

Так, например, $a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = 0$

Нахождение обратной матрицы.

Пусть А – квадратная матрица *n*-го порядка $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$

Квадратная матрица А называется ***невырожденной,*** если определитель Δ = det A не равен нулю: Δ = det A = 0. В противном случае (Δ = 0) матрица А называется ***вырожденной.***

Матрицей, ***союзной к матрице*** А, называется матрица

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

где A_{ij} – алгебраическое дополнение элемента a_{ij} данной матрицы A (оно определяется так же, как и алгебраическое дополнение элемента определителя).

Матрица A^{-1} называется ***обратной*** матрице A, если выполняется условие
$A * A^{-1} = A^{-1} * A = E$,
где E – единичная матрица того же порядка, что и матрица A. Матрица A^{-1} имеет те же размеры, что и матрица A.

Обратная матрица.

Теорема *Всякая невырожденная матрица имеет обратную.*

$$A^{-1} = \frac{A^*}{\det A}, т.е.\ A^{-1} = \frac{1}{\det A} * \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Отметим *свойства* обратной матрицы:

1. $\det (A^{-1}) = 1 / \det A$;
2. $(A * B)^{-1} = B^{-1} * A^{-1}$;
3. $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

Пример Найти A^{-1}, если $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Решение: 1) Находим det A: $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 3 = 5 \neq 0$

2) Находим A^*: $A_{11} = 1$, $A_{21} = -3$, $A_{12} = -(-1) = 1$, $A_{22} = 2$,
поэтому $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

3) Находим A^{-1}: $A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 & -3/5 \\ 1/5 & 2/5 \end{pmatrix}$

Проверка:

$$A * A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1/5 & -3/5 \\ 1/5 & 2/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/5 + 3/5 & -6/5 + 6/5 \\ -1/5 + 1/5 & 3/5 + 2/5 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Пример Определить, при каких значениях α существует матрица, обратная данной

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ \alpha & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение: Всякая невырожденная матрица имеет обратную. Найдём определитель матрицы A:

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ \alpha & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 0 + 2\alpha - 12 - 0 + 2\alpha = 4\alpha - 9$$

Если $4\alpha - 9 = 0$, т.е. $\alpha = 9/4$, то $\Delta A = 0$, т.е. матрица A невырожденная, имеет обратную.

Пример Показать, что матрица A является обратной для B, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение: Найдём произведение матиц А и В:

$$A * B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3-3+1 & -3+5-2 & 1-2+1 \\ 3-6+3 & -3+10-6 & 1-4+3 \\ 3-9+6 & -3+15-12 & 1-6+6 \end{pmatrix} == \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Аналогично В * А = Е. Следовательно, матрица А является обратной для В.

Пусть дана система *n* линейных уравнений с *n* неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

или в матричной форме А * Х = В.

Основная матрица А такой системы квадратная. Определитель этой матрицы

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

называется *определителем системы.* Если определитель системы отличен от нуля, то система называется *невырожденной.*

Найдём решение данной системы уравнений в случае $\Delta \neq 0$.

Умножив обе части уравнения А * Х = В слева на матрицу A^{-1}, получим A^{-1} * А * Х = A^{-1} * В. Поскольку A^{-1} * А = Е и Е * Х = Х, то Х = A^{-1} * В.

Отыскание решения системы по формуле (4.1) называют *матричным способом* решения системы.

Задания для выполнения практической работы

Задание 1

Даны определители: 1) $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & \kappa_1 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 3\kappa_2 & 2 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & 3 & -3 \end{vmatrix}$, 2) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & \kappa_2 \\ -2 & 3 & \kappa_1 & 2 \\ 1 & -3 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$,

1) Найти миноры и алгебраические дополнения элементов a_{i3}, a_{2j}
2) Вычислить определители, разложив их по элементам а) i-ой строки, б) j-го столбца

Вариант	κ_1	κ_2	**i**	**j**	**Вариант**	κ_1	κ_2	**i**	**j**

1	3	-2	1	2	**16**	4	-1	2	1
2	4	1	2	1	**17**	5	1	1	2
3	3	-4	1	3	**18**	2	0	3	1
4	2	1	3	4	**19**	-2	1	4	3
5	3	-3	4	1	**20**	2	-2	1	4
6	1	5	2	2	**21**	0	7	2	2
7	-2	3	1	4	**22**	-1	4	4	1
8	6	-2	4	3	**23**	-3	3	3	4
9	-6	1	2	1	**24**	-4	1	1	2
10	-5	1	1	1	**25**	0	8	1	1
11	-2	4	3	2	**26**	4	-2	2	3
12	1	3	4	3	**27**	-1	3	3	4
13	-3	2	2	4	**28**	2	-3	4	2
14	-4	-1	1	2	**29**	-2	5	2	1
15	-1	5	3	1	**30**	-5	-1	1	3

Задание 2. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} \kappa_1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & -\kappa_2 & 4 \end{pmatrix}$. Найти

$a) A^{-1}$ *и проверить, что* $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$

$б)\ A + A^{-1}$

Вариант	κ_1	κ_2	***Вариант***	κ_1	κ_2
1	3	-2	***16***	4	-1
2	4	1	***17***	5	1
3	3	-4	***18***	2	0
4	2	1	***19***	-2	1

5	3	-3	***20***	2	-2
6	1	5	***21***	0	7
7	-2	3	***22***	-1	4
8	6	-2	***23***	-3	3
9	-6	1	***24***	-4	1
10	-5	1	***25***	0	8
11	-2	4	***26***	4	-2
12	1	3	***27***	-1	3
13	-3	2	***28***	2	-3
14	-4	-1	***29***	-2	5
15	-1	5	***30***	-5	-1

Задание 3

1. Решить системы уравнений с помощью обратной матрицы (матричным методом).

$$1.1.\begin{cases}2x+y+3z=7,\\2x+3y+z=1,\\3x+2y+z=6.\end{cases}\quad 1.2.\begin{cases}2x-y+2z=3,\\x+y+2z=-4,\\4x+y+4z=-3.\end{cases}\quad 1.3.\begin{cases}3x-y+z=12,\\x+2y+4z=6,\\5x+y+2z=3.\end{cases}$$

$$1.4.\begin{cases}2x-y+3z=-4,\\x+3y+3z=11,\\x-2y+2z=-7.\end{cases}\quad 1.5.\begin{cases}3x-2y+4z=12,\\3x+4y-2z=6,\\2x-y-z=-9.\end{cases}\quad 1.6.\begin{cases}8x+3y-6z=-4,\\x+y-z=2,\\4x+y-3z=-5.\end{cases}$$

$$1.7.\begin{cases}4x+y-3z=9,\\x+y-z=-2,\\8x+3y-6z=12.\end{cases}\quad 1.8.\begin{cases}2x+3y+4z=33,\\7x-5y=24,\\4x+11z=39.\end{cases}\quad 1.9.\begin{cases}2x+3y+4z=12,\\7x-5y+z=-33,\\4x+z=-7.\end{cases}$$

$$1.10.\begin{cases}x+4y-z=6,\\5y+4z=-20,\\3x-2y+5z=-22.\end{cases}\quad 1.11.\begin{cases}3x-2y+4z=21,\\3x+4y-2z=9,\\2x-y-z=10.\end{cases}\quad 1.12.\begin{cases}3x-2y-5z=5,\\2x+3y-4z=12,\\x-2y+3z=-1.\end{cases}$$

1.13. $\begin{cases} 4x + y + 4z = 19, \\ 2x - y + 2z = 11, \\ x + y + 2z = 8. \end{cases}$ 1.14. $\begin{cases} 2x - y + 2z = 0, \\ 4x + y + 4z = 6, \\ x + y + 2z = 4. \end{cases}$ 1.15. $\begin{cases} 2x - y + 2z = 8, \\ x + y + 2z = 11, \\ 4x + y + 4z = 22. \end{cases}$

1.16. $\begin{cases} 2x - y - 3z = -9, \\ x + 5y + z = 20, \\ 3x + 4y + 2z = 15. \end{cases}$ 1.17. $\begin{cases} 2x - y - 3z = 0, \\ 3x + 4y + 2z = 1, \\ x + 5y + z = -3. \end{cases}$ 1.18. $\begin{cases} -3x + 5y + 6z = -8, \\ 3x + y + z = -4, \\ x - 4y - 2z = -9. \end{cases}$

1.19. $\begin{cases} 3x + y + z = -4, \\ -3x + 5y + 6z = 36, \\ x - 4y - 2z = 19. \end{cases}$ 1.20. $\begin{cases} 3x - y + z = -11, \\ 5x + y + 2z = 8, \\ x + 2y + 4z = 16. \end{cases}$ 1.21. $\begin{cases} 3x - y + z = 9, \\ 5x + y + 2z = 11, \\ x + 2y + 4z = 19. \end{cases}$

1.22. $\begin{cases} 2x + 3y + z = 4, \\ 2x + y + 3z = 0, \\ 3x + 2y + z = 1. \end{cases}$ 1.23. $\begin{cases} 2x + 3y + z = 12, \\ 2x + y + 3z = 16, \\ 3x + 2y + z = 8. \end{cases}$ 1.24. $\begin{cases} x - 2y + 3z = 14, \\ 2x + 3y - 4z = -16, \\ 3x - 2y - 5z = -8. \end{cases}$

1.25. $\begin{cases} 3x + 4y - 2z = 11, \\ 2x - y - z = 4, \\ 3x - 2y + 4z = 11. \end{cases}$ 1.26. $\begin{cases} x + 5y - 6z = -15, \\ 3x + y + 4z = 13, \\ 2x - 3y + z = 9. \end{cases}$ 1.27. $\begin{cases} 4x - y = -6, \\ 3x + 2y + 5z = -14, \\ x - 3y + 4z = -19. \end{cases}$

1.28. $\begin{cases} 5x + 2y - 4z = -16, \\ x + 3z = -6, \\ 2x - 3y + z = 9. \end{cases}$ 1.29. $\begin{cases} x + 4y - z = -9, \\ 4x - y + 5z = -2, \\ 3y - 7z = -6. \end{cases}$ 1.30. $\begin{cases} 7x + 4y - z = 13, \\ 3x + 2y + 3z = 3, \\ 2x - 3y + z = -10. \end{cases}$

Ответы

Задание 1

вариант	M_{i3}	M_{2j}	A_{i3}	A_{2j}	Δ	вариант	M_{i3}	M_{2j}	A_{i3}	A_{2j}	Δ
1.	-72	-52	72	52	58	16.	-33	15	33	-15	24
	50	-30	-50	30	160		-25	65	25	-65	175
2.	9	15	-9	-15	18	17.	-27	26	-27	26	14
	-15	55	-15	-55	145		50	-15	-50	-15	160
3.	14	-88	-14	88	82	18.	-19	5	-19	-5	47
	50	-40	50	40	180		-12	60	-12	-60	120
4.	-19	6	-19	6	26	19.	15	-33	-15	33	42
	-19	10	19	10	115		-2	-15	2	15	55

5.	7	10	-7	-10	70	20.	-72	24	72	24	89
	-11	75	-11	75	170		50	10	-50	10	130
6.	36	54	-36	54	-90	21.	35	25	-35	25	-200
	5	5	-5	5	100		15	15	-15	15	115
7.	93	-6	93	-6	-72	22.	74	-10	-74	10	-106
	50	10	50	10	85		10	40	-10	-40	100
8.	46	-58	-46	58	-20	23.	-44	-6	-44	-6	-86
	-8	-30	8	30	250		-33	10	-33	10	80
9.	-61	-35	61	35	58	24.	27	-73	-27	-73	50
	-15	55	15	-55	-5		50	-15	50	-15	25
10.	27	-30	-27	30	54	25.	258	-5	-258	5	-239
	50	55	-5-	-55	10		50	20	-50	-20	120
11.	-39	-78	-39	-78	-129	26.	-54	-54	54	54	27
	-40	0	40	0	100		-30	-30	30	-30	190
12.	21	12	-21	-12	-30	27.	-34	-6	-34	-6	-58
	7	-5	-7	5	100		-33	10	-33	10	90
13.	-40	0	40	0	-20	28.	-13	-115	13	-115	110
	-10	10	10	10	60		-11	-35	11	-35	135
14.	-39	-19	-39	-19	200	29.	-21	-15	21	15	-186
	50	-25	-50	-25	-25		5	35	-5	-35	115
15.	-34	-10	-34	10	-	30.	-39	-42	-39	42	222

					154						
	-47	35	-47	-35	110		50	-25	-50	25	-50

Задание 2

1 $\left\lvert\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 6 & -3 \\ -2 & 15 & -8 \\ 1 & -12 & 7 \end{pmatrix}\right\rvert$	**2** $\frac{1}{27}\begin{pmatrix} 6 & 9 & -3 \\ -2 & 15 & -8 \\ -5 & -3 & 7 \end{pmatrix}$	**3** $\frac{1}{13}\begin{pmatrix} 4 & -4 & 3 \\ 2 & -15 & 8 \\ -5 & 18 & -7 \end{pmatrix}$	**4** $\frac{1}{21}\begin{pmatrix} 6 & 9 & -3 \\ -2 & 11 & -6 \\ -5 & -4 & 6 \end{pmatrix}$	**5** $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 2 & -15 & 8 \\ -3 & 15 & -7 \end{pmatrix}$
6 $\frac{1}{31}\begin{pmatrix} 14 & 13 & -3 \\ -2 & 7 & -4 \\ -13 & -1 & 5 \end{pmatrix}$	**7** $\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -10 & -11 & 3 \\ 2 & 5 & -2 \\ 9 & 12 & -2 \end{pmatrix}$	**8** $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 6 & -3 \\ -2 & 27 & -14 \\ 1 & -18 & 10 \end{pmatrix}$	**9** $\frac{1}{27}\begin{pmatrix} -6 & -9 & 3 \\ 2 & 21 & -10 \\ 5 & 12 & 2 \end{pmatrix}$	**10** $\frac{1}{21}\begin{pmatrix} -6 & -9 & 3 \\ 2 & 17 & -8 \\ 5 & 11 & 1 \end{pmatrix}$
11 $\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -12 & -12 & 3 \\ 2 & 5 & -2 \\ 11 & 14 & -2 \end{pmatrix}$	**12** $\frac{1}{23}\begin{pmatrix} 10 & 11 & -3 \\ -2 & 7 & -4 \\ -9 & -3 & 5 \end{pmatrix}$	**13** $\frac{1}{13}\begin{pmatrix} -8 & -10 & 3 \\ 2 & 9 & -4 \\ 7 & 12 & -1 \end{pmatrix}$	**14** $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -7 & 3 \\ 2 & 13 & -6 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$	**15** $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 14 & 13 & -3 \\ -2 & -1 & 0 \\ -13 & -11 & 3 \end{pmatrix}$
16 $\frac{1}{13}\begin{pmatrix} 2 & 7 & -3 \\ -2 & 19 & -10 \\ -1 & -10 & 8 \end{pmatrix}$	**17** $\frac{1}{39}\begin{pmatrix} 6 & 9 & -3 \\ -2 & 23 & -12 \\ -5 & -1 & 9 \end{pmatrix}$	**18** $\frac{1}{15}\begin{pmatrix} 4 & 8 & -3 \\ -2 & 11 & -6 \\ -3 & -6 & 6 \end{pmatrix}$	**19** $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -6 & -9 & 3 \\ 2 & 5 & -2 \\ 5 & 8 & -2 \end{pmatrix}$	**20** $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 6 & -3 \\ -2 & 11 & -6 \\ 1 & -10 & 6 \end{pmatrix}$
21 $\frac{1}{21}\begin{pmatrix} 18 & 15 & -3 \\ -2 & 3 & -2 \\ -17 & -6 & 4 \end{pmatrix}$	**22** $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 12 & 12 & -3 \\ -2 & -1 & 0 \\ -11 & -10 & 3 \end{pmatrix}$	**23** $\frac{1}{17}\begin{pmatrix} -10 & -11 & 3 \\ 2 & 9 & -4 \\ 9 & 15 & -1 \end{pmatrix}$	**24** $\frac{1}{15}\begin{pmatrix} -6 & -9 & 3 \\ 2 & 13 & -6 \\ 5 & 10 & 0 \end{pmatrix}$	**25** $\frac{1}{23}\begin{pmatrix} 20 & 16 & -3 \\ -2 & 3 & -2 \\ -19 & -6 & 4 \end{pmatrix}$
26 $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 6 & -3 \\ -2 & 19 & -10 \\ 1 & -14 & 8 \end{pmatrix}$	**27** $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 10 & 11 & -3 \\ -2 & -1 & 0 \\ -9 & -9 & 3 \end{pmatrix}$	**28** $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 2 & -11 & 6 \\ -3 & 12 & -6 \end{pmatrix}$	**29** $\frac{1}{11}\begin{pmatrix} -14 & -13 & 3 \\ 2 & 5 & -2 \\ 13 & 16 & -2 \end{pmatrix}$	**30** $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 & -7 & 3 \\ 2 & 17 & -8 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Контрольные вопросы

1. Что называется минором?
2. Что называется алгебраическим дополнением элемента матрицы?
3. Как разложить определитель по элементам столбца или строки?
4. Какая матрица называется невырожденной?
5. Транспонированная матрица.
6. Какая матрица называется обратной по отношению к данной?
7. Каков порядок вычисления обратной матрицы?
8. Алгоритм решения простейшего матричного уравнения

Практическая работа № 3 по теме

«Элементы векторной алгебры»

Цель: Проверить знания и умения по нахождению: координат вектора, операций над векторами, модуля вектора и скалярного произведения, векторного произведения, смешанного произведения.

Время выполнения 90 минут

Материальное обеспечение
1.Теоретические сведения
2.Задание
3.Лист А 4
4.Калькуляторы

Порядок выполнения работы
1.Изучить задание
2. Изучить теоретические сведения
3. Выполнить и оформить работу
4.Показать результаты преподавателю

Домашнее задание
1.Подготовить ответы на контрольные вопросы

Ход работы

Теоретические сведения

Векторное произведение векторов.

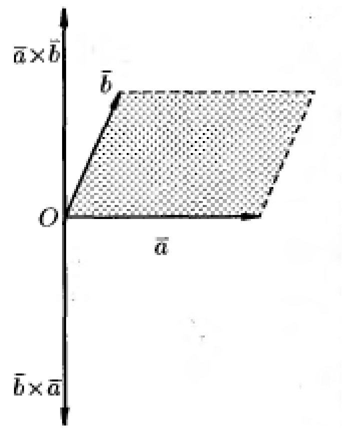
Определение. **Векторным произведением** векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, удовлетворяющий следующим условиям:

1) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \sin\varphi$, где φ - угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, $\sin\varphi \geq 0; \quad 0 \leq \varphi \leq \pi$

2) вектор $\vec{c}$ ортогонален векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$

3) $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют правую тройку векторов. Обозначается**:** $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$

или $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$.



Свойства векторного произведения векторов:

1) $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$;

2) $\vec{a} \times \vec{b} = 0$, если $\vec{a} \,||\, \vec{b}$ или $\vec{a} = 0$ или $\vec{b} = 0$;

3) (m$\vec{a}$)$\times\vec{b}$ = $\vec{a}\times$(m$\vec{b}$) = m($\vec{a}\times\vec{b}$);

4) $\vec{a}\times(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\times\vec{b} + \vec{a}\times\vec{c}$;

5) Если заданы векторы $\vec{a}\,(x_a, y_a, z_a)$ и $\vec{b}\,(x_b, y_b, z_b)$ в декартовой прямоугольной системе координат с единичными векторами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, то

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix}$$

6) Геометрическим смыслом векторного произведения векторов является ***площадь параллелограмма***, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

7) Механический смысл векторного произведения . Пусть точка А твердого тела закреплена, а в его точке В приложена сила F. Тогда возникает вращательный момент М (момент силы). По определению момент силы относительно точки А находится по формуле $\overline{M} = \overline{AB} \times \overline{F}$ - векторное произведение векторов $\overline{AB}$ и $\overline{F}$

Приложения векторного произведения векторов.

Установление коллинеарности векторов:

Если $\bar{a} \parallel \bar{b}$, то $\bar{a} \times \bar{b} = 0$ (и наоборот), т.е. :

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \bar{0} \iff \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} \iff \bar{a} \parallel \bar{b}.$$

Нахождение площади параллелограмма и треугольника.

Согласно определению векторного произведения векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$

$\vec{a}\times\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\varphi$, т.е. Sпар.= $|\vec{a}\times\vec{b}|$ и значит, Sтреуг.=1/2* $|\vec{a}\times\vec{b}|$

Пример. Найти векторное произведение векторов $\vec{a}=2\vec{i}+5\vec{j}+\vec{k}$ и $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$.

$\vec{a}$ = (2, 5, 1); $\vec{b}$ = (1, 2, -3)

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 5 & 1\\ 1 & 2 & -3\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}5 & 1\\ 2 & -3\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & -3\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}2 & 5\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-17\vec{i}+7\vec{j}-\vec{k}.$$

Пример. Вычислить площадь треугольника с вершинами A(2, 2, 2), B(4, 0, 3), C(0, 1, 0).

$$\overrightarrow{AC}=(0-2;1-2;0-2)=(-2;-1;-2)$$
$$\overrightarrow{AB}=(4-2;0-2;3-2)=(2;-2;1)$$

$$\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -2 & -1 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}-1 & -2\\ -2 & 1\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}-2 & -2\\ 2 & 1\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}-2 & -1\\ 2 & -2\end{vmatrix}=\vec{i}(-1-4)-\vec{j}(-2+4)+$$
$$+\vec{k}(4+2)=-5\vec{i}-2\vec{j}+6\vec{k}.$$

$$\left|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{25+4+36}=\sqrt{65}. \qquad S_{\Delta}=\frac{\sqrt{65}}{2}\ (\text{ед}^2).$$

Пример. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}+3\vec{b};\ \ 3\vec{a}+\vec{b}$, если $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1;\ \ \vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}=30^0.$

$$(\vec{a}+3\vec{b})\times(3\vec{a}+\vec{b})=3\vec{a}\times\vec{a}+\vec{a}\times\vec{b}+9\vec{b}\times\vec{a}+3\vec{b}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}+9\vec{b}\times\vec{a}=8\vec{b}\times\vec{a}$$

$$S=8|\vec{b}||\vec{a}|\sin 30^0=4\ (\text{ед}^2).$$

Смешанное произведение векторов.

Определение. **Смешанным произведением** векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется число, равное скалярному произведению вектора $\vec{a}$ на вектор, равный векторному произведению векторов $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Обозначается $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}$ или ($\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$).

Смешанное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}$ по модулю равно объему параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, т.е. $V = \left|\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}\right|$

Свойства смешанного произведения:

1.Смешанное произведение равно нулю, если: а) хоть один из векторов равен нулю; б) два из векторов коллинеарные; в) векторы компланарны.

2. $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{c}\cdot(\vec{b}\times\vec{a})$ смешанное произведение не меняется при циклической перестановке векторов;

3. $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ смешанное произведение не меняется при перестановке знаков векторного и скалярного умножения.

4. $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = (\vec{b},\vec{c},\vec{a}) = (\vec{c},\vec{a},\vec{b}) = -(\vec{b},\vec{a},\vec{c}) = -(\vec{c},\vec{b},\vec{a}) = -(\vec{a},\vec{c},\vec{b})$

5. $(\lambda\vec{a}_1 + \mu\vec{a}_2,\vec{b},\vec{c}) = \lambda(\vec{a}_1,\vec{b},\vec{c}) + \mu(\vec{a}_2,\vec{b},\vec{c})$

6. Объем треугольной пирамиды, образованной векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, равен $\frac{1}{6}\left|(\vec{a},\vec{b},\vec{c})\right|$

7.Если $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, $\vec{c} = (x_3, y_3, z_3)$, то $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$

8. $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c} = \vec{c}\vec{b}\vec{a}$ - смешанное произведение меняет знак на противоположный при перемене мест любых двух векторов-сомножителей

9. Если $\vec{a}\vec{b}\vec{c} > 0$, то $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ - правая тройка

Пример. Доказать, что точки A(5; 7; 2), B(3; 1; -1), C(9; 4; -4), D(1; 5; 0) лежат в одной плоскости.

Найдем координаты векторов: $\overrightarrow{AB} = (-2;-6;1)$, $\overrightarrow{AC} = (4;-3;-2)$, $\overrightarrow{AD} = (-4;-2;2)$

Найдем смешанное произведение полученных векторов:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} -2 & -6 & 1 \\ 4 & -3 & -2 \\ -4 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -6 & 1 \\ 0 & -15 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -6 & 1 \\ 0 & -15 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

Таким образом, полученные выше векторы компланарны, следовательно точки A, B, C и D лежат в одной плоскости.

Пример. Найти объем пирамиды и длину высоты, опущенной на грань BCD, если вершины имеют координаты A(0; 0; 1), B(2; 3; 5), C(6; 2; 3), D(3; 7; 2).

Найдем координаты векторов: $\overrightarrow{BA} = (-2;-3;-4)$, $\overrightarrow{BD} = (1;4;-3)$, $\overrightarrow{BC} = (4;-1;-2)$

Объем пирамиды $$V = \frac{1}{6} = \begin{vmatrix} -2 & -3 & -4 \\ 1 & 4 & -3 \\ 4 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}(-2(-8-3)+3(-2+12)-4(-1-16)) =$$

$$= \frac{1}{6}(22+30+68) = 20(ед^3)$$

Для нахождения длины высоты пирамиды найдем сначала площадь основания BCD.

$$\overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \bar{j} & \vec{k} \\ 1 & 4 & -3 \\ 4 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i}(-8-3) - \vec{j}(-2+12) + \vec{k}(-1-16) = -11\vec{i} - 10\vec{j} - 17\vec{k}.$$

$$\left|\overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{11^2 + 10^2 + 17^2} = \sqrt{121+100+289} = \sqrt{510}$$

$S_{осн} = \sqrt{510}/2$ (ед^2)

Т.к. V = $\frac{S_{осн} \cdot h}{3}$; $\quad h = \frac{3V}{S_{осн}} = \frac{120}{\sqrt{510}} = \frac{4\sqrt{510}}{17}$.(ед)

Задания практической работы

Задания

1. По координатам точек A, B и C для указанных векторов найти:

   a) Координаты векторов $a = AB, b = BC, \; c = AC, \; d = BA, \; p = CA$
   b) Модуль вектора $\vec{\kappa} = 3\vec{a} + \vec{в} - \vec{\mathrm{d}}$
   c) Скалярное произведение векторов **a** и **b**;
   d) Проекцию вектора **c** на вектор **d**;
   e) Координаты точки M, делящей отрезок **p** в отношении $\alpha : \beta$

Варианты	Координаты точки A	Координаты точки B	Координаты точки C	α α	β β
1.	(-2, 1,3)	(3, -6, 2)	(-5, -3, -1)	*1*	*3*
2.	(1, 3, 6)	(-3, 4, -5)	(1, -7, 2)	*1*	*2*
3.	(7, 2, 1)	(5, 1, -2)	(-3, 4, 5)	*2*	*1*
4.	(3, 5, 4)	(-2, 7, -5)	(6, -2, 1)	*3*	*2*
5.	(5, 3, 2)	(2, -5, 1)	(-7, 4, -3)	*2*	*3*
6.	(11, 1, 2)	(-3, 3, 4)	(-4, -2, 7)	*1*	*2*
7.	(9, 5, 3)	(-3, 2, 1)	(4, -7, 4)	*3*	*1*
8.	(7, 2, 1)	(3, -5, 6)	(-4, 3, -4)	*3*	*2*
9.	(1, 2, 3)	(-5, 3, -1)	(-6, 4, 5)	*2*	*1*
10.	(-2, 5, 1)	(3, 2, -7)	(4, -3, 2)	*4*	*1*
11.	(3, 1, 2)	(-4, 3, -1)	(2, 3, 4)	*2*	*1*
12.	(3, -1, 2)	(-2, 4, 1)	(4, -5, - 1)	*1*	*3*
13.	(4, 5, 1)	(1, 3, 1)	(-3, -6, 7)	*3*	*4*
14.	(1, -3, 1)	(-2, -4, 3)	(0, -2, 3)	*2*	*3*
15.	(5, 7, -2)	(-3, 1, 3)	(1, -4, 6)	*4*	*3*
16.	(-l, 4, 3)	(3, 2, -4)	(-2, -7, 1)	*1*	*3*
17.	(5, 4, 1)	(-3, 5, 2)	(2, -1, 3)	*3*	*1*
18.	(2, -1, 4)	(-3, 0, -2)	(4, 5, -3)	*2*	*1*
19.	(-1, 1, 2)	(2, -3, -5)	(-6, 3, -1)	*1*	*2*
20.	(1, 3, 4)	(-2, 5, 0)	(3, -2, -4)	*2*	*3*
21.	(1, -1, 1)	(-5, -3, 1)	(2, -1, 0)	*3*	*2*
22.	(3, 1, 2)	(-7, -2, -4)	(-4, 0, 3)	*2*	*1*
23.	(-3, 0, 1)	(2, 7, -3)	(-4, 3, 5)	*1*	*3*
24.	(5, 1, 2)	(-2, 1, -3)	(4, -3, 5)	*2*	*3*
25.	(0, 2, -3)	(4, -3, -2)	(-5, -4, 0)	*1*	*2*
26.	(3, -1, 2)	(-2, 3, 1)	(4, -5, -3)	*3*	*4*
27.	(5, 3, 1)	(-1, 2, -3)	(3, -4, 2)	*1*	*2*
28.	(3, 1, -3)	(-2, 4, 1)	(1, -2, 5)	*3*	*4*
29.	(6, 1, -3)	(-3, 2, 1)	(-1, -3, 4)	*4*	*3*
30.	(4, 2, 3)	(-3, 1, -8)	(2, -4, 5)	*3*	*2*

Задание 2

1. Даны векторы **a**, **b** и **c.** Необходимо:

а) вычислить смешанное произведение трех векторов;

б) найти модуль векторного произведения;

в) вычислить скалярное произведение двух векторов;

г) проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны два вектора;

д) проверить, будут ли компланарны три вектора.

Вариа нт	Векторы	Смешанно е произведе	Модул ь вектор	Скаляр ное произве	Коллин е арны или	Компланарн ость векторов

		ние	н произв ед.	д	перпен д.к вектор ов	
1	$a = 2i - 3j + k,$ $b = j + 4k,$ $c = 5i + 2j - 3k$	$a, 3b, c$	$3a, 2c$	$b, -4c$	a, c	$a, 2b, 3c$
2	$a = 3i + 4j + k,$ $b = i - 2j + 7k,$ $c = -3i - 6j + 21k$	$5a, 2b, c$	$4b, 2c$	a, c	b, c	$2a, -3b, c$
3	$a = 2i - 4j - 2k,$ $b = 7i + 3j,$ $c = 3i + 5j - 7k$	$a, 2b, 3c$	$3a, -7в$	$-2a, c$	a, c	$3a, 2b, 3c$
4	$a = -7i + 2k,$ $b = 2i - 6j + 4k,$ $c = i - j + 2k$	$a, -2b, -7c$	$4b, 3c$	$2a, -7c$	b, c	$2a, 4b, 3c$
5	$a = -4i + 2j - k,$ $b = 3i + 5j - 2k,$ $c = j + 5k$	$a, 6b, 3c$	$a, 2b$	$a, -4c$	a, b	$a, 6b, 3c$
6	$a = 3i - 2j + k,$ $b = 2j - 3k,$ $c = -3i + 2j - k$	$a, -3b, 2c$	$5a, 3c$	$-2a, 4b$	a, c	$5a, 4b, 3c$
7	$a = i - j + 3k,$ $b = 2i + 3j - 5k,$ $c = 7i + 2j + 4k$	$7a, -4b, 2c$	$3a, 5c$	$2b, 4c$	b, c	$7a, 2b, 5c$
8	$a = 4i + 2j - 3k,$ $b = 2i + k,$ $c = -12i - 6j + 9k$	$2a, 3b, c$	$4a, 3b$	$b, -4c$	a, c	$2a, 3b, -4c$

9	$a=-i+5k$, $b=-3i+2j+2k$, $c=-2i-4j+k$	$3a,-4b,2c$	$7a,-3c$	$2b,3a$	$в,c$	$7a,2b,-3c$
10	$a=6i-4j+6k$, $b=9i-6j+9k$, $c=i-8k$	$2a,-4b,3c$	$3b,-9c$	$3a,-5c$	a,b	$3a,-4b,-9c$
11	$a=5i-3j+4k$, $b=2i-4j-2k$, $c=3i+5j-7k$	$a,-4b,2c$	$-2b,4c$	$-3a,6c$	b,c	$a,-2b,6c$
12	$a=-4i+3j-7k$, $b=4i+6j-2k$, $c=6i+9j-3k$	$-2a,b,-2c$	$4b,7c$	$5a,-3b$	b,c	$-2a,4b,7c$
13	$a=-5i+2j-2k$, $b=7i-5k$, $c=2i+3j-2k$	$2a,4b,-5c$	$-3b,11c$	$8a,-6c$	$a,\ c$	$8a,-3b,11c$
14	$a=-4i-6j+2k$, $b=2i+3j-k$, $c=-i+5j-3k$	$5a,7b,2c$	$-4b,11a$	$3a,-7c$	a,b	$3a,7b,-2c$
15	$a=-4i+2j-3k$, $b=-3j+5k$, $c=6i+6j-4k$	$5a,-b,3c$	$-7a,4c$	$3a,9b$	$a,\ c$	$3a,-9b,4c$
16	$a=-3i+8j$, $b=2i+3j-2k$, $c=8i+12j-8k$	$4a,-6b,5c$	$-7a,9c$	$3b,-8c$	b,c	$4a,-6b,9c$
17	$a=2i-4j-2k$, $b=-9i+2k$, $c=3i+5j-7k$	$7a,5b,-c$	$-5a,4b$	$3b,-8c$	$a,\ c$	$7a,5b,-c$

18	$a=9i-3j+k$, $b=3i-15j+21k$, $c=i-5j+k$	$2a,-7b,3c$	$-6a,4c$	$5b,7a$	b,c	$2a,-7b,4c$
19	$a=-2i+4j-3k$, $b=5i+j-2k$, $c=7i+4j-k$	$a,-6b,2c$	$-8b,5c$	$-9a,7c$	a,b	$a,-6b,5c$
20	$a=-9i+4j-5k$, $b=i-2j+4k$, $c=-5i+10j-20k$	$-2a,7b,5c$	$-6b,7c$	$9a,4c$	b,c	$-2a,7b,4c$
21	$a=2i-7j+5k$, $b=-i+3j-6k$, $c=3i+2j-4k$	$-3a,6b,-c$	$5b,3c$	$7a,-4b$	b,c	$7a,-4b,3c$
22	$a=7i-4j-5k$, $b=i-11j+3k$, $c=5i+5j+3k$	$3a,-7b,2c$	$2b,6c$	$-4a,-5c$	a,c	$-4a,2b,6c$
23	$a=4i-6j-2k$, $b=-2i+3j+k$, $c=3i-5j+7k$	$6a,3b,8c$	$-7b,6a$	$-5a,4c$	a,b	$-5a,3b,4c$
24	$a=3i-j+2k$, $b=-i+5j-4k$, $c=6i-2j+4k$	$4a,-7b,-2c$	$6a,-4c$	$-2a,5b$	a,c	$6a,-7b,-2c$
25	$a=-3i-j-5k$, $b=2i-4j+8k$, $c=3i+7j-k$	$2a,-b,3c$	$-9a,4c$	$5b,-6c$	b,c	$2a,5b,-6c$
26	$a=-3i+2j+7k$, $b=i-5k$, $c=6i+4j-k$	$-2a,b,7c$	$5a,-2c$	$3b,c$	a,c	$-2a,3b,7c$

27	$a = 3i - j + 5k,$ $b = 2i - 4j + 6k,$ $c = i - 2j + 3k$	$-3a, 4b, -5c$	$6b, 3c$	$a, 4c$	b, c	$-3a, 4b, -5c$
28	$a = 4i - 5j - 4k,$ $b = 5i - j,$ $c = 2i + 4j - 3k$	$a, 7b, -2c$	$-5a, 4b$	$8c, -3a$	$a,\ c$	$-3a, 4b, 8c$
29	$a = -9i + 4k,$ $b = 2i - 4j + 6k,$ $c = 3i - 6j + 9k$	$3a, -5b, -4c$	$6b, 2c$	$-2a, 8c$	b, c	$3a, 6b, -4c$
30	$a = 5i - 6j - k,$ $b = 4i + 8j - 7k,$ $c = 3j - 4k$	$5a, 3b, -4c$	$4b, a$	$7a, -2c$	a, b	$5a, 4b, -2c$

Ответы

Вариант	Координаты вершины А	Координаты вершины В	Координаты вершины С	Координаты вершины Д	Грань а)	Ответ а)	Ответ б)
1	A(3, 4, 5)	B(1, 2, 1)	C(-2, -3, 6)	D(3, -6, -3)	ACD	$\sqrt{2114}$	42
2	A(-7, -5, 6)	B(-2, 5, -3)	C(3, -2, 4)	D(l, 2, 2)	BCD	$\sqrt{1350}$	82/3
3	A(1, 3, 1)	B(-1, 4, 6)	C(-2, -3, 4)	D(3, 4, -4)	ACD	$\frac{\sqrt{891}}{2}$	3
4	A(2, 4, 1)	B(-3, -2, 4)	C(3, 5, -2)	D(4, 2, -3)	ABD	$\sqrt{395}$	25/3

5	A(-5, -3, -4)	B(1, 4, 6)	C(3, 2, -2)	D(8, -2, 4)	ACD	$\frac{\sqrt{6137}}{2}$	304/3
6	A(3, 4, 2)	B(-2, 3, -5)	C(4, -3, 6)	D(6, -5, 3)	ABD	$8\sqrt{26}$	40
7	A(-4, 6, 3)	B(3, -5, 1)	C(2, 6, -4)	D(2, 4, -5)	ACD	$\sqrt{94}$	70/3
8	A(7, 5, 8)	B(-4, -5, 3)	C(2, -3, 5)	D(5, 1, -4)	BCD	$5\sqrt{46}$	202/3
9	A(3, -2, 6)	B(-6, -2, 3)	C(1, 1, -4)	D(4, 6, -7)	ABD	$\sqrt{4050}$	52
10	A(-5, -4, -3)	B(7, 3, -1)	C(6, -2, 0)	D(3, 2, -7)	BCD	$\frac{\sqrt{1422}}{2}$	42
11	A(3, -5, -2)	B(-4, 2, 3)	C(1, 5, 7)	D(-2,-4, 5)	ACD	$\frac{\sqrt{6986}}{2}$	202/3
12	A(7, 4, 9)	B(1, -2, -3)	C(-5, -3, 0)	D(1, -3, 4)	ABD	$3\sqrt{131}$	50
4	A(-4, -7, -3)	B(-4, -5, 7)	C(2, -3, 3)	D(3, 2, 1)	BCD	$2\sqrt{69}$	148/3
14	A(-4, -5, -3)	B(3, 1, 2)	C(5, 7, -6)	D(6, -1, 5)	ACD	$3\sqrt{809}$	110
15	A(5, 2, 4)	B(-3, 5, -7)	C(1, -5, 8)	D(9, -3, 5)	ABD	$2\sqrt{299}$	286/3
16	A(-6, 4, 5)	B(5, -7, 3)	C(4, 2, -8)	D(2, 8, -3)	ACD	$10\sqrt{117}$	150
17	A(5, 3, 6)	B(-3, -4, 4)	C(5, -6, 8)	D(4, 0, -3)	BCD	$\sqrt{2294}$	332/3
18	A(5, -4, 4)	B(-4, -6, 5)	C(3, 2, -7)	D(6, 2, -9)	ABD	$6\sqrt{115}$	82/3
19	A(-7, -6, -5)	B(5, 1, -3)	C(8, -4, 0)	D(3, 4, -7)	BCD	$\frac{\sqrt{158}}{2}$	86/3

18	A(5, -4, 4)	B(-4, -6, 5)	C(3, 2, -7)	D(6, 2, -9)	ABD	$6\sqrt{115}$	82/3
19	A(-7, -6, -5)	B(5, 1, -3)	C(8, -4, 0)	D(3, 4, -7)	BCD	$\frac{\sqrt{158}}{2}$	86/3
20	A(7, -1, -2)	B(1, 7, 8)	C(3, 7, 9)	D(-3, -5, 2)	ACD	$\sqrt{5957}$	124/3
21	A(5, 2, 7)	B(7, -6, -9)	C(-7, -6, 3)	D(l, -5, 2)	ABD	$\sqrt{3194}$	76
22	A(-2, -5, -1)	B(-6, -7, 9)	C(4, -5, 1)	D(2, 1, 4)	BCD	$\sqrt{1802}$	226/3
23	A(-6, -3, -5)	B(5, 1, 7)	C(3, 5, -1)	D(4, -2, 9)	ACD	$\frac{\sqrt{24101}}{2}$	4/3
24	A(7, 4, 2)	B(-5, 3, -9)	C(1, -5, 3)	D(7, -9, 1)	ABD	$\sqrt{11161}$	186
25	A(-8, 2, 7)	B(3, -5, 9)	C(2, 4, -6)	D(4, 6, -5)	ACD	$2\sqrt{146}$	296/3
26	A(4, 3, 1)	B(2, 7, 5)	C(-4, -2, 4)	D(2, -3, -5)	ACD	$7\sqrt{34}$	80/3
27	A(-9, -7, 4)	B(-4, 3, -1)	C(5, -4, 2)	D(3, 4, 4)	BCD	$\sqrt{1346}$	120
28	A(3, 5, 3)	B(-3, 2, 8)	C(-3, -2, 6)	D(7, 8, -2)	ACD	$5\sqrt{11}$	26/3
29	A(4, 2, 3)	B(-5, -4, 2)	C(5, 7, -4)	D(6, 4, -7)	ABD	$\sqrt{3086}$	178/3
30	A(-4, -2, -3)	B(2, 5, 7)	C(6, 3, -1)	D(6, -4, 1)	ACD	$\frac{\sqrt{6641}}{2}$	116

Ответы

Вариант	а) Смешанное произведение	б) Модуль векторн произвед.	в) Скалярное произвед	**Вариант**	а) Смешанное произведение	б) Модуль векторн произвед.	в) Скалярное произвед
1.	-261	$\sqrt{19116}$	40	**16.**	0	$252\sqrt{917}$	-1632
2.	0	0	6	**17.**	-10430	$\sqrt{40389}$	984
3.	-1840	$\sqrt{612108}$	0	**18.**	0	$\sqrt{3365604}$	3255
4.	0	0	42	**19.**	1068	$\sqrt{478400}$	-315
5.	-2538	$\sqrt{3192}$	12	**20.**	0	$\sqrt{52611300}$	6660
6.	0	0	56	**21.**	2196	$\sqrt{126900}$	1288
7.	-4480	$\sqrt{78750}$	0	**22.**	28728	$\sqrt{870912}$	0
8.	0	$\sqrt{17280}$	60	**23.**	0	0	-560
9.	-1680	$\sqrt{219177}$	78	**24.**	0	0	160
10.	0	$\sqrt{6488829}$	630	**25.**	0	$\sqrt{2519424}$	900
11.	-464	$\sqrt{127488}$	504	**26.**	0	$10\sqrt{2997}$	33
12.	0	0	-240	**27.**	0	0	80
13.	4360	$33\sqrt{682}$	0	**28.**	2114	$20\sqrt{857}$	0

14.	0	0	682	**29.**	0	0	-144
15.	-1170	$56\sqrt{638}$	567	**30.**	11940	$4\sqrt{9933}$	28

Контрольные вопросы

1. Что называется вектором?
2. Какие векторы называются коллинеарными?
3. Что называется координатами вектора?
4. Как найти координаты вектора, заданного двумя точками?
5. Как найти длину вектора, заданного своими координатами?
6. Запишите формулы деления отрезка в данном отношении.
7. Как найти скалярное произведение векторов?
8. Как найти векторное произведение векторов?
9. Как найти смешанное произведение векторов?

Практическая работа № 4 «Прямая линия»

Цель: научиться составлять уравнение прямых, находить угол между прямыми,выполнять построения.

Время выполнения 90 минут

Материальное обеспечение
1.Теоретические сведения
2.Задание
3.Лист А 4
4.Калькуляторы

Порядок выполнения работы
1.Изучить задание
2. Изучить теоретические сведения
3. Выполнить и оформить работу
4.Показать результаты преподавателю

Домашнее задание
1.Подготовить ответы на контрольные вопросы

Ход работы

Теоретические сведения

Уравнение прямой на плоскости.

Определение. Любая прямая на плоскости может быть задана уравнением первого порядка $Ax + By + C = 0$, причем постоянные А, В не равны нулю одновременно, т.е. $A^2 + B^2 \neq 0$. Это уравнение первого порядка называют **общим уравнением прямой.**

В зависимости от значений постоянных А,В и С возможны следующие частные случаи:

- $C = 0$, $A \neq 0$, $B \neq 0$ – прямая проходит через начало координат

- $A = 0, B \neq 0, C \neq 0$ { $By + C = 0$}- прямая параллельна оси Ох
- $B = 0, A \neq 0, C \neq 0$ { $Ax + C = 0$} – прямая параллельна оси Оу
- $B = C = 0, A \neq 0$ – прямая совпадает с осью Оу
- $A = C = 0, B \neq 0$ – прямая совпадает с осью Ох

Уравнение прямой может быть представлено в различном виде в зависимости от каких – либо заданных начальных условий.

Уравнение прямой по точке и вектору нормали.

Определение. В декартовой прямоугольной системе координат вектор с компонентами (А, В) перпендикулярен прямой , заданной уравнением $Ax + By + C = 0$.

Пример. Найти уравнение прямой, проходящей через точку А(1, 2) перпендикулярно вектору $\vec{n}(3, -1)$.

Составим при А = 3 и В = -1 уравнение прямой: $3x – y + C = 0$. Для нахождения коэффициента С подставим в полученное выражение координаты заданной точки А.

Получаем: $3 – 2 + C = 0$, следовательно С = -1.

Итого: искомое уравнение: $3x – y – 1 = 0$.

Уравнение прямой, проходящей через две точки.

Пусть на плоскости заданы две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, тогда уравнение прямой, проходящей через эти точки:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

Если какой- либо из знаменателей равен нулю, следует приравнять нулю соответствующий числитель.

Записанное выше уравнение прямой упрощается:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

если $x_1 \neq x_2$ и $x = x_1$, если$x_1 = x_2$.

Дробь $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ = k называется **угловым коэффициентом** прямой.

Пример. Найти уравнение прямой, проходящей через точки А(1, 2) и В(3, 4).

Применяя записанную выше формулу, получаем:

$$y - 2 = \frac{4 - 2}{3 - 1}(x - 1)$$

$$y - 2 = x - 1$$

$$x - y + 1 = 0$$

Уравнение прямой по точке и угловому коэффициенту.

Если общее уравнение прямой Ах + Ву + С = 0 привести к виду:

$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$ и обозначить $-\frac{A}{B} = k; \quad -\frac{C}{B} = b; \quad т.е. \quad y = kx + b$, то полученное

уравнение называется **уравнением прямой с угловым коэффициентом**

Уравнение прямой по точке и направляющему вектору.

По аналогии с пунктом, рассматривающим уравнение прямой через вектор нормали можно ввести задание прямой через точку и направляющий вектор прямой.

Определение. Каждый ненулевой вектор $\vec{a}$ (α_1, α_2), компоненты которого удовлетворяют условию Аα_1 + Вα_2 = 0 называется направляющим вектором прямой Ах + Ву + С = 0.

Пример. Найти уравнение прямой с направляющим вектором $\vec{a}$ (1, -1) и проходящей через точку А(1, 2).

Уравнение искомой прямой будем искать в виде: Ax + By + C = 0. В соответствии с определением, коэффициенты должны удовлетворять условиям: 1·A + (-1)·B = 0, т.е. А = В.

Тогда уравнение прямой имеет вид: Ax + Ay + C = 0, или x + y + C/A = 0.

при х = 1, у = 2 получаем С/A = -3, т.е. искомое уравнение:

$$x + y - 3 = 0$$

Уравнение прямой в отрезках

Если в общем уравнении прямой Ах + Ву + С = 0 С $\neq$ 0, то, разделив на –С, получим: $-\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y = 1$ или

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \text{ где}$$

$$a = -\frac{C}{A}; \quad b = -\frac{C}{B}$$

Геометрический смысл коэффициентов в том, что коэффициент *а* является координатой точки пересечения прямой с осью Ох, а *b* – координатой точки пересечения прямой с осью Оу.

Пример. Задано общее уравнение прямой х – у + 1 = 0. Найти уравнение этой прямой в отрезках.

C = 1, $-\frac{x}{1}+\frac{y}{1}=1$, a = -1, b = 1.

Нормальное уравнение прямой.

Если обе части уравнения Ax + By + C = 0 разделить на число $\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$, которое называется **нормирующем множителем**, то получим

xcosφ + ysinφ - p = 0 – нормальное уравнение прямой.

Знак ± нормирующего множителя надо выбирать так, чтобы μ·С < 0.
р – длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую, а φ - угол, образованный этим перпендикуляром с положительным направлением оси Ох.

Пример. Дано общее уравнение прямой 12х – 5у – 65 = 0. Требуется написать различные типы уравнений этой прямой.

уравнение этой прямой в отрезках: $\frac{12}{65}x-\frac{5}{65}y=1$

$$\frac{x}{(65/12)}+\frac{y}{(-13)}=1$$

уравнение этой прямой с угловым коэффициентом: (делим на 5)

$$y=\frac{12}{5}x-\frac{65}{5}=\frac{12}{5}x-13.$$

нормальное уравнение прямой:

$\mu=\frac{1}{\sqrt{12^2+(-5)^2}}=\frac{1}{13}$ $\frac{12}{13}x-\frac{5}{13}y-5=0$; cosφ = 12/13; sinφ = -5/13; p = 5.

Следует отметить, что не каждую прямую можно представить уравнением в отрезках, например, прямые, параллельные осям или проходящие через начало координат.

Пример. Прямая отсекает на координатных осях равные положительные отрезки. Составить уравнение прямой, если площадь треугольника, образованного этими отрезками равна 8 см^2.

Уравнение прямой имеет вид: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, a = b = 1; ab/2 = 8; a = 4; -4.

a = -4 не подходит по условию задачи.

Итого: $\frac{x}{4}+\frac{y}{4}=1$ или х + у – 4 = 0.

Пример. Составить уравнение прямой, проходящей через точку А(-2, -3) и начало координат.

Уравнение прямой имеет вид: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$, где $x_1 =$ $y_1 = 0$; $x_2 = -2$; $y_2 = -3$.

$\frac{x-0}{-2-0}=\frac{y-0}{-3-0}$; $\quad \frac{x}{-2}=\frac{y}{-3}$; $\quad 3x-2y=0.$

Угол между прямыми на плоскости.

Определение. Если заданы две прямые $y = k_1x + b_1$, $y = k_2x + b_2$, то острый угол между этими прямыми будет определяться как

$$tg\alpha=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|.$$

Две прямые параллельны, если $k_1 = k_2$.

Две прямые перпендикулярны, если $k_1 = -1/k_2$.

Теорема. *Прямые $Ax + By + C = 0$ и $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ параллельны, когда пропорциональны коэффициенты $A_1 = \lambda A$, $B_1 = \lambda B$. Если еще и $C_1 = \lambda C$, то прямые совпадают.*

Координаты точки пересечения двух прямых находятся как решение системы двух уравнений.

Уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данной прямой.

Определение. Прямая, проходящая через точку $M_1(x_1, y_1)$ и перпендикулярная к прямой $y = kx + b$ представляется уравнением:

$$y-y_1=-\frac{1}{k}(x-x_1)$$

Расстояние от точки до прямой.

Если задана точка $M(x_0, y_0)$, то расстояние до прямой $Ax + By + C =0$ определяется как $d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

Пример. Определить угол между прямыми: $y = -3x + 7$; $y = 2x + 1$.

$K_1 = -3$; $k_2 = 2$ $\qquad tg\varphi = \left|\frac{2-(-3)}{1-(-3)2}\right|=1$; $\varphi = \pi/4$.

Пример. Показать, что прямые $3x - 5y + 7 = 0$ и $10x + 6y - 3 = 0$ перпендикулярны.

Находим: $k_1 = 3/5$, $k_2 = -5/3$, $k_1k_2 = -1$, следовательно, прямые перпендикулярны.

Пример. Даны вершины треугольника A(0; 1), B(6; 5), C(12; -1). Найти уравнение высоты, проведенной из вершины С.

Находим уравнение стороны АВ: $\frac{x-0}{6-0}=\frac{y-1}{5-1}$; $\frac{x}{6}=\frac{y-1}{4}$; 4x = 6y – 6;

2x – 3y + 3 = 0; $y=\frac{2}{3}x+1.$

Искомое уравнение высоты имеет вид: Ax + By + C = 0 или y = kx + b.

k = $-\frac{3}{2}$. Тогда y = $-\frac{3}{2}x+b$. Т.к. высота проходит через точку С, то ее

координаты удовлетворяют данному уравнению: $-1=-\frac{3}{2}12+b,$ откуда b = 17.

Итого: $y=-\frac{3}{2}x+17$.

Ответ: 3x + 2y – 34 = 0.

Задания к практической работе

1. Даны вершины треугольника ABC: $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ **Найти:**

а) уравнение стороны AB;

б) уравнение высоты CH;

в) уравнение медианы AM;

г) уравнение биссектрисы BC;

д) точку N пересечения медианы AM и высоты CH;

е) уравнение прямой, проходящей через вершину С параллельно стороне AB;

ж)угол между прямыми AB и AC.

Варианты	$A(x_1, y_1)$	$B(x_2, y_2)$	$C(x_3, y_3)$
1	A (-2, 4)	B (3, 1)	C (10, 7)
2	A (-3, -2)	B (14, 4)	C (6, 8)
3	A (1, 7)	B (-3, -1)	C (11, -3)
4	A (1, 0)	B (-1, 4)	C (9, 5)

5	A (1, -2)	B (7, 1)	C (3, 7)
6	A (-2, -3)	B (1, 6)	C (6, 1)
7	A (-4, 2)	B (-6, 6)	C (6, 2)
8	A (4, -3)	B (7, 3)	C (1, 10)
9	A (4, -4),	B (8, 2)	C (3, 8)
10	A (-3, -3)	B (5, -7)	C (7, 7)
11	A (1, -6)	B (3, 4)	C (-3, 3)
12	A (-4, 2)	B (8, -6)	C (2, 6)
13	A (-5, 2)	B (0, -4)	C (5, 7)
14	A (4, -4)	B (6, 2)	C (-1, 8)
15	A (-3, 8)	B (-6, 2)	C (0,-5)
16	A (6, -9)	B (10, -1)	C (-4, 1)
17	A (4, 1)	B (-3, -1)	C (7, -3)
18	A (-4, 2)	B (6, -4)	C (4, 10)
19	A (3, -1)	B (11, 3)	C (-6, 2)
20	A (-7, -2)	B (-7, 4)	C (5, -5)
21	A (-1, -4)	B (9, 6)	C (-5, 4)
22	A (10, -2)	B (4, -5)	C (-3, 1)
23	A (-3, -1)	B (-4, -5)	C (8, 1)
24	A (-2, -6)	B (-3, 5)	C (4, 0)
25	A (-7, -2)	B (3, -8)	C (-4, 6)

26	A (0, 2)	B (-7, -4)	C (3, 2)
27	A (7, 0)	B (1, 4)	C (-8, -4)
28	A (1, -3)	B (0, 7)	C (-2, 4)
29	A (-5, 1)	B (8, -2)	C (1, 4)
30	A (2, 5)	B (-3, 1)	C (0, 4)

Контрольные вопросы

1. Запишите уравнения осей координат.
2. Общее уравнение прямой.
3. Условие параллельности и перпендикулярности прямых.
4. Запишите уравнения прямых, параллельных осям координат.
5. Сформулируйте условие параллельности прямых.
6. Сформулируйте условие перпендикулярности прямых.
7. Как найти угол между прямыми?
8. Как найти расстояние между прямыми?

Дополнительные задания

2. Решить следующие задачи

2.1. Найти уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых 3x - 2y - 7 = 0 и x + 3y - 6 = 0 и отсекающей на оси абсцисс отрезок, равный 3. $Ответ: x = 3$

2.2. Найти проекцию точки A(-8, 12) на прямую, проходящую через точки B(2, -3) и

C(-5,1). $Ответ: A_1(-12, 5)$

2.3. Даны две вершины треугольника ABC: A(-4, 4), B(4, -12) и точка M(4, 2) пересечения его высот. Найти вершину C. $Ответ: C(8, 4)$

2.4.Найти уравнение прямой, отсекающей на оси ординат отрезок, равный 2, и проходящей параллельно прямой 2y - x = 3. $Ответ: x - 2y + 4 = 0$

2.5. Найти уравнение прямой, проходящей через точку A(2, -3) и точку пересечения прямых 2x - y = 5 и x + y = 1. $Ответ: x = 2$

2.6. Доказать, что четырехугольник ABCD - трапеция, если A(3, 6), B(5, 2), C(-1, -3), D(5,5).

2.7. Записать уравнение прямой, проходящей через точку A(3, 1) перпендикулярно к прямой BC, если B(2, 5), C(1, 0). $Ответ: x+5y-8=0$

2.8. Найти уравнение прямой, проходящей через точку A(-2, 1) параллельно прямой MN, если M(-3, -2), N(1, 6). $Ответ: 2x-y+5=0$

2.9. Найти точку, симметричную точке M(2, -1) относительно прямой x - 2y + 3 = 0. $Ответ: M_1\left(-\frac{4}{5};\frac{23}{5}\right)$

2.10. Найти точку O пересечения диагоналей четырехугольника ABCD, если A(-1, -3), B(3, 5), C(5,2), D(3, -5). $Ответ: MO\left(3;\frac{1}{3}\right)$

2.11. Через точку пересечения прямых 6x - 4y + 5 = 0, 2x+ 5y + 8 = 0 провести прямую, параллельную оси абсцисс. $Ответ: y=-1$

2.12. Известны уравнения стороны AB треугольника ABC 4x + y = 12, его высот BH 5x - 4y = 12 и AMx + y = 6. Найти уравнения двух других сторон треугольника ABC. $Ответ: 7x-7y-16=0;\ 4x+5y-28=0$

2.13. Даны две вершины треугольника ABC: A(-6, 2), B(2, -2) и точка пересечения его высот H(1,2). Найти координаты точки M пересечения стороны AC и высоты BH. $Ответ: M\left(\frac{10}{17};\frac{62}{17}\right)$

2.14. Найти уравнения высот треугольника ABC, проходящих через вершины A и B, если A(-4, 2), B(3, -5), C(5, 0).
$Ответ: 7x+5y+2=0;\ 9x+2y-28=0$

2.15. Вычислить координаты точки пересечения перпендикуляров, проведенных через середины сторон треугольника, вершинами которого служат точки A(2, 3), B(0, -3), C(6,3). $Ответ: M\left(3;-\frac{2}{3}\right)$

2.16. Составить уравнение высоты, проведенной через вершину A треугольника ABC, зная уравнения его сторон: AB - 2x - y - 3 = 0, AC -x + 5y - 7 = 0, BC - 3x - 2y + 13 = 0. $Ответ: 2x+3y-7=0;$

2.17. Дан треугольник с вершинами A(3, 1), B(-3, -1) и C(5, -12). Найти уравнение и вычислить длину его медианы, проведенной из вершины C.
$Ответ: 2x + y + 2 = 0;\quad d = \frac{54}{\sqrt{17}} \approx 13{,}1$

2.18. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку пересечения прямых 2x + 5y - 8 = 0 и 2x + 3y + 4 = 0.
$Ответ: 6x + 11y = 0;$

2.19. Найти уравнения перпендикуляров к прямой 3x + 5y - 15 = 0, проведенных через точки пересечения данной прямой с осями координат.
$Ответ: 5x - 3y - 25 = 0;\quad 5x + 3y + 9 = 0;$

2.20. Даны уравнения сторон четырехугольника: x - y = 0, x + 3y = 0, x - y - 4 = 0, 3x + y - 12 = 0. Найти уравнения его диагоналей. $Ответ: y = 0;\ x = 3$

2.21. Составить уравнения медианы CM и высоты CK треугольника ABC, если A(4, 6), B(-4, 0), C(-1, -4).
$Ответ: 7x - y + 3 = 0 - CM;\quad 4x + 3y + 16 = 0 - CK$

2.22. Через точку P(5, 2) провести прямую: а) отсекающую равные отрезки на осях координат; б) параллельную оси Ox; в) параллельную оси Oy. $Ответ: x + y - 7 = 0;\ y = 2;\ x = 5$

2.23. Записать уравнение прямой, проходящей через точку A(-2, 3) и составляющей с осью Ox угол: а) 45°, б) 90°, в) 0°.
$Ответ: x - y + 5 = 0 - CM;\quad x + 2 = 0;\ y - 3 = 0$

2.24. Какую ординату имеет точка C, лежащая на одной прямой с точками A(- 6, -6) и B(3, -1) и имеющая абсциссу, равную 3? $Ответ: y = 9$

2.25. Через точку пересечения прямых 2x - 5y - 1 = 0 и x + 4y - 7 = 0 провести прямую, делящую отрезок между точками A(4, -3) и B(-1, 2) в отношении = 2 / 3. $Ответ: 2x - y - 5 = 0;$

2.26. Известны уравнения двух сторон ромба 2x -5y - 1 = 0 и 2x - 5y - 34 = 0 и уравнение одной из его диагоналей x + 3y - 6 = 0. Найти уравнение второй диагонали. $Ответ: 3x - y - 23 = 0;$

2.27. Найти точку E пересечения медиан треугольника, вершинами которого являются точки A(3,1), B(7, 5) и C(5, -3). $Ответ: E(3;1)$

2.28. Записать уравнения прямых, проходящих через точку A(-1, 1) под углом 45° к прямой 2x + 3y = 6. $Ответ: x-5y+6=0;\ \ 5x+y+4=0$

2.29. Даны уравнения высот треугольника ABC 2x - 3y + 1 = 0, x + 2y + 1 = 0 и координаты его вершины A(2, 3). Найти уравнения сторон AB и AC треугольника. $Ответ: 2x-y-1=0-AB;\ \ 3x+2y-12=0-AC$

2.30. Даны уравнения двух сторон параллелограмма x - 2y = 0, x - y - 1 = 0 и точка пересечения его диагоналей M(3, -1). Найти уравнения двух других сторон. $Ответ: x-y-7=0;\ \ x-2y-10=0$

Практическая работа № 5 по теме

«Кривые второго порядка»

Цель: Проверить уровень усвоения материала по составлению уравнений кривых второго порядка (окружности, эллипса, параболы, гиперболы .

Время выполнения 90 минут

Материальное обеспечение
1.Теоретические сведения
2.Задание
3.Лист А 4
4.Калькуляторы
Порядок выполнения работы
1.Изучить задание
2. Изучить теоретические сведения
3. Выполнить и оформить работу
4.Показать результаты преподавателю
Домашнее задание
1.Подготовить ответы на контрольные вопросы
Ход работы

Теоретические сведения

Кривая второго порядка может быть задана уравнением

$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$

Существует система координат (не обязательно декартова прямоугольная), в которой данное уравнение может быть представлено в одном из видов, приведенных ниже.

1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ - уравнение эллипса.

2) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$ - уравнение “мнимого” эллипса.

3) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ - уравнение гиперболы.

4) $a^2x^2 - c^2y^2 = 0$ – уравнение двух пересекающихся прямых.

5) $y^2 = 2px$ – уравнение параболы.

6) $y^2 - a^2 = 0$ – уравнение двух параллельных прямых.

7) $y^2 + a^2 = 0$ – уравнение двух “мнимых” параллельных прямых.

8) $y^2 = 0$ – пара совпадающих прямых.

9) $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ – уравнение окружности.

Окружность.

Определение. *Окружностью* называется множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки (*центра*).

В окружности $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ (1) центр имеет координаты (a; b).

Пример. Найти координаты центра и радиус окружности, если ее уравнение задано в виде:

$$2x^2 + 2y^2 - 8x + 5y - 4 = 0.$$

Для нахождения координат центра и радиуса окружности данное уравнение необходимо привести к виду (1)Для этого выделим полные квадраты:

$$x^2 + y^2 - 4x + 2,5y - 2 = 0$$

$$x^2 - 4x + 4 - 4 + y^2 + 2,5y + 25/16 - 25/16 - 2 = 0$$

$$(x - 2)^2 + (y + 5/4)^2 - 25/16 - 6 = 0$$

$$(x - 2)^2 + (y + 5/4)^2 = 121/16$$

Отсюда находим O(2; -5/4); R = 11/4.

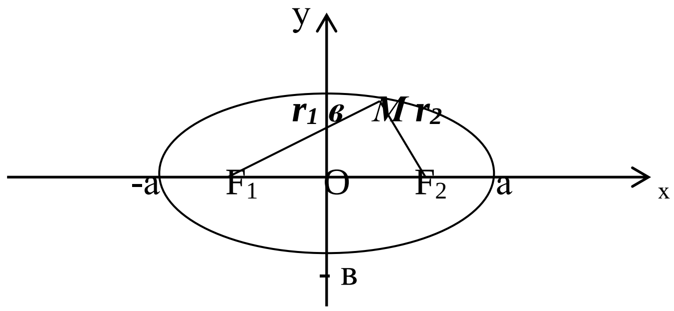
Эллипс

Определение. *Эллипсом* называется множество точек плоскости, сумма расстояний которых до двух данных точек, называемых *фокусами*, есть величина постоянная, равная 2a.

Уравнение эллипса имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Определение. Фокусами называются такие две точки, сумма расстояний от которых до любой точки эллипса есть постоянная величина.



F_1, F_2 – фокусы. $F_1 = (c; 0)$; $F_2(-c; 0)$

c – половина расстояния между фокусами;

a – большая полуось;

b – малая полуось.

Фокусное расстояние и полуоси эллипса связаны соотношением $a^2 = b^2 + c^2$.

Доказательство: В случае, если точка М находится на пересечении эллипса с вертикальной осью, $r_1 + r_2 = 2\sqrt{b^2 + c^2}$ (по теореме Пифагора). В случае, если точка М находится на пересечении эллипса с горизонтальной осью, $r_1 + r_2 = a - c + a + c$. Т.к. по определению сумма $r_1 + r_2$ – постоянная величина, то , приравнивая, получаем:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$r_1 + r_2 = 2a.$$

Определение. Форма эллипса определяется характеристикой, которая является отношением фокусного расстояния к большей оси и называется **эксцентриситетом**.

$e = c/a$. Т.к. $c < a$, то $e < 1$.

Пример. Составить уравнение прямой, проходящей через левый фокус и нижнюю вершину эллипса, заданного уравнением: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$

1) Координаты нижней вершины: $x = 0$; $y^2 = 16$; $y = -4$.
2) Координаты левого фокуса: $c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 16 = 9$; $c = 3$; $F_2(-3; 0)$.

3) Уравнение прямой, проходящей через две точки:

$$\frac{x-0}{-3-0}=\frac{y+4}{0+4}; \qquad \frac{x}{-3}=\frac{y+4}{4}; \qquad 4x=-3y-12; \qquad 4x+3y+12=0$$

Пример. Составить уравнение эллипса, если его фокусы $F_1(0; 0)$, $F_2(1; 1)$, большая ось равна 2.

Уравнение эллипса имеет вид: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Расстояние между фокусами:

$2c = \sqrt{(1-0)^2+(1-0)^2}=\sqrt{2}$, таким образом, $a^2 - b^2 = c^2 = ½$

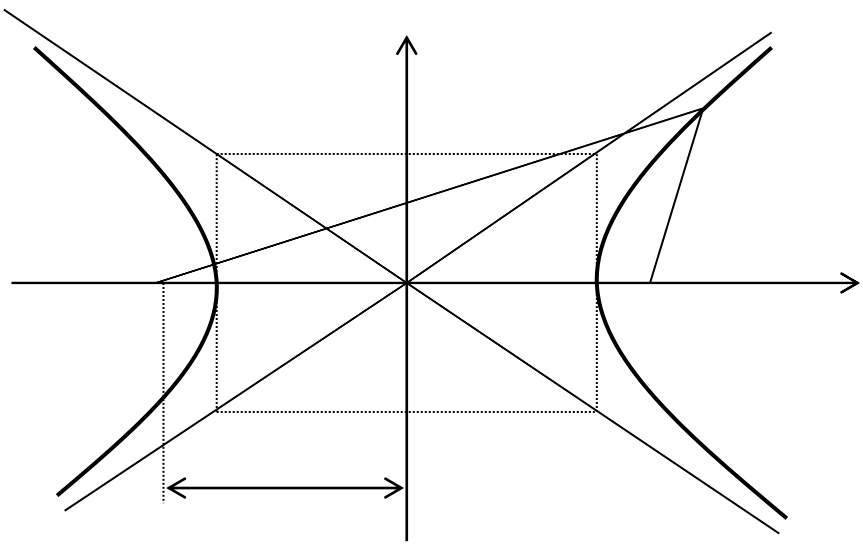
по условию $2a = 2$, следовательно $a = 1$, $b = \sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{1-1/2}=\sqrt{2}/2$.

Итого: $\frac{x^2}{1^2}+\frac{y^2}{1/2}=1$.

Гипербола.

Определение. Гиперболой называется множество точек плоскости, для которых модуль разности расстояний от двух данных точек, называемых **фокусами** есть величина постоянная, равная 2а, меньшая расстояния между фокусами.

По определению $|r_1 - r_2| = 2a$. F_1, F_2 – фокусы гиперболы. $F_1F_2 = 2c$.



$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ **каноническое уравнение гиперболы.**

Гипербола симметрична относительно середины отрезка, соединяющего фокусы и относительно осей координат.

Ось 2a называется действительной осью гиперболы.

Ось 2b называется мнимой осью гиперболы.

2c – фокусное расстояние

Фокусное расстояние и полуоси гиперболы связаны соотношением

$c^2 = a^2 + b^2$.

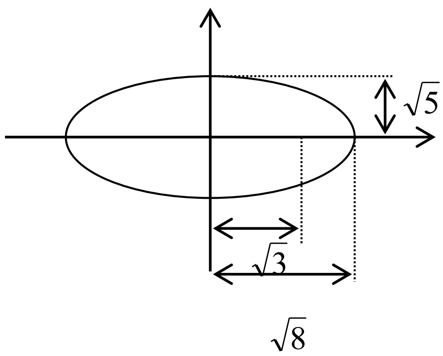
Гипербола имеет две асимптоты, уравнения которых $y = \pm\frac{b}{a}x.$

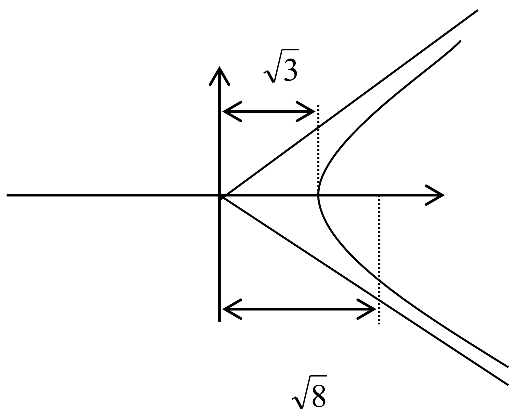
Отношение $e = \frac{c}{a} > 1$ называется **эксцентриситетом** гиперболы, где c – половина расстояния между фокусами, a – действительная полуось.

Пример. Найти уравнение гиперболы, вершины и фокусы которой находятся в соответствующих вершинах и фокусах эллипса $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{5} = 1$.

Для эллипса: $c^2 = a^2 – b^2$.

Для гиперболы: $c^2 = a^2 + b^2$.





Уравнение гиперболы: $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{5} = 1$.

Пример. Составить уравнение гиперболы, если ее эксцентриситет равен 2, а фокусы совпадают с фокусами эллипса с уравнением $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$

Находим фокусное расстояние $c^2 = 25 – 9 = 16$.

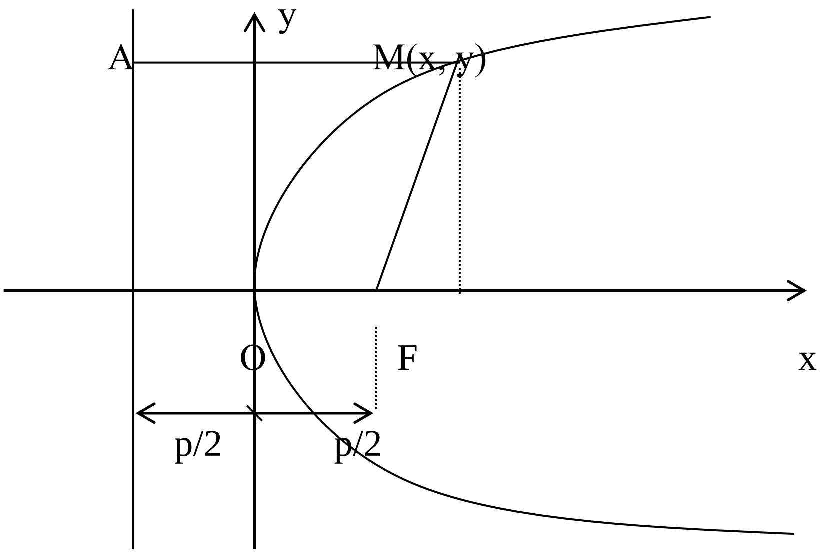
Для гиперболы: $c^2 = a^2 + b^2 = 16$, $e = c/a = 2$; $c = 2a$; $c^2 = 4a^2$; $a^2 = 4$;
$b^2 = 16 – 4 = 12$.

Итого: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ - искомое уравнение гиперболы.

Парабола.

Параболой называется множество точек плоскости, каждая из которых находится на одинаковом расстоянии от данной точки, называемой фокусом, и от данной прямой, называемой директрисой и не проходящей через фокус.

Расположим начало координат посередине между фокусом и директрисой.



Величина p (расстояние от фокуса до директрисы) называется **параметром** параболы. Выведем каноническое уравнение параболы.

Из геометрических соотношений: AM = MF; AM = x + p/2;

$$MF^2 = y^2 + (x – p/2)^2$$

$$(x + p/2)^2 = y^2 + (x – p/2)^2$$

$$x^2 + xp + p^2/4 = y^2 + x^2 – xp + p^2/4$$

$$\mathbf{y^2 = 2px}$$

Уравнение директрисы: $x = -p/2$.

Пример. На параболе $y^2 = 8x$ найти точку, расстояние которой от директрисы равно 4.

Из уравнения параболы получаем, что p = 4.

$r = x + p/2 = 4$; следовательно:

$x = 2$; $y^2 = 16$; $y = \pm 4$. Искомые точки: $M_1(2; 4)$, $M_2(2; -4)$.

Пример. Дана парабола $y^2 = 6x$. Составить уравнение ее директрисы и найти ее фокус.

Сравнивая данное уравнение с каноническим уравнением параболы, видим, что 2p=6, p = 3. Так как уравнение директрисы имеет уравнение $x = -\frac{p}{2}$, а фокус – координаты $\frac{p}{2}$ и 0, то для рассматриваемого случая получим уравнение директрисы $x = -\frac{3}{2}$ и фокус $F\left(\frac{3}{2}; 0\right)$.

Ответ: $x = -\frac{3}{2}$, $F\left(\frac{3}{2}; 0\right)$.

Задания практической работы

1. Составить канонические уравнения:

а) эллипса; б) гиперболы; в) параболы (A, B - точки, лежащие на кривой, F - фокус, a - большая (действительная) полуось, b - малая (мнимая) полуось, ε - эксцентриситет, $y=\pm kx$ - уравнения асимптот гиперболы, D - директриса кривой, 2c - фокусное расстояние).

Вариант	Эллипс	Гипербола	Парабола
1.	b = 15, F(-10, 0)	a =13, ε = 14/13	D: x = - 4
2.	b = 2, F($4\sqrt{2}$, 0)	a = 7, ε = $\sqrt{85}/7$	D: x = 5
3.	A(3, 0), B(2, $\sqrt{5}/3$)	k = 3/4, ε = 5/4	D: y = - 2
4.	ε = $\sqrt{21}/5$, A(-5, 0)	A($\sqrt{80}$, 3), B($4\sqrt{6}$, $3\sqrt{2}$)	D: y = 1
5.	2a = 22, ε = $\sqrt{57}/11$	k = 2/3, 2c = $10\sqrt{13}$	ось симметрии Ox и A(27, 9).
6.	b = $\sqrt{15}$, ε = $\sqrt{10}/25$	k = 3/4, 2a = 16	ось симметрии Ox и A(4, -8).
7.	a = 4, F = (3, 0)	b = $2\sqrt{10}$, F(-11, 0)	D: x = -2

8.	b = 4, F = (9, 0)	a = 5, ε = 7/5	D: x = 6
9.	A(0, $\sqrt{3}$), B($\sqrt{14/3}$,1)	k = $\sqrt{21}/10$, ε = 11/10	D: y = -4
10.	ε = 7/8, A(8,0)	A(3, $-\sqrt{3/5}$), B($\sqrt{13/5}$,6)	D: y = 4
11.	2a = 24, ε = $\sqrt{22}/6$	k = $\sqrt{2/3}$, 2c =10	ось симметрии Ox и A(-7, -7).
12.	b = 2, ε = $5\sqrt{29}/29$	k =12/13, 2a = 26	ось симметрии Ox и A(-5, 15).
13.	a = 6, F(-4, 0)	b = 3, F(7, 0)	D: x = -7
14	b = 7, F(5, 0)	a = 11, ε = 12/11	D: x = 10.
15.	A($-\sqrt{17/3}$, 1/3), B($\sqrt{21}/2$, 1/2);	k =1/2, ε = $\sqrt{5}/2$	D: y = -1
16.	ε = 3/5, A(0, 8)	A($\sqrt{6}$, 0), B($-2\sqrt{2}$, l)	D: y = 9
17.	2a = 22, ε = 10/11	k = $\sqrt{11}/5$, 2c=12	ось симметрии Ox и A(-7, 5).
18.	b = 5, ε = 12/13	k = 1/3, 2a = 6	ось симметрии Oy и A(-9, 6).
19.	a = 9, F(7, 0)	b = 6, F(12, 0)	D: x = -1/4
20.	b = 5, F(-10, 0)	a = 9, ε = 4/3	D: x = 12
21.	A(0, -2), B($\sqrt{15}/2$, 1)	k = $2\sqrt{10}/9$, ε =11/9	D: y = 5

22.	$\varepsilon = 2/3$, A(-6, 0)	A($\sqrt{8}$, 0), B($\sqrt{20}/3$, 2)	D: y = 1
23.	2a = 50, $\varepsilon = 3/5$	k = $\sqrt{29}/14$, 2c = 30	ось симметрии Oy и A(4, 1).
24.	b = $2\sqrt{15}$, $\varepsilon = 7/8$	k = 5/6, 2a = 12	ось симметрии Oy и A(-2, $3\sqrt{2}$).
25.	a =13, F(-5, 0)	b = 44, F(-7, 0)	D: x = -3/8
26.	b = 7, F(13, 0)	b = 4, F(-11, 0)	D: x = 13
27.	A(-3, 0), B(1, $\sqrt{40}/3$)	k = $\sqrt{2/3}$, $\varepsilon = \sqrt{15}/3$	D: y = 4
28.	$\varepsilon = 5/6$, A(0, $\sqrt{11}$)	A($\sqrt{32/3}$, 1), B($\sqrt{8}$, 0)	D: y = -3
29.	2a = 30, $\varepsilon = 17/15$	k = $\sqrt{17}/8$, 2c =18	ось симметрии Oy и A(4, -10)
30	b = $2\sqrt{2}$, $\varepsilon = 7/9$	k = $\sqrt{2}/2$, 2a = 12	ось симметрии Oy и A(-45, 15).

2. Записать уравнение окружности, проходящей через указанные точки и имеющей центр в точке А.

2.1. Вершины гиперболы $12x^2 - 13y^2 = 156$, A(0, -2).

2.2. Вершины гиперболы $4x^2 – 9y^2 = 36$, A(0, 4).

2.3. Фокусы гиперболы $24y^2 – 25x^2 = 600$, A(0, -8).

2.4. O(0, 0), A - вершина параболы $y^2 = 3(x - 4)$.

2.5. Фокусы эллипса $9x^2 + 25y^2 = 1$, A(0, 6).

2.6. Левый фокус гиперболы $3x^2 – 4y^2 = 12$, A(0, -3).

2.7. Фокусы эллипса $3x^2 + 4y^2 = 12$, A - его верхняя вершина.

2.8. Вершину гиперболы $x^2 - 16y^2 = 64$, A(0, -2).

2.9. Фокусы гиперболы $4x^2 - 5y^2 = 80$, A(0, -4).

2.10. O(0, 0), A - вершина параболы $y^2 = -(x+5)/2$.

2.11. Правый фокус эллипса $33x^2 + 49y^2 = 1617$, A(1, 7).

2.12. Левый фокус гиперболы $3x^2 - 5y^2 = 30$, A(0, 6).

2.13. Фокусы эллипса $16x^2 - 41y^2 = 656$, A - его нижняя вершина.

2.14. Вершину гиперболы $2x^2 - 9y^2 = 18$, A(0, 4).

2.15. Фокусы гиперболы $5x^2 - 11y^2 = 55$, A(0, 5).

2.16. B(1, 4), A - вершина параболы $y^2 = (x - 4)/3$.

2.17. Левый фокус эллипса $3x^2 + 7y^2 = 21$, A(-1, -3).

2.18. Левую вершину гиперболы $5x^2 – 9y^2 = 45$, A(0, -6).

2.19. Фокусы эллипса $24x^2 – 25y^2 = 600$, A - его верхняя вершина.

2.20. Правую вершину гиперболы $3x^2 - 16y^2 - 48$, A(1, 3).

2.21. Левый фокус гиперболы $7x^2 - 9y^2 = 63$, A(-1, -2).

2.22. B(2, -5), A - вершина параболы $x^2 = -2(y + 1)$.

2.23. Правый фокус эллипса $x^2 + 4y^2 = 12$, A(2, -7).

2.24. Правую вершину гиперболы $40x^2 - 81y^2 = 3240$, A(-2, 5).

2.25. Фокусы эллипса $x^2 + 10y^2 = 90$, A - его нижняя вершина.

2.26. Правую вершину гиперболы $3x^2 - 25y^2 = 75$, A(-5, -2).

2.27. Фокусы гиперболы $4x^2 - 5y^2 = 20$, A(0, -6).

2.28. B(3, 4), A - вершина параболы $y^2 = (x + 7)/4$.

2.29. Левый фокус эллипса $13x^2 + 49y^2 = 837$, A(1, 8).

2.30. Правый фокус гиперболы $57x^2 - 64y^2 = 3648$, A(2, 8).

Контрольные вопросы

1. Запишите каноническое уравнение эллипса.
2. Запишите каноническое уравнение гиперболы.

3. Запишите каноническое уравнение параболы.
4. Что называется эксцетриситетом эллипса?
5. Запишите уравнения асимптот гиперболы.

Практическая работа № 6 по теме

« Предел функции. Непрерывность функции. Точки разрыва»

Цель: Проверить умения и навыки студентов в вычислении пределов, раскрытия неопределенностей.

Время выполнения 90 минут

Материальное обеспечение

1.Теоретические сведения
2.Задание
3.Лист А 4
4.Калькуляторы

Порядок выполнения работы

1.Изучить задание
2. Изучить теоретические сведения
3. Выполнить и оформить работу
4.Показать результаты преподавателю

Домашнее задание

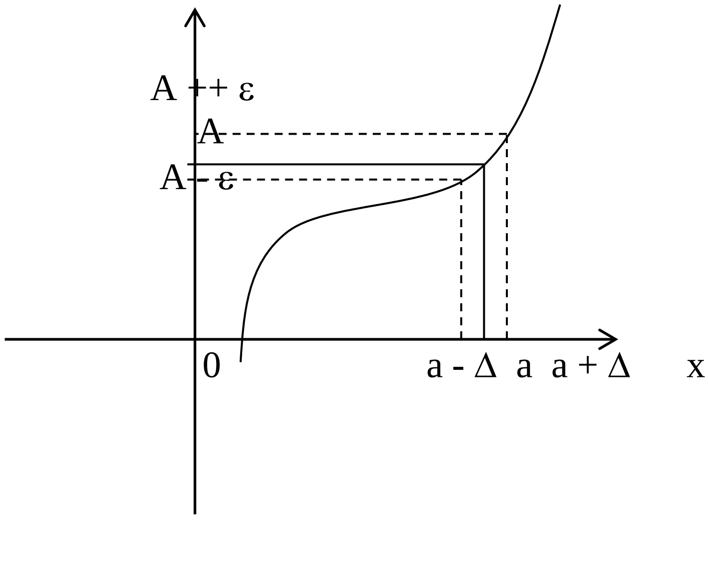
1.Подготовить ответы на контрольные вопросы

Ход работы

Теоретические положения

Переменная и предел – это основные понятия математического анализа. Достаточно напомнить, что ключевым словом в определениях таких известных со школы понятий как производная и интеграл является слово предел.

Предел функции в точке.



Пусть функция f(x) определена в некоторой окрестности точки x = a (т.е. в самой точке x = a функция может быть и не определена)

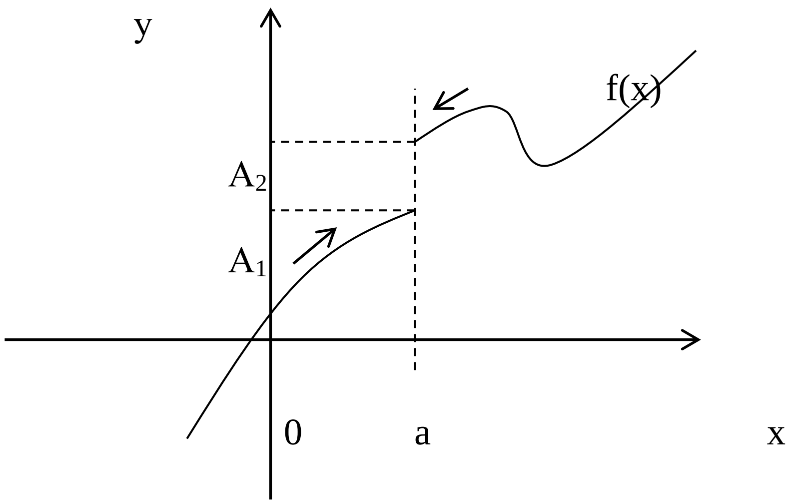
Определение. Число А называется **пределом** функции f(x) при $x \to a$, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое число $\Delta>0$, что для всех х таких, что $0 < |x - a| < \Delta$ верно неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

То же определение может быть записано в другом виде:

Если $a - \Delta < x < a + \Delta$, $x \neq a$, то верно неравенство $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$.

Запись предела функции в точке: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$

Определение. Если $f(x) \to A_1$ при $x \to a$ только при $x < a$, то $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = A_1$ - называется **пределом** функции f(x) в точке x = a **слева**, а если $f(x) \to A_2$ при $x \to a$ только при $x > a$, то $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = A_2$ называется **пределом** функции f(x) в точке x = a **справа**.



Приведенное выше определение относится к случаю, когда функция f(x) не определена в самой точке x = a, но определена в некоторой сколь угодно малой окрестности этой точки.

Пределы A_1 и A_2 называются также **односторонними пределами** функции f(x) в точке x = a. Также говорят, что А – **конечный предел** функции f(x).

Предел функции при стремлении аргумента к бесконечности.

Определение. Число А называется **пределом** функции f(x) при $x\to\infty$, если для любого числа $\varepsilon>0$ существует такое число $M>0$, что для всех х, $|x|>M$ выполняется неравенство

$$\left|A - f(x)\right| < \varepsilon$$

При этом предполагается, что функция f(x) определена в окрестности бесконечности.

Записывают: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A.$

Аналогично можно определить пределы $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$ для любого x>M и

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$ для любого x<M.

Основные теоремы о пределах.

Теорема 1. $\lim\limits_{x\to a} C = C$, где C = const.

Следующие теоремы справедливы при предположении, что функции f(x) и g(x) имеют конечные пределы при x$\to$a.

Теорема 2. $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$

Теорема 3. $\lim\limits_{x\to a}[f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$

Следствие. $\lim\limits_{x\to a} C \cdot f(x) = C \cdot \lim\limits_{x\to a} f(x)$

Теорема 4. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ при $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$

Теорема 5. *Если f(x)>0 вблизи точки x = a и* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$*, то A>0.*

Аналогично определяется знак предела при f(x) < 0, f(x) ≥ 0, f(x) ≤ 0.

Теорема 6. *Если g(x) ≤ f(x) ≤ u(x) вблизи точки x = a и* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} u(x) = A$*, то и* $\lim\limits_{x\to a} = A$.

Определение. Функция f(x) называется **ограниченной** вблизи точки x = a, если существует такое число M>0, что $|f(x)|$<M вблизи точки x = a.

Теорема 7. *Если функция f(x) имеет конечный предел при x$\to$a, то она ограничена вблизи точки x = a.*

Бесконечно малые функции.

Определение. Функция f(x) называется **бесконечно малой** при x$\to$a, где a может быть числом или одной из величин ∞, +∞ или -∞, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.

Свойства бесконечно малых функций:

1) Сумма фиксированного числа бесконечно малых функций при $x \to a$ тоже бесконечно малая функция при $x \to a$.
2) Произведение фиксированного числа бесконечно малых функций при $x \to a$ тоже бесконечно малая функция при $x \to a$.
3) Произведение бесконечно малой функции на функцию, ограниченную вблизи точки $x = a$ является бесконечно малой функцией при $x \to a$.
4) Частное от деления бесконечно малой функции на функцию, предел которой не равен нулю есть величина бесконечно малая.

Бесконечно большие функции и их связь с бесконечно малыми.

Определение. Функция называется **бесконечно большой** при $x \to a$, где а – число или одна из величин ∞, $+\infty$ или $-\infty$, если $\lim_{x \to a} f(x) = A$, где А – число или одна из величин ∞, $+\infty$ или $-\infty$.

Связь бесконечно больших и бесконечно малых функций осуществляется в соответствии со следующей теоремой.

Теорема. *Если $f(x) \to 0$ при $x \to a$ (если $x \to \infty$) и не обращается в ноль, то*

$$y = \frac{1}{f(x)} \to \infty$$

Пример. Найти предел $\lim_{x \to 0} \frac{tg5x}{\sin 7x}$

Так как $tg5x \sim 5x$ и $\sin 7x \sim 7x$ при $x \to 0$, то, заменив функции эквивалентными бесконечно малыми, получим:

$$\lim_{x \to 0} \frac{tg5x}{\sin 7x} = \lim_{x \to 0} \frac{5x}{7x} = \frac{5}{7}$$

Пример. Найти предел $\lim_{x \to 0} \frac{x^3}{1 - \cos x}$.

Так как $1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2} \sim 2\left(\frac{x}{2}\right)^2$ при $x \to 0$, то $\lim_{x \to 0} \frac{x^3}{1 - \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{x^3}{\frac{x^2}{2}} = \lim_{x \to 0} 2x = 0$.

Пример. Найти предел $\lim_{x \to 0} \frac{tgx}{\sin x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x^2} = \infty$.

Если α и β - бесконечно малые при $x \to a$, причем β - бесконечно малая более высокого порядка, чем α, то $\gamma = \alpha + \beta$ - бесконечно малая, эквивалентная α. Это можно доказать следующим равенством $\lim_{x \to a} \frac{\gamma}{\alpha} = \lim_{x \to a}\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right) = 1$.

Тогда говорят, что α - **главная часть** бесконечно малой функции γ.

Пример. Функция $x^2 + x$ – бесконечно малая при $x \to 0$, x – главная часть этой функции. Чтобы показать это, запишем $\alpha = x^2$, $\beta = x$, тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x} = 0, \quad \lim_{x\to 0}\frac{x^2 + x}{x} = \lim_{x\to 0}(x+1) = 1.$$

Некоторые замечательные пределы.

Первый замечательный предел. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$,

$Q(x) = b_0x^m + b_1x_{m-1} + \ldots + b_m$ - многочлены.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^n(a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_n}{x^n})}{x^m(b_0 + \frac{b_1}{x} + \ldots. + \frac{b_m}{x^m})} = x^{n-m}\,\frac{a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_n}{x^n}}{b_0 + \frac{b_1}{x} + \ldots + \frac{b_m}{x^m}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_n}{x^n}}{b_0 + \frac{b_1}{x} + \ldots + \frac{b_m}{x^m}} = \frac{a_0}{b_0}$$

Итого: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} 0, & при \quad n < m \\ \dfrac{a_0}{b_0}, & при \quad n = m \\ \infty, & при \quad n > m \end{cases}$

Второй замечательный предел. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$

Третий замечательный предел. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$

Часто если непосредственное нахождение предела какой – либо функции представляется сложным, то можно путем преобразования функции свести задачу к нахождению замечательных пределов.

Кроме трех, изложенных выше, пределов можно записать следующие полезные на практике соотношения:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1; \qquad \lim_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x} = \ln a; \qquad \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^m - 1}{x} = m.$$

Пример. Найти предел.

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgmx}{\sin nx} = \lim_{x\to 0}\frac{mx}{nx} = \frac{m}{n}$$

Пример. Найти предел.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{tgx-tgx_0}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\sin(x-x_0)}{(x-x_0)\cos x\cos x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\sin(x-x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\cos x\cos x_0}=1\cdot\frac{1}{\cos^2 x_0}=\frac{1}{\cos^2 x_0}$$

Пример. Найти предел.

$$\lim_{x\to\pi/4}\frac{\sin x-\cos x}{\pi-4x}=\lim_{x\to\pi/4}\frac{-\frac{2}{\sqrt{2}}\sin(\pi/4-x)}{\pi-4x}=\lim_{x\to\pi/4}\frac{-\sin(\pi/4-x)}{2\sqrt{2}(\pi/4-x)}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Пример. Найти предел.

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{\cos x}{\pi-2x}=\begin{Bmatrix} y=\pi/2-x \\ x=\pi/2-y \\ \pi-2x=\pi-\pi+2y \end{Bmatrix}=\lim_{y\to 0}\frac{\cos(\pi/2-y)}{2y}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=\frac{1}{2}$$

Пример. Найти предел.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+3}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1+4}{x-1}\right)^{x+3}=\begin{Bmatrix} y=x-1 \\ x\to\infty \\ y\to\infty \end{Bmatrix}=\lim_{y\to\infty}\left(\frac{y+4}{y}\right)^{y+4}=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{4}{y}\right)^{y}\cdot\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{4}{y}\right)^{4}=$$

$$=\left\{z=\frac{y}{4}\right\}=\lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{4z}=\left(\lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{z}\right)^{4}=e^4$$

Пример. Найти предел $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-6x+8}{x^2-8x+12}$.

Для нахождения этого предела разложим на множители числитель и знаменатель данной дроби.

$x^2 - 6x + 8 = 0;$ $\qquad$ $x^2 - 8x + 12 = 0;$

D = 36 – 32 = 4; $\qquad$ D = 64 – 48 = 16;

$x_1 = (6 + 2)/2 = 4;$ $\qquad$ $x_1 = (8 + 4)/2 = 6;$

$x_2 = (6 - 2)/2 = 2\ ;$ $\qquad$ $x_2 = (8 - 4)/2 = 2;$

Тогда $\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-4)}{(x-2)(x-6)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-4}{x-6}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

Пример. Найти предел. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}}{x^2-x}$ домножим числитель и знаменатель дроби на сопряженное выражение:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+x+x^2-1+x-x^2}{x(x-1)(\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2})}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x(x-1)(\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2})}=$$

$$= \frac{2}{-1\cdot(1+1)} = -1.$$

Пример. Найти предел.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-9} = \left\{x^2-5x+6=(x-2)(x-3)\right\} = \lim_{x\to 3}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \frac{3-2}{3+3} = \frac{1}{6}$$

Пример. Найти предел $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2-3x+2}$.

Разложим числитель и знаменатель на множители.

$$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$$

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x-2)(x-3), \text{ т.к.}$$

$$\begin{array}{l|l} x^3 - 6x^2 + 11x - 6 & \underline{x - 1} \\ \underline{x^3 - x^2} & x^2 - 5x + 6 \\ -5x^2 + 11x & \\ \underline{-5x^2 + 5x} & \\ \quad 6x - 6 & \\ \quad \underline{6x - 6} & \\ \qquad 0 & \end{array}$$

$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$

Тогда $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x-1)(x-2)} = -2$

Пример. Найти предел.

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(a+2h)-2\sin(a+h)+\sin a}{h^2} = \lim_{h\to 0}\frac{2\sin\frac{2a+2h}{2}\cos\frac{2h}{2}-2\sin(a+h)}{h^2} = \lim_{h\to 0}\frac{2\sin(a+h)(\cos h-1)}{h^2} =$$

$$= 2\lim_{h\to 0}\sin(a+h)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{-2\sin^2(h/2)}{4(h/2)^2} = 2\sin a\cdot(-1/2) = -\sin a$$

Задания практической работы

1.Найти указанные пределы.

1.1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$ *ответ*: $\dfrac{1}{8}$ 1.2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-x^2+2x}{x^2+x}$ *ответ*: 1

1.3. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{6+x-x^2}{x^3-27}$ *ответ*: $-\dfrac{5}{27}$ 1.4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x-1}{3x^2-x-2}$ *ответ*: $\dfrac{3}{5}$

1.5. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-7x+4}{x^2-5x+6}$ *ответ*: *нет решения*

1.6. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{12+x-x^2}{x^3-27}$ *ответ*: *нет решения*

1.7. $\lim\limits_{x\to 1/3}\dfrac{3x^2+2x-1}{27x^3-1}$ *ответ*: $\dfrac{4}{9}$

1.8. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-4x-5}{x^2-2x-3}$ *ответ*: $\dfrac{11}{4}$

1.9. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+2x-1}{-x^2+x+2}$ *ответ*: $-\dfrac{4}{3}$

1.10. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2-11x+6}{2x^2-5x-3}$ *ответ*: 1

1.11. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^2+x-6}$ *ответ*: $\dfrac{12}{5}$

1.12. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-2}{x^3+1}$ *ответ*: -1

1.13. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x^2+x-20}$ *ответ*: $\dfrac{8}{9}$

1.14. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{4x^2+11x-3}{x^2+2x-3}$ *ответ*: $\dfrac{13}{4}$

1.15. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2-7x-6}{2x^2-7x+3}$ *ответ*: $\dfrac{1}{5}$

1.16. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{4x^2+7x-2}{3x^2+8x+4}$ *ответ*: $\dfrac{9}{4}$

1.17. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{5x^2+4x-1}{3x^2+x-2}$ *ответ*: $\dfrac{6}{5}$

1.18. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-4x-5}{3x^2+2x-2}$ *ответ*: 0

1.19. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{7x^2+4x-3}{2x^2+3x+1}$ *ответ*: 1

1.20. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3x^2-3x+2}{x^2-x-12}$ *ответ*: *нет решения*

1.21. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-9x+10}{x^2+3x-10}$ *ответ*: $-\dfrac{1}{7}$

1.22. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x^2+x-5}{x^2-2x+1}$ *ответ*: *нет решения*

1.23. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{-5x^2+11x-2}{3x^2-x-10}$ *ответ*: $-\dfrac{9}{11}$

1.24. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2-5x-14}{2x^2-9x-35}$ *ответ*: $\dfrac{9}{19}$

1.25. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3x^2-6x-45}{2x^2-3x-35}$ *ответ*: $\dfrac{24}{17}$

1.26. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{4x^2+3x+15}{x^2-6x-27}$ *ответ*: *нет решения*

1.27. $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2-2x-35}{2x^2+11x+5}$ *ответ*: $\dfrac{4}{3}$

1.28. $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{2x^2+15x-8}{3x^2+25x+8}$ *ответ*: $\dfrac{17}{23}$

1.29. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3x^2-2x-40}{x^2-3x-4}$ *ответ*: $\dfrac{22}{5}$

1.30. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2+5x-3}{3x^2+10x+3}$ *ответ*: $\dfrac{7}{8}$

2. Найти указанные пределы

2.1. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2+11x+15}{3x^2+5x-12}$ *ответ*: $\dfrac{1}{13}$

2.2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+5x-10}{x^3-1}$ *ответ*: *нет решения*

2.3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^2-4x+3}$ *ответ*: 0

2.4. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2+2x+1}{x^3-8}$ *ответ*: *нет решения*

2.5. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^4-x^2+x+1}{x^4+1}$ *ответ*: 0

2.6. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-3x-1}{x^4-1}$ *ответ*: *нет решения*

2.7. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x+3}{5x^2+3x-3}$ *ответ*: $\dfrac{5}{23}$

2.8. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+2x}{x^2+4x+4}$ *ответ*: *нет решения*

2.9. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x^2+3x+2}$ *ответ*: -2

2.10. $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{2x^2+7x-4}{x^3+64}$ *ответ*: $-\dfrac{3}{16}$

2.11. $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{4x^2+19x-5}{2x^2+11x+5}$ *ответ*: $\dfrac{7}{3}$

2.12. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2+x-1}{x^3+x-2}$ *ответ*: $\dfrac{1}{2}$

2.13. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{2x^2-7x+5}$ *ответ*: 0

2.14. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{2x^2-9x+10}$ *ответ*: -12

2.15. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{9x^2+17x-2}{x^2+2x}$ *ответ*: $\dfrac{19}{2}$

2.16. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x-2}{x^3-x^2-x+1}$ *ответ*: *нет решения*

2.17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^3-2x^2+5x}{3x^2+7x}$ *ответ*: $\dfrac{5}{7}$

2.18. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x^4-5x^2+1}{x^2-1}$ *ответ*: 3

2.19. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2+5x-1}{x^2-5x+6}$ *ответ*: *нет решения*

2.20. $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2-x-30}{x^3+125}$ *ответ*: $-\dfrac{11}{75}$

2.21. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2+3x-28}{x^3-64}$ *ответ*: $\dfrac{11}{48}$

2.22. $\lim\limits_{x\to 1/2}\dfrac{8x^3-1}{x^2-1/4}$ *ответ*: 6

2.23. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2+3x-28}{x^2-4x}$ *ответ*: $\dfrac{11}{4}$

2.24. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x^2+11x+10}{x^2-5x+14}$ *ответ*: 0

2.25. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{3x^2+x-10}$ *ответ*: $\dfrac{4}{11}$

2.26. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2+x}{4x^2-5x+1}$ *ответ*: 0

2.27. $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{2x^2-11x-6}{3x^2-20x+12}$ *ответ*: $\dfrac{13}{16}$

2.28. $\lim\limits_{x\to -6}\dfrac{x^2+2x-24}{2x^3+15x+18}$ *ответ*: 0

2.29. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x-4}{x^2-11x+18}$ *ответ*: $-\dfrac{10}{7}$

2.30. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^3-64}{7x^2-27x-4}$ *ответ*: $\dfrac{48}{29}$

3. Найти указанные пределы

3.1. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^3-5x^2+2}{2x^3+5x^2-x}$

3.2. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{4x^3+7x}{2x^3-4x^2+5}$

3.3. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{5x^4-3x^2+7}{x^4+2x^3+1}$

3.4. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{7x^3-2x^2+4x}{2x^3+5}$

3.5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-4x^2+28x}{5x^3+3x^2+x-1}$

3.6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+10x+3}{2x^2+5x-3}$

3.7. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-3x^4+x^2+x}{x^4+3x-2}$

3.8. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+7x+3}{5x^2-3x+4}$

3.9. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x^2+3x+1}{3x^2+x-5}$

3.10. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-3x^2+10}{7x^3+2x+1}$

3.11. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+5x-7}{2x^2-x+10}$

3.12. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+2x+1}{x^4-x^3+2x}$

3.13. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2x+9}{2x^2-x+4}$

3.14. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5x-7}{3x^2+x+1}$

3.15. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+7x-2}{3x^3-x-4}$

3.16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{18x^2+5x}{8-3x-9x^2}$

3.17. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-6x^2+2}{x^4+4x-3}$

3.18. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^2+4x-5}{4x^2-3x+2}$

3.19. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^4-4x^2+3}{2x^4+1}$

3.20. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-4x+2}{6x^2+5x+1}$

3.21. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3+4x}{x^3-3x+2}$

3.22. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+4x-x^4}{x+3x^2+2x^4}$

3.23. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+7x^2-2}{6x^3-4x+3}$

3.24. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+14x^2}{1+2x+7x^2}$

3.25. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-2x^2+5x^4}{2+3x^2+x^4}$

3.26. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-2x^2-7}{3x^4+3x+5}$

3.27. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4-5x^2-3x^5}{x^5+6x+8}$

3.28. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3-7x^2+3}{2+2x-x^3}$

3.29. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-2x+1}{2x^3+3x^2+2}$

3.30. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-3x+1}{3x^2+x-5}$

4. Найти указанные пределы

4.1. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^5-2x+4}{2x^4+3x^2+1}$

4.2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+2x-5}{2x^2+x+7}$

4.3. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^2+7x-4}{x^5+2x-1}$

4.4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-x^6}{x^2-2x+5}$

4.5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+7x-1}{3x^4+2x+5}$ 4.6. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3+7x^2+4}{x^4+5x-1}$

4.7. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^6-5x^2+2}{2x^3+4x-5}$ 4.8. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^7+5x^2-4x}{3x^2+11x-7}$

4.9. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{7x^2+5x+9}{1+4x-x^3}$ 4.10. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+x^2-6}{2x^2+3x+1}$

4.11. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2+5x+7}{3x^4-2x^2+x}$ 4.12. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+4x^2-7x}{2x^2+7x-3}$

4.13. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x^3-3x^2+7}{2x^4+3x^2+1}$ 4.14. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-3x+1}{1+2x-x^4}$

4.15. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3+3x^2+5}{3x^2-4x+1}$ 4.16. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^2-5x+2}{4x^3+2x-1}$

4.17. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{11x^3+3x}{2x^2-2x+1}$ 4.18. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^2+3x+5}{4x^3-2x^2+1}$

4.19. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{6x^3+5x^2-3}{2x^2-x+7}$ 4.20. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+4x-7}{x^4-2x^3+1}$

4.21. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{8x^5-4x^3+3}{2x^3+x-7}$ 4.22. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-7x+1}{x^3+4x^2-3}$

4.23. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x^4-2x^3+3}{2x^2+3x-7}$ 4.24. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^3+x^2-7}{2x^2-5x+3}$

4.25. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^4+2x^2-8}{8x^3-4x+5}$ 4.26. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+2x-4}{3x^2-4x+1}$

4.27. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{7x^3-2x+4}{2x^2+x-5}$ 4.28. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+5x^2-3x}{3x^2+x-10}$

4.29. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2+10x-11}{3x^4-2x+5}$ 4.30. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3+3x-4}{2x^2-5x+1}$

5.Найти указанные пределы

5.1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+3x-5}{7x^3-2x^2+1}$ 5.2. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^2-7x+2}{x^4+2x-4}$

5.3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^4-3x+4}{3x^2-2x+1}$ 5.4. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2-x+7}{3x^4-5x^2+10}$

5.5. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x^3-2x^2+x}{3x^2-x}$ 5.6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-2x+1}{3x^2+2x-5}$

5.7. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-5x+2}{x^4+3x^2-9}$ 5.8. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x^2-4x+2}{4x^3+2x-5}$

5.9. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-3x^2+2x}{x^2+7x+1}$ 5.10. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^2-7x+5}{4x^5-3x^3+2}$

5.11. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^5+6x^4-x^3}{2x^2+6x+1}$ 5.12. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4-3x-2x^2}{3x^4+5x}$

5.13. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{7-3x^4}{2x^3+3x^2-5}$ 5.14. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^4+7x^3-3}{3x^2-5x+1}$

5.15. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x+7}{2-3x+4x^2}$ 5.16. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3-3x+1}{7x+5}$

5.17. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10x-7}{3x^4+2x^3+1}$ 5.18. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x^4-3x^2}{1+2x+3x^2}$

5.19. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x+3}{x^3-4x^2-x}$ 5.20. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^4+5x}{2x^2-3x-7}$

5.21. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-5x+3}{3x^4-2x^2+x}$ 5.22. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^5-x^3}{4x^2+3x-6}$

5.23. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+1}{x^3-5x^2+4x}$ 5.24. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2-x-3x^2}{x^3-16}$

5.25. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-10x+7}{2x^3-3x}$ 5.26. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3-3x+1}{x^5+4x^3}$

5.27. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-13}{x^7-3x^5-4x}$ 5.28. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2-3x+1}{x^3+2x^2+5}$

5.29. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-81}{3x^2+4x+2}$ 5.30. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{7x+4}{3x^3-5x+1}$

6. Найти указанные пределы

6.1. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2+x-12}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}$ *ответ*:7 6.2. $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{\sqrt{x+12}-\sqrt{4-x}}{x^2+2x-8}$ *ответ*:$-\dfrac{\sqrt{8}}{48}$

6.3. $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{\sqrt{x+10}-\sqrt{4-x}}{2x^2-x-21}$ *ответ*:$-\dfrac{\sqrt{7}}{91}$ 6.4. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x+6}}{x^2-x-6}$ *ответ*:$\dfrac{1}{10}$

6.5. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3+2x}-\sqrt{x+4}}{3x^2-4x+1}$ $ответ:\dfrac{\sqrt{5}}{20}$ 6.6. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x+1}}$ $ответ:-\sqrt{3}$

6.7. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+4x+1}{\sqrt{x+3}-\sqrt{5+3x}}$ $ответ:2\sqrt{2}$ 6.8. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^2-9x+4}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x-3}}$ $ответ:-7$

6.9. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+6}}{2x^2-7x-15}$ $ответ:\dfrac{\sqrt{11}}{286}$ 6.10. $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{\sqrt{3x+17}-\sqrt{2x+12}}{x^2+8x+15}$ $ответ:-\dfrac{\sqrt{2}}{8}$

6.11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1}-1}$ $ответ:2$ 6.12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{7-x}-\sqrt{7+x}}{\sqrt{7}x}$ $ответ:-\dfrac{1}{7}$

6.13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$ $ответ:3$ 6.14. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$ $ответ:\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

6.15. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{5+x}-2}{\sqrt{8-x}-3}$ $ответ:-\dfrac{3}{2}$ 6.16. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x+4}-3}{\sqrt{x-1}-2}$ $ответ:\dfrac{3}{2}$

6.17. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x-3}-2}{\sqrt{x+2}-3}$ $ответ:\dfrac{3}{2}$ 6.18. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{4x-3}-3}{x^2-9}$ $ответ:\dfrac{1}{9}$

6.19. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{5x+1}-4}{x^2+2x-15}$ $ответ:\dfrac{5}{64}$ 6.20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-\sqrt{x^2+4}}{3x^2}$ $ответ:-\dfrac{1}{12}$

6.21. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+16}-4}$ $ответ:2$ 6.22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}}$ $ответ:-3\sqrt{5}$

6.23. $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{2x+7}-5}{3-\sqrt{x}}$ $ответ:-\dfrac{6}{5}$ 6.24. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{6x+1}-5}$ $ответ:-\dfrac{25}{24}$

6.25. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{\sqrt{3x}-x}$ $ответ:-5$ 6.26. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x^2}-1}{x^3+x^2}$ $ответ:\dfrac{3}{2}$

6.27. $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{\sqrt{x+20}-4}{x^3+64}$ $ответ:\dfrac{1}{384}$ 6.28. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-2}{\sqrt{8+x}-3}$ $ответ:\dfrac{10}{\sqrt{10}-3}$

6.29. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{9+x}-3}{x^2+x}$ $ответ:\dfrac{1}{16}$ 6.30. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{4x+1}-3}{x^3-8}$ $ответ:\dfrac{1}{18}$

7.Найти указанные пределы

7.1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x+8}\right)^{-3x}$ Ответ: e^{12} 7.2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{2x-3}$ Ответ: e^{-12}

7.3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{1+2x}\right)^{-4x}$ Ответ: e^2 7.4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)^{2-3x}$ Ответ: e^{3}

7.5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+5}{2x+1}\right)^{5x}$ Ответ: e^{10} 7.6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x}\right)^{-5x}$ Ответ: e^{-15}

7.7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^{1+2x}$ Ответ: e^2 7.8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x-4}$ Ответ: e^{4}

7.9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{2x-3}\right)^{3x}$ Ответ: $e^{9/2}$ 7.10. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-7}{x}\right)^{2x+1}$ Ответ: e^{-14}

7.11. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+4}\right)^{3x+2}$ Ответ: e^{-15} 7.12. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{x+2}$ Ответ: e

7.13. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2x-3}$ Ответ: e^{-6} 7.18. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+5}{x}\right)^{3x+4}$ Ответ: e^{15}

7.19. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-7}{x+1}\right)^{4x-2}$ Ответ: e^{-32} 7.20. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x}\right)^{3-2x}$ Ответ: e^{-4}

7.21. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2-3x}{5-3x}\right)^{x}$ Ответ: e 7.22. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1-x}{2-x}\right)^{3x}$ Ответ: e^{3}

7.23. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x-1}{4x+1}\right)^{2x}$ Ответ: e^{-1} 7.24. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+4}{3x}\right)^{-2x}$ Ответ: $e^{-8/3}$

7.25. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+4}\right)^{-x}$ Ответ: $e^{5/2}$ 7.26. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+4}{3x+5}\right)^{x+1}$ Ответ: $e^{-1/3}$

7.27. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1+2x}{3+2x}\right)^{-x}$ Ответ: e 7.28. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x}{3x+2}\right)^{x-2}$ Ответ: $e^{-2/3}$

7.29. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x-1}\right)^{3-2x}$ Ответ: e^{-2} 7.30. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4-2x}{1-2x}\right)^{x+1}$ Ответ: $e^{-3/2}$

8. Найти указанные пределы

8.1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{5x+7}\right)^{x+1}$ Ответ: 0 8.2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^{x}$ Ответ: ∞

8.3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{2x-1}\right)^{3x}$ Ответ: 0 8.4. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2x-1}{4x+1}\right)^{3x-1}$ Ответ: 0

8.5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x+8}{x-2}\right)^{x+4}$ Ответ: ∞

8.6. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x+1}{3x-1}\right)^{2x+1}$ Ответ: 0

8.7. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^{4x}$ Ответ: ∞

8.8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{2x-1}\right)^{5x}$ Ответ: 0

8.9. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x+3}{2x-4}\right)^{x+2}$ Ответ: 0

8.10. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2x+1}{3x-1}\right)^{x-1}$ Ответ: 0

8.11. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x-3}{x+4}\right)^{x+3}$ Ответ: ∞

8.12. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2x-3}{7x+4}\right)^{x}$ Ответ: 0

8.13. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x-5}{3x+4}\right)^{2x}$ Ответ: 0

8.14. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{4x-5}\right)^{2x}$ Ответ: 0

8.15. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x-2}{3x+1}\right)^{5x}$ Ответ: 0

8.16. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{3x-4}{x+6}\right)^{x-1}$ Ответ: ∞

8.17. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{3x+10}\right)^{3x}$ Ответ: 0

8.18. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2x-3}{x+4}\right)^{6x+1}$ Ответ: ∞

8.19. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x+3}{3x-1}\right)^{2x}$ Ответ: 0

8.20. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{6x+5}{x-10}\right)^{5x}$ Ответ: ∞

8.21. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{3x+7}{x+4}\right)^{4x}$ Ответ: ∞

8.22. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{4x+5}\right)^{3x}$ Ответ: 0

8.23. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{5x-7}{x+6}\right)^{2x}$ Ответ: ∞

8.24. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3-4x}{2-x}\right)^{6x}$ Ответ: ∞

8.25. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1-2x}{3-x}\right)^{-x}$ Ответ: 0

8.26. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{4+3x}{5+x}\right)^{7x}$ Ответ: ∞

8.27. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{3x-1}{2x+5}\right)^{3x}$ Ответ: ∞

8.28. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1-x}{2-10x}\right)^{5x}$ Ответ: 0

8.29. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3+x}{9x-4}\right)^{2x}$ Ответ: 0

8.30. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x+5}{4x-2}\right)^{3x}$ Ответ: 0

9.Найти указанные пределы

Найти пределы.

k – порядковый номер в журнале

1). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{(k+2)x}$, 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{k\,x^2}{\sin^2 5x}$, 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\,(kx+3x)\,x^2}{5x}$,

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^x$, 5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin kx-\sin 5x}{kx}$, 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos kx}{x}$

Контрольные вопросы

1. Дайте определения предела функции в точке.
2. Какие типы неопределенностей вам известны?
3. Как избавиться о неопределенности $\dfrac{0}{0}$?

4.Чему равно значение предела функции при неопределенности $\dfrac{c}{0}$?

5.Чему равно значение предела функции при неопределенности $\dfrac{0}{c}$?

6. Записать замечательные пределы.

Практическая работа № 6 по теме

«Предел функции. Непрерывность функции. Точки разрыва»

Цель: научиться вычислять пределы,исследовать функцию на непрерывность, классифицировать точки разрыва, строить графики функций.

Теоретические положения

Непрерывность функции и ее разрывы.

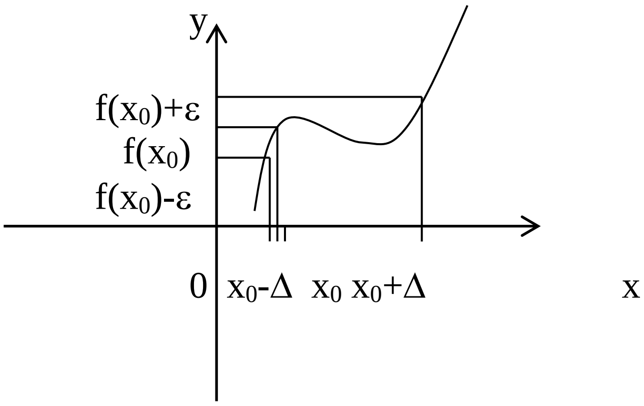
Определение. Функция f(x), определенная в окрестности некоторой точки x_0, называется **непрерывной в точке** x_0, если предел функции и ее значение в этой точке равны, т.е.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

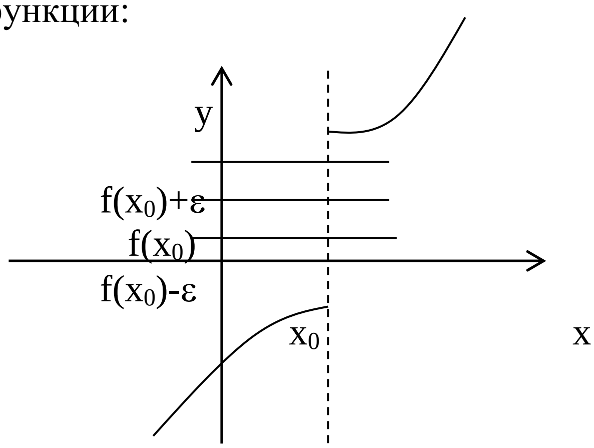
Тот же факт можно записать иначе: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(\lim\limits_{x\to x_0} x)$

Определение. Если функция f(x) определена в некоторой окрестности точки x_0, но не является непрерывной в самой точке x_0, то она называется **разрывной** функцией, а точка x_0 – точкой разрыва.

Пример непрерывной функции:



Пример разрывной функции:



Свойства непрерывных функций.

1) Сумма, разность и произведение непрерывных в точке x_0 функций – есть функция, непрерывная в точке x_0.

2) Частное двух непрерывных функций $\frac{f(x)}{g(x)}$ – есть непрерывная функция при условии, что g(x) не равна нулю в точке x_0.

3) Суперпозиция непрерывных функций – есть непрерывная функция.

Это свойство может быть записано следующим образом:

Если u = f(x), v = g(x) – непрерывные функции в точке $x = x_0$, то функция v = g(f(x)) – тоже непрерывная функция в этой точке.

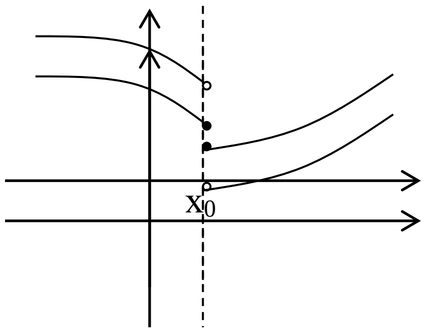
Точки разрыва и их классификация.

Рассмотрим некоторую функцию f(x), непрерывную в окрестности точки x_0, за исключением может быть самой этой точки. Из определения точки разрыва функции следует, что $x = x_0$ является точкой разрыва, если функция не определена в этой точке, или не является в ней непрерывной.

Следует отметить также, что непрерывность функции может быть односторонней. Поясним это следующим образом.

Если односторонний предел (см. выше) $\lim\limits_{x \to x+0} f(x) = f(x_0)$, то функция называется непрерывной справа.

.



Если односторонний предел (см. выше) $\lim\limits_{x \to x-0} f(x) = f(x_0)$, то функция называется непрерывной слева.

Определение. Точка x_0 называется **точкой разрыва** функции f(x), если f(x) не определена в точке x_0 или не является непрерывной в этой точке.

Определение. Точка x_0 называется **точкой разрыва 1- го рода**, если в этой точке функция f(x) имеет конечные, но не равные друг другу левый и правый пределы.

$$\lim_{x \to x_0+0} f(x) \neq \lim_{x \to x_0-0} f(x)$$

Для выполнения условий этого определения не требуется, чтобы функция была определена в точке $x = x_0$, достаточно того, что она определена слева и справа от нее.

Из определения можно сделать вывод, что в точке разрыва 1 – го рода функция может иметь только конечный скачок. В некоторых частных случаях точку разрыва 1 – го рода еще иногда называют **устранимой** точкой разрыва, но подробнее об этом поговорим ниже.

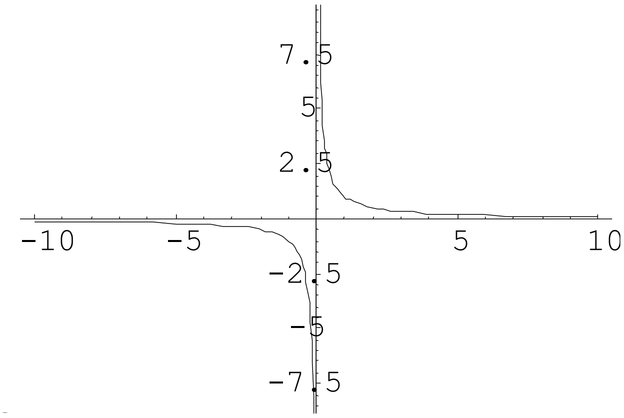
Определение. Точка x_0 называется **точкой разрыва 2 – го рода**, если в этой точке функция f(x) не имеет хотя бы одного из односторонних пределов или хотя бы один из них бесконечен.

Пример. Функция Дирихле (Дирихле Петер Густав(1805-1859) – немецкий математик, член- корреспондент Петербургской АН 1837г)

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x - \textit{рациональное число} \\ 0, & x - \textit{иррациональное число} \end{cases}$$

не является непрерывной в любой точке x_0.

Пример. Функция f(x) = $\frac{1}{x}$ имеет в точке $x_0 = 0$ точку разрыва 2 – го рода, т.к. $\lim\limits_{x \to 0+0} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 0-0} f(x) = -\infty$.

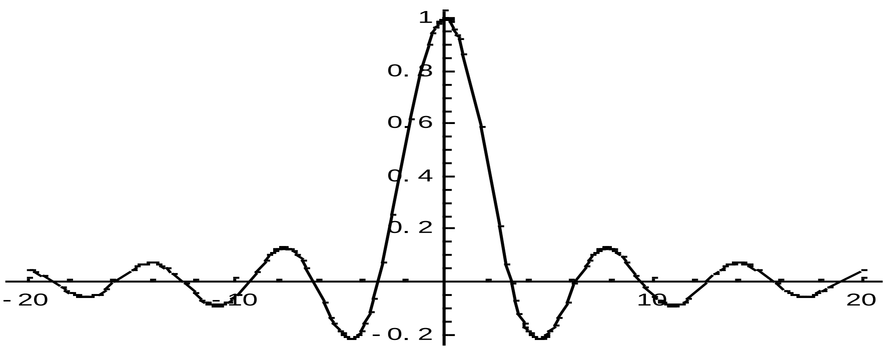


Пример. f(x) = $\frac{\sin x}{x}$

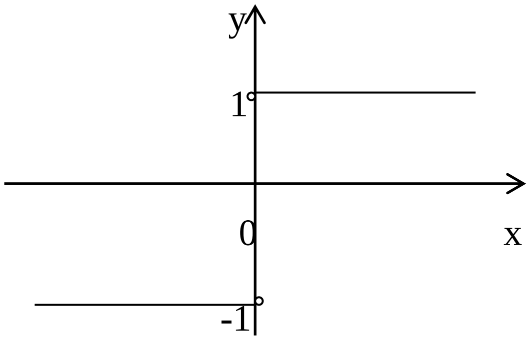
Функция не определена в точке x = 0, но имеет в ней конечный предел $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$, т.е. в точке x = 0 функция имеет точку разрыва 1 – го рода. Это – устранимая точка разрыва, т.к. если доопределить функцию:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & при \quad x \neq 0 \\ 1, & при \quad x = 0 \end{cases}$$

График этой функции:



Пример. f(x) = $\frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1, & при \quad x > 0 \\ -1, & при \quad x < 0 \end{cases}$



Эта функция также обозначается sign(x) – знак x. В точке x = 0 функция не определена. Т.к. левый и правый пределы функции различны, то точка разрыва – 1 – го рода. Если доопределить функцию в точке x = 0, положив f(0) = 1, то функция будет непрерывна справа, если положить f(0) = -1, то функция будет непрерывной слева, если положить f(x) равное какому- либо числу, отличному от 1 или –1, то функция не будет непрерывна ни слева, ни справа, но во всех случаях тем не менее будет иметь в точке x = 0 разрыв 1 – го рода. В этом примере точка разрыва 1 – го рода не является устранимой.

Таким образом, для того, чтобы точка разрыва 1 – го рода была устранимой, необходимо, чтобы односторонние пределы справа и слева были конечны и равны, а функция была бы в этой точке не определена.

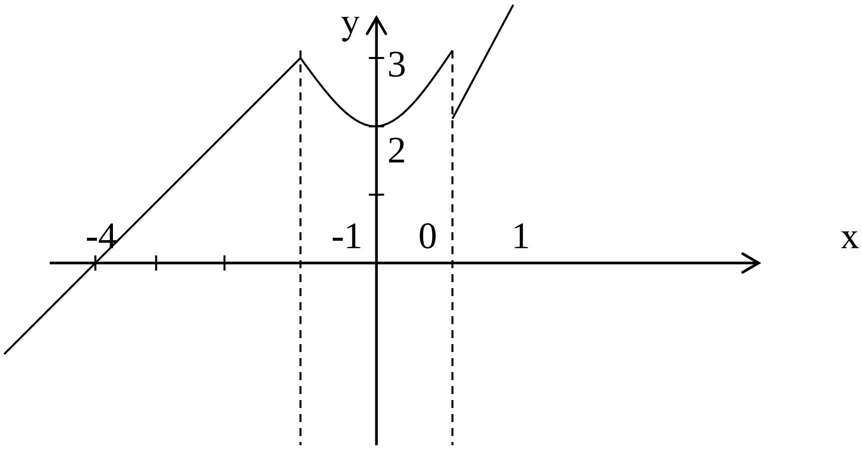
Пример. Исследовать на непрерывность функцию и определить тип точек разрыва, если они есть.

$$f(x) = \begin{cases} x+4, & x < -1 \\ x^2+2, & -1 \le x \le 1 \\ 2x, & x \ge 1 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x \to -1-0} f(x) = 3$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to 1-0} f(x) = 3$

$\lim\limits_{x \to -1+0} f(x) = 3$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to 1+0} f(x) = 2$

в точке x = -1 функция непрерывна $\qquad$ в точке x = 1 точка разрыва 1 – го рода



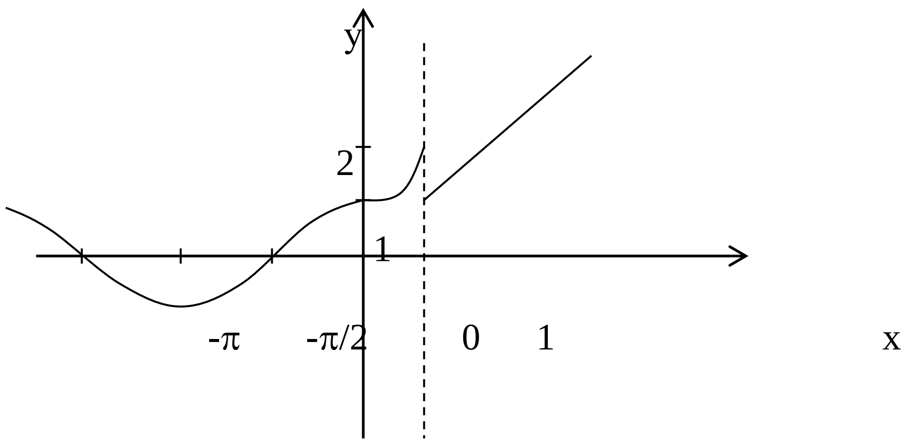
Пример. Исследовать на непрерывность функцию и определить тип точек разрыва, если они есть.

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \le 0 \\ x^2 + 1, & 0 < x < 1 \\ x, & x \ge 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0-0} f(x) = 1 \qquad \lim_{x \to 1-0} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \to 0+0} f(x) = 1 \qquad \lim_{x \to 1+0} f(x) = 1$$

в точке x = 0 функция непрерывна, в точке x = 1 точка разрыва 1 – го рода



4.4.10. Таблица эквивалентных бесконечно малых.

Здесь мы с помощью рассмотренных в **4.4.7** пределов составим таблицу эквивалентных БМ функций и выпишем следующие из них выражения для главных частей (они подчёркнуты).

Эквивалентность при $x \to 0$	Главная часть при $x \to 0$
1. $\sin x \sim x$	1. $\sin x = \underline{x} + o(x)$
2. $1 - \cos x \sim x^2/2$	2. $1 - \cos x = \underline{x^2/2} + o(x^2) \Rightarrow \cos x = 1 - x^2/2 + o(x^2)$
3. $\mathrm{tg}\, x \sim x$	3. $\mathrm{tg}\, x = \underline{x} + o(x)$
4. $\arcsin x \sim x$	4. $\arcsin x = \underline{x} + o(x)$
5. $\mathrm{arctg}\, x \sim x$	5. $\mathrm{arctg}\, x = \underline{x} + o(x)$
6. $a^x - 1 \sim x \ln a$; $e^x - 1 \sim x$	6. $a^x - 1 = \underline{x \ln a} + o(x) \Rightarrow a^x = 1 + x \ln a + o(x)$ $e^x - 1 = \underline{x} + o(x)\ ) \Rightarrow e^x = 1 + x + o(x)$
7. $\log_a(1+x) \sim x \log_a e$; $\ln(1+x) \sim x$	7. $\log_a(1+x) = \underline{x \log_a e} + o(x)$; $\ln(1+x) = x + o(x)$
8. $(1+x)^a - 1 \sim a x$	8. $(1+x)^a - 1 = a\underline{x} + o(x) \Rightarrow (1+x)^a = 1 + a x + o(x)$
9. $\mathrm{sh}\, x \sim x$	9. $\mathrm{sh}\, x = \underline{x} + o(x)$
10. $\mathrm{ch}\, x - 1 \sim x^2/2$	10. $\mathrm{ch}\, x - 1 = \underline{x^2/2} + o(x^2) \Rightarrow \mathrm{ch}\, x = 1 + x^2/2 + o(x^2)$

ak3.r5s.ru

Пример. Найти предел $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tg5x}{\sin 7x}$

Так как tg5x ~ 5x и sin7x ~ 7x при x → 0, то, заменив функции эквивалентными бесконечно малыми, получим:

$$\lim_{x \to 0} \frac{tg5x}{\sin 7x} = \lim_{x \to 0} \frac{5x}{7x} = \frac{5}{7}$$

Пример. Найти предел $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3}{1 - \cos x}$.

Так как 1 – cosx = $2\sin^2 \dfrac{x}{2} \sim 2\left(\dfrac{x}{2}\right)^2$ при x→0, то $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3}{1 - \cos x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3}{\frac{x^2}{2}} = \lim\limits_{x \to 0} 2x = 0$.

Пример. Найти предел $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tgx}{\sin x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{x^2} = \infty.$

Задания практической работы

Задание 1.Найти пределы, используя эквивалентные бесконечно малые функции.

2.1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x^2)}{x^3-5x^2}$ $ответ:-\frac{3}{5}$

2.2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 5x}{tg3x}$ $ответ:\frac{5}{3}$

2.3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{tg2x}$ $ответ:\frac{7}{2}$

2.4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{x^3+27x}$ $ответ:\frac{1}{9}$

2.5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctg6x}{2x^2-3x}$

2.6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 3x}{2x}$ $ответ:\frac{3}{2}$

2.7. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{arctg2x}$ $ответ:\frac{5}{2}$

2.8. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{\sin 2x}$ $ответ:\frac{3}{2}$

2.9. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{tg3x}$ $ответ:\frac{2}{3}$

2.10. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sin(x-3)}{x^2-5x+6}$ $ответ:1$

2.11. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 3x-\cos x}{2x^2}$ $ответ:-2$

2.12. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 6x}{4x^2}$ $ответ:\frac{9}{2}$

2.13. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctg3x}{\ln(1+2x)}$ $ответ:\frac{3}{2}$

2.14. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 4x}{tg5x}$ $ответ:\frac{4}{5}$

2.15. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{5x}-1}{\sin 2x}$ $ответ:\frac{5}{2}$

2.16. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{tg(x+2)}{x^2-4}$ $ответ:-\frac{1}{4}$

2.17. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{\sin(x+2)}{x^3+8}$ $ответ:\frac{1}{12}$

2.18. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 2x}{tg4x}$ $ответ:\frac{1}{2}$

2.19. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^3-64}{tg(x-4)}$ $ответ:48$

2.20. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 2x-\cos 4x}{3x^2}$ $ответ:2$

2.21. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+4x^3)}{2x^3}$ $ответ:2$

2.22. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctg5x}{tg2x}$ $ответ:\frac{5}{2}$

2.23. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\ln(1+2x)}$ $ответ:\frac{3}{2}$

2.24. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 8x}{tg4x}$ $ответ:2$

2.25. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{5x}-1}{tg2x}$ $ответ:\frac{5}{2}$

2.26. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+4x)}{\sin 2x}$ $ответ:\frac{4}{2}$

2.27. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sin(x-3)}{x^3-27}$ $ответ:\frac{1}{27}$

2.28. $\lim\limits_{x\to -5}\frac{tg(x+5)}{x^2-25}$

2.29. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 8x}{2x^2}$ *ответ*:1

2.30. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+5x)}{\sin 3x}$ *ответ*:$\dfrac{5}{3}$

Задание 2. Исследовать данные функции на непрерывность и построить их графики.

2.1. $f(x)=\begin{cases} x+4, x<-1, \\ x^2+2, -1\le x\le 1, \\ 2x, x\ge 1. \end{cases}$

2.2. $f(x)=\begin{cases} x+1, x\le 0 \\ (x+1)^2, 0\le x\le 2 \\ -x+4, x>2 \end{cases}$

2.3. $f(x)=\begin{cases} x+2, x\le -1 \\ x^{2+1}, -1<x\le 1 \\ -x+3, x>1 \end{cases}$

2.4 . $f(x)=\begin{cases} -x, x\le 0 \\ -(x-1)^2, 0<x<2 \\ x-3, x\ge 2 \end{cases}$

2.5. $f(x)=\begin{cases} -2(x+1), x\le -1 \\ (x+1)^3, -1<x<0 \\ x, x\ge 0 \end{cases}$

2.6. $f(x)=\begin{cases} -x, x\le 0 \\ x^2, 0<x\le 2 \\ x+1, x>2 \end{cases}$

2.7. $f(x)=\begin{cases} x^2+1, x\le 1 \\ 2x, 1<x\le 3 \\ x+2, x>3 \end{cases}$

2.8. $f(x)=\begin{cases} x-3, x<0 \\ x+1, 0\le x\le 4 \\ 3+x, x>4 \end{cases}$

2.9. $f(x)=\begin{cases} \sqrt{1-x}, x\le 0 \\ 0, 0<x\le 2 \\ x-2, x>2 \end{cases}$

2.10. $f(x)=\begin{cases} 2x^3, x\le 0 \\ x, 0<x\le 1 \\ 2+x, x>1 \end{cases}$

2.11. $f(x)=\begin{cases} \sin x, x<0 \\ x, 0\le x\le 2 \\ 0, x>2 \end{cases}$

2.12. $f(x)=\begin{cases} \cos x, x\le \dfrac{\pi}{2} \\ 0, \dfrac{\pi}{2}<x<\pi \\ 2, x\ge \pi \end{cases}$

23.13. $f(x)=\begin{cases} x-1, x\le 0 \\ x^2, 0<x<2 \\ 2x, x\ge 2 \end{cases}$

2.14. $f(x)=\begin{cases} x+1, x<0 \\ x^2-1, 0\le x<1 \\ -x, x\ge 1 \end{cases}$

2.15. $f(x)=\begin{cases} -x, x<0 \\ x^2+1, 0\le x<2 \\ x+1, x\ge 2 \end{cases}$

2.16. $f(x)=\begin{cases} x+3, x\le 0 \\ 1, 0<x\le 2 \\ x^2-2, x>2 \end{cases}$

2.17. $f(x)=\begin{cases} x-1, x<0 \\ \sin x, 0\le x<\pi \\ 3, x\ge \pi \end{cases}$

2.18. $f(x)=\begin{cases} -x+1, x<-1 \\ x^2+1, -1\le x\le 2 \\ 2x, x>2 \end{cases}$

2.19. $f(x)=\begin{cases} 1, x\le 0 \\ 2, 0<x\le 2 \\ x+3, x>2 \end{cases}$

2.20. $f(x)=\begin{cases} -x+2, x\le -2 \\ x^3, -2<x\le 1 \\ 2, x>1 \end{cases}$

2.21. $f(x)=\begin{cases} 3x+4, x\le -1 \\ x^2-2, -1<x<2 \\ x, x\ge 2 \end{cases}$

2.22. $f(x)=\begin{cases} x, x\le 1 \\ (x-2)^2, 1<x<3 \\ -x+6, x\ge 3 \end{cases}$

2.23. $f(x)=\begin{cases} x-1, x<1 \\ x^2+2, 1\le x\le 2 \\ -2x, x>2 \end{cases}$

2.24. $f(x)=\begin{cases} x^3, x<-1 \\ x-1, -1\le x\le 3 \\ -x+5, x>3 \end{cases}$

2.25. $f(x)=\begin{cases} x, x<-2 \\ -x+1, -2\le x\le 1 \\ x^2-1, x>1 \end{cases}$

2.26. $f(x)=\begin{cases} x+3, x\le 0 \\ -x^2+4, 0<x<2 \\ x-2, x\ge 2 \end{cases}$

2.27. $f(x)=\begin{cases} 0, x\le -1 \\ x^2-1, -1<x\le 2 \\ 2x, x>2 \end{cases}$

2.28. $f(x)=\begin{cases} -1, x<0 \\ \cos x, 0\le x\le \pi \\ 1-x, x>\pi \end{cases}$

2.29. $f(x)=\begin{cases} 2, x<-1 \\ 1-x, -1\le x\le 1 \\ \ln x, x>1 \end{cases}$

2.30. $f(x)=\begin{cases} -x, x\le 0 \\ x^3, 0<x\le 2 \\ x+4, x>2 \end{cases}$

Задание 3. Исследовать данные функции на непрерывность в указанных точках

3.1. $f(x)=2^{\frac{1}{x-3}}+1, \quad x_1=3, \; x_2=4$

3.2. $f(x)=5^{\frac{1}{x-3}}-1, \quad x_1=3, \; x_2=4$

3.3. $f(x)=\dfrac{x+7}{x-2}, \quad x_1=2, \; x_2=3$

3.4. $f(x)=\dfrac{x-5}{x+3}, \quad x_1=-2, \; x_2=-3$

3.5. $f(x)=4^{\frac{1}{3-x}}+2, \quad x_1=3, \; x_2=2$

3.6. $f(x)=9^{\frac{1}{2-x}}, \quad x_1=0, \; x_2=2$

3.7. $f(x)=2^{\frac{1}{x-5}}+1, \quad x_1=5, \; x_2=4$

3.8. $f(x)=5^{\frac{1}{x-4}}-1, \quad x_1=3, \; x_2=4$

3.9. $f(x)=6^{\frac{1}{x-3}}+3, \quad x_1=3, \; x_2=4$

3.10. $f(x)=7^{\frac{1}{5-x}}+1, \quad x_1=5, \; x_2=4$

3.11. $f(x)=\dfrac{x-3}{x+4}, \quad x_1=-5, \; x_2=-4$

3.12. $f(x)=\dfrac{x+5}{x-2}, \quad x_1=3, \; x_2=2$

3.13. $f(x)=5^{\frac{2}{x-3}}, \quad x_1=3, \; x_2=4$

3.14. $f(x)=4^{\frac{2}{x-1}}-3, \quad x_1=1, \; x_2=2$

3.15. $f(x)=2^{\frac{5}{1-x}}-1, \quad x_1=0, \; x_2=1$

3.16. $f(x)=8^{\frac{4}{x-2}}-1, \quad x_1=2, \; x_2=3$

3.17. $f(x)=5^{\frac{4}{3-x}}+1, \quad x_1=2, \; x_2=3$

3.18. $f(x)=\dfrac{3x}{x-4}, \quad x_1=5, \; x_2=4$

3.19. $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-1}, \quad x_1=1, \; x_2=2$

3.20. $f(x)=2^{\frac{3}{x+2}}+1, \quad x_1=-2, \; x_2=-1$

3.21. $f(x)=4^{\frac{3}{x-2}}+2, \quad x_1=2, \; x_2=3$

4.22. $f(x)=3^{\frac{2}{x+1}}-2, \quad x_1=-1, \; x_2=0$

3.23. $f(x)=5^{\frac{3}{x+4}}+1, \quad x_1=-5, \; x_2=-4$

3.24. $f(x)=\dfrac{x-4}{x+2}, \quad x_1=-2, \; x_2=-1$

3.25. $f(x)=\dfrac{x-4}{x+3}, \quad x_1=-3, \; x_2=-2$

3.26. $f(x)=\dfrac{x+5}{x-3}, \quad x_1=3, \; x_2=4$

3.27. $f(x)=3^{\frac{4}{1-x}}+1, \quad x_1=1, \; x_2=2$

3.28. $f(x)=\dfrac{4x}{x+5}, \quad x_1=-5, \; x_2=-4$

3.29. $f(x)=6^{\frac{2}{4-x}}, \quad x_1=3, \; x_2=4$

3.30. $f(x)=\dfrac{x+1}{x-2}, \quad x_1=2, \; x_2=3$

Контрольные вопросы

1.Какие величины называют бесконечно малыми одного порядка малости?

2. Какие величины называют эквивалентными бесконечно малыми ?

3. Какая функция называется непрерывной в точке?
4.Сколько известно вам точек разрыва функции, какие?

Практическая работа № 7 по теме «Нахождение производной сложной функции. Геометрический смысл производной. Дифференциал функции»

Цель: научиться нахождить производные элементарных и сложных функций.

Время выполнения 90 минут

Материальное обеспечение

1.Теоретические сведения
2.Задание
3.Лист А 4
4.Калькуляторы

Порядок выполнения работы

1.Изучить задание
2. Изучить теоретические сведения
3. Выполнить и оформить работу
4.Показать результаты преподавателю

Домашнее задание

1.Подготовить ответы на контрольные вопросы

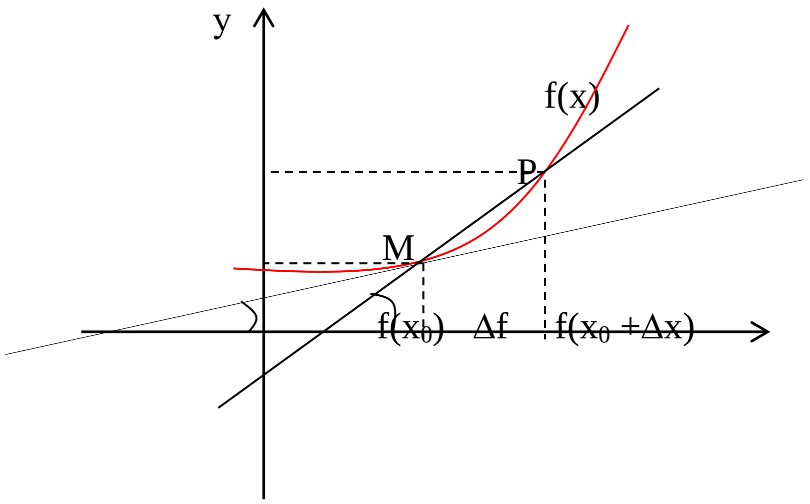
Ход работы

Краткие теоретические сведения.

Производная функции, ее геометрический и физический смысл.

<u>Определение.</u> Производной функции *f(x)* в точке $x = x_0$ называется предел отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента, если он существует.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$



Пусть *f(x)* определена на некотором промежутке (a, b). Тогда $tg\beta = \frac{\Delta f}{\Delta x}$ – тангенс угла наклона секущей MP к графику функции.

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0) = tg\alpha$ =к – **геометрический смысл производной**

где α - угол наклона касательной к графику функции *f(x)* в точке (x_0, $f(x_0)$).

К –угловой коэффициент касательной.

Угол между кривыми может быть определен как угол между касательными, проведенными к этим кривым в какой- либо точке.

Уравнение касательной к кривой $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

Уравнение нормали к кривой $y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$.

Фактически производная функции показывает как изменяется функция при изменении переменной.
Физический смысл производной функции f(t), где t- время, а f(t)- закон движения (изменения координат) – ***мгновенная скорость движения.***Соответственно, вторая производная функции- скорость изменения скорости, т.е. ***ускорение.***
Основные правила дифференцирования.

Обозначим *f(x) = u*, *g(x) = v*- функции, дифференцируемые в точке x.

1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$

2) $(u \cdot v)' = u \cdot v' + u' \cdot v$

3) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$, если $v \neq 0$

<u>Производные основных элементарных функций.</u>

1) $C' = 0$;	9) $(\sin x)' = \cos x$
2) $(x^m)' = mx^{m-1}$;	10) $(\cos x)' = -\sin x$
3) $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	11) $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

4) $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

12) $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

5) $(e^x)' = e^x$

13) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

6) $(a^x)' = a^x \ln a$

14) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

7) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

15) $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$

8) $(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$

16) $(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Производная сложной функции.

Пусть y = f(x); u = g(x), причем область значений функции ***u*** *входит в область определения функции* ***f****.*

Тогда $y' = f'(u)\cdot u'$

Логарифмическое дифференцирование.

Рассмотрим функцию $y = \ln|x| = \begin{cases} \ln x, & при \quad x > 0 \\ \ln(-x), & при \quad x < 0 \end{cases}$.

Тогда $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$, т.к. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$; $(\ln(-x))' = \frac{(-x)'}{x} = \frac{1}{x}$.

Учитывая полученный результат, можно записать $(\ln|f(x)|)' = \frac{f'(x)}{f(x)}$.

Отношение $\frac{f'(x)}{f(x)}$ называется **логарифмической производной** функции f(x).

Способ **логарифмического дифференцирования** состоит в том, что сначала находят логарифмическую производную функции, а затем производную самой функции по формуле

$$\boxed{f'(x) = (\ln|f(x)|)'\cdot f(x)}$$

Способ логарифмического дифференцирования удобно применять для нахождения производных сложных, особенно показательных функций, для которых непосредственное вычисление производной с использованием правил дифференцирования представляется трудоемким.

Производная показательно- степенной функции.

Функция называется показательной, если независимая переменная входит в показатель степени, и степенной, если переменная является основанием. Если же и основание и показатель степени зависят от переменной, то такая функция будет показательно – степенной.

Пусть u = f(x) (f(x)>0)и v = g(x) – функции, имеющие производные в точке x.

Найдем производную функции y = u^v. Логарифмируя, получим:

lny = vlnu

$$\frac{y'}{y} = v'\ln u + v\frac{u'}{u}$$

$$y' = u^v\left(v\frac{u'}{u} + v'\ln u\right)$$

$$\left(u^v\right)' = vu^{v-1}u' + u^v v'\ln u$$

Пример. Найти производную функции $f(x) = (x^2+3x)^{x\cos x}$.

По полученной выше формуле получаем: $u = x^2+3x$; $v = x\cos x$;

Производные этих функций: $u' = 2x+3$; $v' = \cos x - x\sin x$;

Окончательно:

$$f'(x) = x\cos x\cdot(x^2+3x)^{x\cos x-1}\cdot(2x+3) + (x^2+3x)^{x\cos x}(\cos x - x\sin x)\ln(x^2+3x)$$

Пример. Найти производную функции $y = \cos x\sin x + \frac{1}{2}\cos^2 x$.Сначала преобразуем данную функцию: $y = \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\cos^2 x$

$y' = \frac{1}{2}2\cos 2x + \frac{1}{2}2\cos x(-\sin x) = \cos 2x - \sin x\cos x.$ **Пример.** Найти производную функции $y = \frac{x^2e^{x^2}}{x^2+1}$.

$$y' = \frac{(2xe^{x^2} + x^2 2xe^{x^2})(x^2+1) - (2x)x^2e^{x^2}}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^3e^{x^2} + 2x^5e^{x^2} + 2xe^{x^2} + 2x^3e^{x^2} - 2x^3e^{x^2}}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{2xe^{x^2}(x^4+1+x^2)}{(x^2+1)^2}$$

Задание 1.Наити производные функций

В1 У=x^5-5x^2+11, У=x^2ctgx

Y=$\frac{arctgx}{x}$, Y=$\sqrt[3]{x^3+5}$

Y=$e^{-x^2}lnx$, Y=$(cosx-1)^{2x}$

В16 У=x^5-5x^2+1, У=x^2ctgx

Y=$\frac{arctgx}{x}$, Y=$\sqrt[3]{x^3+5}$

Y=$e^{-x^2}lnx$, Y=$(x-1)^{2x}$

В2 У=2x^3-x^2+1, У=x^5tgx

Y=$\frac{artgx}{4x}$, Y=$\sqrt[3]{x^2-3}$

Y=$ln\frac{x}{x+1}$, Y=$(sinx-2)^{3x}$

В17 У=2x^3-x^2+17, У=x^5tgx

Y=$\frac{artgx}{4x}$, Y=$\sqrt[3]{x^2-3}$

Y=$ln\frac{x}{x+1}$, Y=$(lnx+8)^{2x}$

В3 У=7x^3+3x^2-2, У=xarctgx

Y=$\frac{x+5}{lnx}$, Y=$\frac{1}{(2x+11)^5}$

Y=$sin^3(4x^2+\frac{x}{2}-1)$

Y=$(5x+4)^{4x}$

В18 У=7x^3+3x^2-2, У=xarctgx

Y=$\frac{x+5}{lnx}$, Y=$\frac{1}{(2x+11)^5}$

Y=$sin^3(4x^2+\frac{x}{2}-1)$

Y=$(lnx-2)^{2x}$

В4 У=-3x^3+5x^4-81, У=2xsinx

Y=$\frac{x}{sinx}$,Y=$\sqrt[4]{x^2-3}$

Y=$cos\frac{x}{x+1}$,Y=$(tgx-3)^{3x}$

В19У=-3x^3+5x^4-81, У=2xsinx

Y=$\frac{x}{sinx}$, Y=$\sqrt[4]{x^2-3}$

Y=$cos\frac{x}{x+1}$, Y=$(lnx+9)^{5x}$

В5 У=7x^6-3x^2+32 У=$x^3arcsinx$

Y=$\frac{2}{(3-6x)^6}$, Y=$\frac{cosx}{3x}$

Y=$\ln(x-x^2-6)$

Y=$(cosx+4)^x$

В20 У=7x^6-3x^2+3,У=$x^3arcsinx$

Y=$\frac{2}{(3-6x)^6}$,Y=$\frac{cosx}{3x}$

Y=$\ln(x-x^2-6)$

Y=$(tgx+2)^x$

В6 У=-x^5+3x^3-11, У=3x^2ctgx

Y=$\frac{arccosx}{3x}$. Y=$\sqrt[5]{x^2-3}$

Y=$e^{3x^2}ln2x$

Y=$(7x+6)^{2x}$

В21 У=-x^5+3x^3-11,У=3x^2ctgx

Y=$\frac{arccosx}{3x}$, Y=$\sqrt[5]{x^2-3}$

Y=$e^{3x^2}ln2x$

Y=$(tgx-6)^{2x}$

В7 У=3x^4-6x^2+19, У=x^{3}sinx

Y=$\frac{tgx}{3x}$, Y=$\sqrt[3]{2x^3-6}$

Y=$e^{-x^2}lnx$, Y=$(3x+1)^{9x}$

В8 У=-4X^6+9X^2-12, У=x^{3}tgx

Y=$\frac{arcctgx}{6x}$, Y=$\sqrt[3]{3x+6}$

Y=$2^{-x^2}lnx$, Y=$(sinx-4)^x$

В9 У=5x^4-2x^3+65,У=x^{2}arcsinx

Y=$\frac{5}{(6x-4)^3}$, Y=$\sqrt[5]{x^2-5}$

Y=$3^{2x^2}ln$,Y=$(cosx+1)^{2x}$

В10 У=-2x^6-3x^2+19, У=x^{2}ctgx

Y=$\frac{arctgx}{x}$,Y=$\sqrt[3]{x^3+5}$

Y=$e^{2x^2}lnx$, Y=$(3x-1)^x$

В11 У=8x^4-6X^5+1,У=2x^{3}arccosx

Y=$\frac{tgx}{5x}$, Y=$\frac{9}{(6x-5)^4}$

Y=$4^{-x^2}lnx$, Y=$(9x+3)^{4x}$

В12 У=3X^2+11x^3-87,У=3x^{3}ctgx

Y=$\frac{cosx}{2x}$, Y=$\frac{-3}{(4x+9)^5}$

Y=$5^{6x^2}lnx$, Y=$(cosx-2)^{3x}$

В13 У=x^5+9X^2-51, У=x^{2}arcsinx

Y=$\frac{x}{cosx}$,Y=$\sqrt[4]{8x^3-3}$

Y=$e^{2x^2}lnx$, Y=$(8x-2)^x$

В22 У=3x^4-6x^2+1, У=x^{3}sinx

Y=$\frac{tgx}{3x}$, Y=$\sqrt[3]{2x^3-6}$

Y=$e^{-x^2}lnx$,Y=$(tgx+3)^{5x}$

В23 У=-4X^6+9X^2-12,У=x^{3}tgx

Y=$\frac{arcctgx}{6x}$, Y=$\sqrt[3]{3x+6}$

Y=$2^{-x^2}lnx$, Y=$(cosx+3)^{6x}$

В24 У=5x^4-2x^3+65, У=x^{2}arcsinx

Y=$\frac{5}{(6x-4)^3}$, Y=$\sqrt[5]{x^2-5}$

Y=$3^{2x^2}lnx$, Y=$(sinx+2)^{8x}$

В25 У=-2x^6-3x^2+1, У=x^{2}ctgx

Y=$\frac{arctgx}{x}$, Y=$\sqrt[3]{x^3+5}$

Y=$e^{2x^2}lnx$, Y=$(sinx-1)^{3x}$

В26 У=8x^4-6X^5+1, У=2x^{3}arccosx

Y=$\frac{tgx}{5x}$, Y=$\frac{9}{(6x-5)^4}$

Y=$4^{-x^2}lnx$, Y=$(sinx+5)^{4x}$

В27 У=3X^2+11x^3-87, У=3x^{3}ctgx

Y=$\frac{cosx}{2x}$, Y=$\frac{-3}{(4x+9)^5}$

Y=$5^{6x^2}lnx$, Y=$(sinx-2)^{2x}$

В28 У=x^5+9X^2-51, У=x^{2}arcsinx

Y=$\frac{x}{cosx}$, Y=$\sqrt[4]{8x^3-3}$

Y=$e^{2x^2}lnx$,Y=$(cosx+6)^{6x}$

В14 У=3х^7-9Х^3+11, У=5х^{3}tgx

Y=$\frac{2x}{arcsinx}$, Y=$\sqrt[5]{2x^4-6}$

Y=$e^{3x^3}lnx$, Y=$(tgx-3)^{2x}$

В29 У=3х^7-9Х^3+11, У=5х^{3}tgx

Y=$\frac{2x}{arcsinx}$, Y=$\sqrt[5]{2x^4-6}$

Y=$e^{3x^3}lnx$, Y=$(sinx+2)^{3x}$

В15 У=х^5-8Х^2+16, У=4х^{2}ctgx

Y=$\frac{actgx}{3x}$, Y=$\frac{9}{(2x-15)^6}$

Y=$6^{2x^2}lnx$, Y=$(lnx+2)^{6x}$

В30 У=х^5-8Х^2+16, У=4х^{2}ctgx

Y=$\frac{actgx}{3x}$, Y=$\frac{9}{(2x-15)^6}$

Y=$6^{2x^2}lnx$,Y=$(sinx-6)^{6x}$

2.Найти производные функции.

а – порядковый номер в журнале

1. $y = a\,x^a - \frac{a}{x^a} + \sqrt[a]{x^{a+6}} - ax + a$ 2. $y = \sqrt[2a]{(ax^2 - 3ax + 5)^3} - \frac{a}{(x+a)^{a-4}}$

3. $y = tg^a(x+a)\cdot \arccos ax^2$ 4. $y = \arcsin^a ax \cdot \log_a(x-a)$

5. $y = a^{-x^4}\cdot ctg\,ax^3$ 6. $y = ctg^2 ax\cdot arctg\sqrt{x^a}$

7. $y = \frac{\sqrt{ax^2 - 3ax + 5a}}{e^{-x^6}}$ 8. $y = \frac{\lg(ax^2 - 2ax + 3a)}{arcctg^2 ax}$

Контрольные вопросы

1.Сформулировть определение производной, правила дифференцирования.

2.Знать таблицу производных элементарных функций.

3.Сформулировать правило нахождения производной сложной функции.

Практическая работа № 8 по теме
«Исследования функции и построение графика»

Цель: научиться исследовать функцию и по результатам исследования строить график.

Время выполнения 90 минут

Материальное обеспечение
1.Теоретические сведения
2.Задание
3.Лист А 4
4.Калькуляторы
Порядок выполнения работы
1.Изучить задание
2. Изучить теоретические сведения
3. Выполнить и оформить работу
4.Показать результаты преподавателю
Домашнее задание
1.Подготовить ответы на контрольные вопросы
Теоретические сведения.

Схема исследования функций

1) Область существования функции.

Это понятие включает в себя и область значений и область определения функции.

2) Точки разрыва. (Если они имеются).
3) Интервалы возрастания и убывания.
4) Точки максимума и минимума.
5) Максимальное и минимальное значение функции на ее области определения.
6) Области выпуклости и вогнутости.
7) Точки перегиба.(Если они имеются).
8) Асимптоты.(Если они имеются).
9) Построение графика.

Пример. Исследовать функцию $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$ и построить ее график.

Находим область существования функции. Очевидно, что *областью определения* функции является область $(-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; \infty)$.

В свою очередь, видно, что прямые $x = 1$, $x = -1$ являются *вертикальными асимптотами* кривой.

Областью значений данной функции является интервал $(-\infty; \infty)$.

Точками разрыва функции являются точки $x = 1$, $x = -1$.

Находим *критические точки*.

Найдем производную функции $y' = \frac{3x^2(x^2-1) - 2x \cdot x^3}{(x^2-1)^2} = \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2}$

Критические точки: x = 0; x = -$\sqrt{3}$; x = $\sqrt{3}$; x = -1; x = 1.

Находим промежутки *возрастания* и *убывания* функции. Для этого определяем знаки производной функции на промежутках.

$-\infty < x < -\sqrt{3}$, $y' > 0$, функция возрастает

$-\sqrt{3} < x < -1$, $y' < 0$, функция убывает

$-1 < x < 0$, $y' < 0$, функция убывает

$0 < x < 1$, $y' < 0$, функция убывает

$1 < x < \sqrt{3}$, $y' < 0$, функция убывает

$\sqrt{3} < x < \infty$, $y' > 0$, функция возрастает

Видно, что точка x = -$\sqrt{3}$ является точкой *максимума*, а точка x = $\sqrt{3}$ является точкой *минимума*. Значения функции в этих точках равны соответственно $3\sqrt{3}/2$ и $-3\sqrt{3}/2$.

Найдем вторую производную функции

$$y'' = \frac{(4x^3-6x)(x^2-1)^2 - (x^4-3x^2)4x(x^2-1)}{(x^2-1)^4} = \frac{(4x^3-6x)(x^4-2x^2+1) - (x^4-3x^2)(4x^3-4x)}{(x^2-1)^4} =$$

$$= \frac{4x^7 - 8x^5 + 4x^3 - 6x^5 + 12x^3 - 6x - 4x^7 + 4x^5 + 12x^5 - 12x^3}{(x^2-1)^4} =$$

$$= \frac{2x^5 + 4x^3 - 6x}{(x^2-1)^4} = \frac{2x(x^4 + 2x^2 - 3)}{(x^2-1)^4} = \frac{2x(x^2+3)(x^2-1)}{(x^2-1)^4} = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}.$$

Определим выпуклость и вогнутость кривой на промежутках.

$-\infty < x < -\sqrt{3}$, $y'' < 0$, кривая выпуклая $-\sqrt{3} < x < -1$,

$y'' < 0$, кривая выпуклая

$-1 < x < 0$, $y'' > 0$, кривая вогнутая $0 < x < 1$,

$y'' < 0$, кривая выпуклая

$1 < x < \sqrt{3}$, $y'' > 0$, кривая вогнутая $\sqrt{3} < x < \infty$,

$y'' > 0$, кривая вогнутая

Находим промежутки *возрастания* и *убывания* функции. Для этого определяем знаки производной функции на промежутках.

$-\infty < x < -\sqrt{3}$, $y' > 0$, функция возрастает

$-\sqrt{3} < x < -1$, $y' < 0$, функция убывает

$-1 < x < 0$, $y' < 0$, функция убывает

$0 < x < 1$, $y' < 0$, функция убывает

$1 < x < \sqrt{3}$, $y' < 0$, функция убывает

$\sqrt{3} < x < \infty$, $y' > 0$, функция возрастает

Видно, что точка x = $-\sqrt{3}$ является точкой *максимума*, а точка x = $\sqrt{3}$ является точкой *минимума*. Значения функции в этих точках равны соответственно $3\sqrt{3}/2$ и $-3\sqrt{3}/2$.

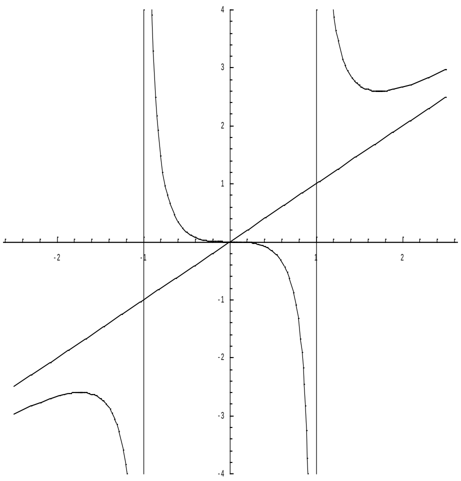
Про вертикальные *асимптоты* было уже сказано выше. Теперь найдем *наклонные асимптоты*. $k = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{x^2}} = 1;$

$$b = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-1} - x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3 - x^3 + x}{x^2-1}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2-1} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}} = 0$$

Итого, уравнение наклонной асимптоты – y = x.

Строим *график* функции:



Задание 1.Исследовать функцию по предложенной схеме и построить ее график:

1. Найти область определения функции.

2. Исследовать на четность и нечетность.

3. Исследовать на периодичность.

4. Найти стационарные и критические точки первого рода.

5. Найти промежутки возрастания и убывания функции, экстремум.

6. Найти стационарные и критические точки второго рода.

7. Найти промежутки выпуклости функции, точки перегиба.

8. Найти асимптоты (вертикальные, горизонтальные, наклонные).

9. Найти точки пересечения графика функции с осями координат.

10.Найти дополнительные точки.

11. По результатам исследования построить график функции.

В1. а) $y = x^2(2-x)^2$; б) $y = \frac{x^2-2x-8}{x+1}$

В2. а) $y = x\sqrt{1-x}$;
б) $y = \frac{x^2+2x-8}{x+3}$

В3. а) y = x - arctgx ;
б) $y = \frac{x^2-3x-10}{x-1}$

В4.а) $y = \frac{8}{4-x^2}$; б) $y = \frac{x^2+3x-10}{x+3}$

В5. а) $y = \sqrt{\frac{1-x}{x}}$;
б) $y = \frac{x^2-4x-12}{x+3}$

В6. а) $y = \frac{x^2}{1+x^2}$; б) $y = \frac{x^2+4x-12}{x-3}$

В7. а) $y = \frac{x}{x^2+16}$; б) $y = \frac{x^2-x-20}{x+2}$

В8. а) $y = e^{\frac{x^2}{4}}$; б) $y = \frac{x^2+x-20}{x-2}$

В16. а) $y = x^3 - 12x^2 - 9x + 1$;
б) $y = \frac{x^2}{x^2+1}$

В17. а) $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x - 1$; б) $y = \frac{x^2}{x-2}$

В18. а) $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + \frac{1}{3}$; б) $y = \frac{x^2}{x^2-3}$

В19. а) $y = -x^3 + 3x^2 + 9x$;
б) $y = \frac{x^2-1}{3x+5}$

В20. а) $y = x^5 - 20x$; б) $y = 1 - \frac{4}{x^2}$

В21. а) $y = x^3 + 15x^2 - x - 250$ б) $y = \frac{x^2-1}{x}$

В22. а) $y = \sqrt[3]{x+2}$; б) $y = \frac{x}{x^2+9}$

В23. а) $y = x^2 - 4x$; б) $y = 3x + \frac{3}{x} + 5$

В9. а) $y = \frac{x}{x+1}$; б) $y = \frac{x^2-2x-15}{x+4}$

В10. а) $y = 2x - x^2$;

б) $y = \frac{x^2+2x-15}{x-1}$

В11. а) $y = x^3 - 3x^2 + 4$; б) $y = \frac{5-2x}{x^2-4}$

В12. а) $y = -x^3 + 3x^2 - 2$;

б) $y = \frac{x^2}{x^2-1}$

В13. а) $y = x^3 - 12x + 6$; б) $y = \frac{x}{x^2+4}$

В14. а) $y = x^3 + 9x^2 + 24x + 12$

б) $y = \frac{x^2}{6x^{\square} + 18}$

В15. а) $y = -x^3 + 3x^2 - 2$;

б) $y = \frac{x^3}{x^2-1}$

В24. а) $y = 3x - x^3$; б) $y = \frac{x^2-2x-8}{x+1}$

В25. а) $y = 2/3x^3 - 2x = 1$; б) $y = -\frac{x}{x^2+9}$

В26. а) $y = 2x^2 - x^4$; б) $y = \frac{1-x^2}{x}$

В27. а) $y = 2x^2 - 8$; б) $y = \frac{x}{x^2-1}$

В28. а) $y = x^4 - 8x^2 + 3$; б) $y = \frac{1}{x^2-1}$

В29. а) $y = \frac{3}{4-x^2}$; б) $y = \frac{x^2+3x-10}{x+3}$

В30. а) $y = x\sqrt{4-x}$; б) $y = \frac{x^2-2x-8}{x+3}$

Контрольные вопросы:

1.Что такое область определения функции?
2.Какие функции называются четными , нечетными, общего вида?
3.Виды точек разрыва.
4.Что такое нули функции?
5.Как определить промежутки выпуклости?
6.Виды асимптот.

Практическая работа 9 по теме
«Нахождение частных производных. Полный дифференциал»

Цель: проверить умение находить и строить область определения сложной функции, находить частные производные.

Время выполнения 90 минут

Материальное обеспечение

1.Теоретические сведения

2.Задание

3.Лист А 4

4.Калькуляторы

Порядок выполнения работы

1.Изучить задание

2. Изучить теоретические сведения

3. Выполнить и оформить работу

4.Показать результаты преподавателю

Домашнее задание

1.Подготовить ответы на контрольные вопросы

Теоретические сведения

Ход работы

Определение функции двух переменных

Если каждой паре (x;y) значений двух независимых друг от друга переменных величин x и y из некоторого множества D соответствует единственное значение величины, то говорят, что z есть функция двух независимых переменных x и y, определенная на множестве D. Обозначается: z=f(x;y) или z=z(x;y).

Например, S=ab, S=S(a;b)- функции двух переменных; V=abc, V=V(a,b.c) – функция трех переменных;

Способы задания функций нескольких переменных

Чтобы задать функцию двух (трех) переменных, нужно указать способ, с помощью которого для каждой пары (тройки) значений аргументов можно найти соответствующее значение функции. Наиболее часто функция задается аналитически - это явное задание функции или неявное задание

Частные производные первого порядка

Пусть функция двух переменных z = f(x, y) определена в некоторой окрестности точки M(x, y) евклидова пространства E2. Частная производная функции z = f(x, y) по аргументу x является обыкновенной производной функции одной переменной x при фиксированном значении переменной y и обозначается как

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}, \quad z'_x, \quad f'_x.$$

Аналогичным образом определяется частная производная функции f(x, y) по переменной y в точке M, обозначаемая как

$$\frac{\partial z}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad z'_y, \quad f'_y.$$

Функция, имеющая частные производные, называется дифференцируемой.

Совершенно аналогично определяются частные производные функций трех и более переменных. Частная производная функции нескольких переменных характеризует скорость ее изменения по данной координате при фиксированных значениях других координат.

Пример: $z = 2x^2y^3 + 3x + 5y - 7$ – функция двух переменных.

Иногда используют запись $f(x;y) = 2x^2y^3 + 3x + 5y - 7$. Также встречаются задания, где вместо буквы z используется буква u.

Найти частные производные первого и второго порядка функции $z = 2x^2y^3 + 3x^4 + 5y - 7$

Сначала найдем частные производные первого порядка. Их две.

Обозначения:

z'_x или $\frac{\partial z}{\partial x}$ – частная производная по «икс»

z'_y или $\frac{\partial z}{\partial y}$ – частная производная по «игрек»

Начнем с z'_x. **Когда мы находим частную производную по «икс», то переменная y считается константой (постоянным числом)**.

$$z'_x \overset{(1)}{=} (2x^2y^3 + 3x^4 + 5y - 7)'_x \overset{(2)}{=} 2y^3(x^2)'_x + 3(x^4)'_x + (5y)'_x - (7)'_x \overset{(3)}{=}$$

$$= 2y^3 \cdot 2x + 3 \cdot 4x^3 + 0 - 0 \overset{(4)}{=} 4xy^3 + 12x^3$$

Комментарии к выполненным действиям:

(1) Первое, что мы делаем при нахождении частной производной – заключаем **всю** функцию в скобки под штрих **с подстрочным индексом**.

(2) Используем правила дифференцирования $(u \pm v)' = u' \pm v'$, $(Cu)' = Cu'$. Для простого примера, как этот, оба правила вполне можно применить на одном шаге. Обратите внимание на первое слагаемое: так как y **считается константой, а любую константу можно вынести за знак производной**, то y^3 мы выносим за скобки. То есть в данной ситуации y^3 ничем не лучше обычного числа. Теперь посмотрим на третье слагаемое $5y$: здесь,

наоборот, выносить нечего. Так как y константа, то $5y$ – тоже константа, и в этом смысле она ничем не лучше последнего слагаемого – «семерки».

(3) Используем табличные производные $(C)'=0$ и $(x^n)'=nx^{n-1}$.

(4) Теперь z'_y. **Когда мы находим частную производную по «игрек», то переменная x считается константой (постоянным числом)**.

$$z'_y=(2x^2y^3+3x^4+5y-7)'_y\overset{(1)}{=}2x^2(y^3)'_y+(3x^4)'_y+5(y)'_y-(7)'_y\overset{(2)}{=}$$
$$=2x^2\cdot 3y^2+0+5\cdot 1-0=6x^2y^2+5$$

(1) Используем те же правила дифференцирования $(u\pm v)'=u'\pm v'$, $(Cu)'=Cu'$. В первом слагаемом выносим константу x^2 за знак производной, во втором слагаемом ничего вынести нельзя поскольку $3x^4$ – уже константа.

(2) Используем таблицу производным элементарных функций. **Мысленно поменяем в таблице все «иксы» на «игреки».** В частности, используемые нами формулы выглядят так: $(C)'=0$ и $(y^n)'=ny^{n-1}$
Итак, частные производные первого порядка найдены

Подведем итог, чем же отличается нахождение частных производных от нахождения «обычных» производных функции одной переменной:

1) Когда мы находим частную производную z'_x, переменная y считается константой.

2) Когда мы находим частную производную z'_y, переменная x считается константой.

3) Правила и таблица производных элементарных функций справедливы и применимы для любой переменной (x, y либо какой-нибудь другой), по которой ведется дифференцирование.

Шаг второй. Находим частные производные второго порядка. Их четыре.

Обозначения:

z''_{xx} или $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ – вторая производная по «икс»

z''_{yy} или $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ – вторая производная по «игрек»

z''_{xy} или $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ – *смешанная* производная «икс по игрек»

z''_{yx} или $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ – *смешанная* производная «игрек по икс»

В понятии второй производной нет ничего сложного. Говоря простым языком, **вторая производная – это производная от первой производной**.

Частные производные первого порядка:
$z'_x = 4xy^3 + 12x^3$
$z'_y = 6x^2y^2 + 5$

Сначала найдем смешанные производные:
$z''_{xy} = (z'_x)'_y = (4xy^3 + 12x^3)'_y = 4x(y^3)'_y + (12x^3)'_y = 4x \cdot 3y^2 + 0 = 12xy^2$

Как видите, всё просто: берем частную производную z'_x и дифференцируем ее еще раз, но в данном случае – уже по «игрек».

Аналогично:
$z''_{yx} = (z'_y)'_x = (6x^2y^2 + 5)'_x = 6y^2(x^2)'_x + (5)'_x = 6y^2 \cdot 2x + 0 = 12xy^2$

В практических примерах можно ориентироваться на следующее равенство:
$z''_{xy} = z''_{yx}$

Таким образом, через смешанные производные второго порядка очень удобно проверить, а правильно ли мы нашли частные производные первого порядка.

Находим вторую производную по «икс».
Никаких изобретений, берем $z'_x = 4xy^3 + 12x^3$ и дифференцируем её по «икс» еще раз:
$z''_{xx} = (z'_x)'_x = (4xy^3 + 12x^3)'_x = 4y^3(x)'_x + 12(x^3)'_x = 4y^3 \cdot 1 + 12 \cdot 3x^2 = 4y^3 + 36x^2$

Аналогично:
$z''_{yy} = (z'_y)'_y = (6x^2y^2 + 5)'_y = 6x^2(y^2)'_y + (5)'_y = 6x^2 \cdot 2y + 0 = 12x^2y$

Следует отметить, что при нахождении z''_{xx}, z''_{yy} нужно проявить <u>повышенное внимание</u>, так как никаких чудесных равенств для их проверки не существует.

Примеры нахождения частных производных первого порядка.
Пример 1. $z = x^2 - 2xy + 2y^2$.

Решение. Дифференцируем функцию z = f(x, y) сначала по x, полагая y фиксированной величиной, потом повторяем эту же процедуру, меняя роли x и y. Получаем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 2y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 4y - 2x.$$

Пример 2. $z = \operatorname{arctg} xy$, $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{1+(xy)^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{1+(xy)^2}$.

Пример 3. $u = ye^{yz} + \ln(x^2 - 2y + z)$.

Решение. Частные производные этой функции трех переменных выражаются следующими формулами:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{x^2-2y+z}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = (1+yz)e^{yz} - \frac{2}{x^2-2y+z},$$
$$\frac{\partial u}{\partial z} = y^2e^{yz} + \frac{1}{x^2-2y+z}.$$

Задания практической работы

1. Найти и построить область определения сложной функции.
2. Вычислить производную сложной функции.

B1 1.$z=\arcsin(1-x^2-y^2)$

2.а) $z=\sqrt{lnx}\,\frac{y}{x}$, x=e, y=1

б) $u=x^2-y^2+3z^2$, x=1/2,y=1/2,z=1/2

B2 1.z=ln(y-lnx)

2.а) $z=\sqrt{xy}\ \ln\frac{y}{x}$, x=1, y=2

в)$u=3x^2/2-y^2/2+2z^2$,x=2/3,y=2,z=2/3

B3 1.$z=\sqrt{lnx+lny}$

2.а)$z=x^y\frac{1}{xy}$,x=e, y=1

б)$u=x^3/2-y^3/2+8z^3$,x=2,y=2,z=3/2

B4 1.$z=\sqrt{\sqrt{y}-x+2}$

2.а)$z=\sin 1/xe^y$,x=π/2,y=1

б)$u=3/2x^2+3y2-2z^2$, x=2,y=1/3,z=3/2

B16 1.$z=\ln\frac{x}{y}$

2.а)$z=(x^2+y^2)^{x^2-y^2}$

б)$u=x\sqrt{y}-(z+y)\sqrt{x}$, x=1,y=1,z=-2

B17 1.z=lny-lncosx

2.а)$z= x\sin y+x^2$, x=3,y=π/2

б)$u=\sqrt{xy}-\sqrt{4-z^2}$,x=1,y=1,z=0

B18. 1.$z=\ln\sin x-\sqrt{y}$

2.а)$z=\arcsin\frac{u}{v}-\ln v$, u=0, v=1

б)$u=(x^2+y^2+z^2)^{3/2}$, x=0,y=-3,z=4

B19. 1.$z=\ln(y^2/4-x^2/9-1)$

2.а)$z=\ln\sqrt{x^2+y^2}+1/y$,x=y=1/$\sqrt{2}$

б)$u=2/x+3/2y-\sqrt{6/4z}$,x=2/3,y=3/2,z=1/2

B5 1.z=arcsin$\frac{x^2}{y}$

2.a)z=arcg(x^2-y^2)+1/$\sqrt{xy}$

б)u=$\frac{\sqrt{x}}{y}-\frac{yz}{x+\sqrt{y}}$

B6 1.z=arcos(2x-y)

2.a)z=arccos$\frac{y}{x}$+$e^{\sqrt{xy}}$, x=2,y=1

б)u=$\sqrt{2}$$x^2$-$\frac{3}{\sqrt{2}}-6\sqrt{2}$$z^2$, x=1,y=2/3,z=1/$\sqrt{6}$

B7 1.Z=$\sqrt{ln(2-x-y)}$,

2.a)z=tg1/x.$e^{\frac{y}{x}}$,x=1/π,y=0

б)u= 2$\sqrt{x+y}$+y.arctgz, x=1,y=1/3,z=1/$\sqrt{6}$

B8 1.z=ln$\frac{x}{y}$

2.a)z=$(x^2+y^2)^{x^2-y^2}$

б)u=x$\sqrt{y}$-(z+y)$\sqrt{x}$, x=1,y=1,z=-2

B9. 1.z=lny-lncosx

2.a)z= xsiny+x^2, x=3,y=π/2

б)u=$\sqrt{xy}-\sqrt{4-z^2}$,x=1,y=1,z=0

B10. 1.z=lnsinx-$\sqrt{y}$

2.a)z=arcsin$\frac{u}{v}$ - lnv, u=0, v=1

б)u=$(x^2+y^2+z^2)^{3/2}$, x=0,y=-3,z=4

B20. 1.z=arcsin$\frac{y}{x}$

2.a)z=lny$\sqrt{x}$,x=1,y=3/5

б)u=3/x+4/y-1/$\sqrt{6}$x,x=1,y=2,z=1/$\sqrt{6}$

B21. 1.z=1+$\sqrt{1-(x-y)^2}$

2.a)z=cos(1/y)-1/$\sqrt{xy}$, x=π/2, y=2/π

б)u=x$\sqrt{y}$-yz^2,x=2,y=1,z=-1

B22. 1.z=ln(x^2+y)

2.a)z=$e^{x^2}\sqrt{x^2-y^2}$, x=1,y=0

б)u=sin$\frac{y}{xz}$, x=2,y=π,z=1

B23. 1.z=$\sqrt{1-x^2}$+$\sqrt{1-y^2}$

2.a)z=yln(x^2-y^2), x=2,y=1

б)u=x^3/16+y^2/9-z^2/8,x=2,y=1/2,z=1/3

B24 1.Z=$\sqrt{ln(2-x-y)}$,

2.a)z=tg1/x.$e^{\frac{y}{x}}$,x=1/π,y=0

б)u= 2$\sqrt{x+y}$+y.arctgz, x=1,y=1/3,z=1/$\sqrt{6}$

B25 1.z=arcos(2x-y)

2.a)z=arccos$\frac{y}{x}$+$e^{\sqrt{xy}}$, x=2,y=1

б)u=$\sqrt{2}$$x^2$-$\frac{3}{\sqrt{2}}-6\sqrt{2}$$z^2$, x=1,y=2/3,z=1/$\sqrt{6}$

В11. 1.z=ln(y^2/4-x^2/9-1)

2.а)z=ln$\sqrt{x^2+y^2}$+1/y,x=y=1/$\sqrt{2}$

б)u=2/x+3/2y-$\sqrt{6/4z}$,x=2/3,y=3/2,z=1/2

В12. 1.z=arcsin$\frac{y}{x}$

2.а)z=lny$\sqrt{x}$,x=1,y=3/5

б)u=3/x+4/y-1/$\sqrt{6}$x,x=1,y=2,z=1/$\sqrt{6}$

В13. 1.z=1+$\sqrt{1-(x-y)^2}$

2.а)z=cos(1/y)-1/$\sqrt{xy}$, x=π/2, y=2/π

б)u=x$\sqrt{y}$-yz^2,x=2,y=1,z=-1

В14. 1.z=ln(x^2+y)

2.а)z=$e^{x^2}\sqrt{x^2-y^2}$, x=1,y=0

б)u=sin$\frac{y}{xz}$, x=2,y=π,z=1

В15. 1.z=$\sqrt{1-x^2}$+$\sqrt{1-y^2}$

2.z=yln(x^2-y^2), x=2,y=1

u=x^3/16+y^2/9-z^2/8,x=2,y=1/2,z=1/3

В26 1.z=arcsin$\frac{x^2}{y}$

2.а)z=arcg(x^2-y^2)+1/$\sqrt{xy}$

б)u=$\frac{\sqrt{x}}{y}-\frac{yz}{x+\sqrt{y}}$

В27 1.z=$\sqrt{\sqrt{y}-x+2}$

2.а)z=sin1/xe^y,x=π/2,y=1

б)u=3/2x^2+3y2-2z^2, x=2,y=1/3,z=3/2

В28 1.z=$\sqrt{lnx+lny}$

2.а)z=$x^y\frac{1}{xy}$,x=e, y=1

б)u=x^3/2-y^3/2+8z^3,x=2,y=2,z=3/2

В2 9.z=ln(y-lnx)

2.а) z=$\sqrt{xy}$ ln$\frac{y}{x}$, x=1, y=2

в)u=3x^2/2-y^2/2+2z^2,x=2/3,y=2,z=2/3

В30 1.z=arcsin(1-x^2-y^2)

2.а) z=$\sqrt{lnx}\,\frac{y}{x}$, x=e, y=1

б) u=x^2-y^2+3z^2, x=1/2,y=1/2,z=1/2

Контрольные вопросы:

1.Сформулировать определение функции с двумя переменными.

2.Что называется областью определения функции нескольких переменных?
3.Сформулировать правило нахождения производной функции нескольких переменных.
4.Что такое полный дифференциал функции нескольких переменных**?**

Практическая работа 10 по теме «Экстремум функции двух переменных»

Цель: проверить умение исследовать функцию на экстремум.

Время выполнения 90 минут

Материальное обеспечение
1.Теоретические сведения
2.Задание
3.Лист А 4
4.Калькуляторы
Порядок выполнения работы

1.Изучить задание
2. Изучить теоретические сведения
3. Выполнить и оформить работу
4.Показать результаты преподавателю

Домашнее задание

1.Подготовить ответы на контрольные вопросы

Ход работы

Теоретические сведения

Находим частные производные второго порядка. Их четыре.

Обозначения:

z''_{xx} или $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ – вторая производная по «икс»

z''_{yy} или $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ – вторая производная по «игрек»

z''_{xy} или $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ – *смешанная* производная «икс по игрек»

z''_{yx} или $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ – *смешанная* производная «игрек по икс»

В понятии второй производной нет ничего сложного. Говоря простым языком, **вторая производная – это производная от первой производной**.

Частные производные первого порядка:

$z'_x = 4xy^3 + 12x^3$

$z'_y = 6x^2y^2 + 5$

Сначала найдем смешанные производные:

$z''_{xy} = (z'_x)'_y = (4xy^3 + 12x^3)'_y = 4x(y^3)'_y + (12x^3)'_y = 4x \cdot 3y^2 + 0 = 12xy^2$

Как видите, всё просто: берем частную производную z'_x и дифференцируем ее еще раз, но в данном случае – уже по «игрек».

Аналогично:

$z''_{yx} = (z'_y)'_x = (6x^2y^2 + 5)'_x = 6y^2(x^2)'_x + (5)'_x = 6y^2 \cdot 2x + 0 = 12xy^2$

В практических примерах можно ориентироваться на следующее равенство:

$z''_{xy} = z''_{yx}$

Таким образом, через смешанные производные второго порядка очень удобно проверить, а правильно ли мы нашли частные производные первого порядка.

Находим вторую производную по «икс».

Никаких изобретений, берем $z'_x = 4xy^3 + 12x^3$ и дифференцируем её по «икс»

еще раз:
$$z''_{xx} = (z'_x)'_x = (4xy^3 + 12x^3)'_x = 4y^3(x)'_x + 12(x^3)'_x = 4y^3 \cdot 1 + 12 \cdot 3x^2 = 4y^3 + 36x^2$$

Аналогично:
$$z''_{yy} = (z'_y)'_y = (6x^2y^2 + 5)'_y = 6x^2(y^2)'_y + (5)'_y = 6x^2 \cdot 2y + 0 = 12x^2y$$

Следует отметить, что при нахождении z''_{xx}, z''_{yy} нужно проявить повышенное внимание, так как никаких чудесных равенств для их проверки не существует.

Алгоритм исследования функции двух переменных на экстремум

Функция $z = f(x,y)$ имеет **максимум** в точке $M_0(x_0;y_0)$, если $f(x_0;y_0) > f(x;y)$ для всех точек $(x;y)$, достаточно близких к точке $(x_0;y_0)$ и отличных от неё.

Функция $z = f(x,y)$ имеет **минимум** в точке $M_0(x_0;y_0)$, если $f(x_0;y_0) < f(x;y)$ для всех точек $(x;y)$, достаточно близких к точке $(x_0;y_0)$ и отличных от неё.

Максимум и минимум функции называются **экстремумами функции**.

Исследование функции двух переменных на экстремум проводят по следующей схеме.

1. Находят частные производные *dz/dx* и *dz/dy*.
2. Решают систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

и таким образом находят критические точки функции.

3. Находят частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

4. Вычисляют значения этих частных производных второго порядка в каждой из найденных в п.2 критических точках $M(x_0;y_0)$.

$$A = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_M, B = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)_M, C = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_M$$

5. Делают вывод о наличии экстремумов:

а) если $AC - B^2 > 0$ и $A < 0$, то в точке M имеется максимум;
б) если $AC - B^2 > 0$ и $A > 0$, то в точке M имеется минимум;
в) если $AC - B^2 < 0$, то экстремума нет;
г) если $AC - B^2 = 0$, то вопрос о наличии экстремума остается открытым;

Примеры исследования функций двух переменных на экстремум.

Пример №1. Исследовать на экстремум функцию
$z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y.$

Решение.

1) Найдем частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 15,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 6xy - 12y,$$

2) тогда система для отыскания стационарных точек имеет вид

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 5 = 0 \\ xy - 2 = 0 \end{cases}.$$

Решив систему, получим четыре стационарные точки:
$P_1(1,2)$, $P_2(2,1)$, $P_3(-1,-2)$, $P_4(-2,-1)$. Найдем производные 2-го порядка

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x = A, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6x = B, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6y = C$$

и составим дискриминант $\Delta AB\text{-}C^2$ для каждой стационарной точки.

1) Для точки $P_1(1,2)$ Δ=36-144<0, в $P_1(1,2)$ экстремума нет.

2) Для точки $P_2(-1,-2)$, Δ =144 – 36 >0, A>0, в $P_2(2,1)$функция имеет минимум, z_{min} = -28

3) Для точки $P_3(-1,-2)$, Δ = 36-144 <0, в $P_3(-1,-2)$ экстремума нет.

4) Для точки $P_4(-2,-1)$, Δ=144 – 36 >0, A<0 в $P_4(-2,-1)$ функция имеет максимум z_{max}=28

Пример №2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + 4xy - y^2 - 6x - 2y$ в треугольнике, ограниченном осями координат и прямой $2x + 3y - 6 = 0$.

Решение.

Найдем критические точки локального экстремума внутри указанной области и значения данной функции z = f(x,y) в этих точках. Так как $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 4y - 6$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 4x - 2y - 2$, то система для отыскания критических точек имеет вид

$$\begin{cases} x + 2y - 3 = 0 \\ 2x - y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Точка $P_0(1;1)$ находится внутри области, причем $z(P_0) = -4$. Исследуем функцию z на границе области. На отрезке *OA* имеем : y=0, z = f(x;0) или $g_1(x)=x^2 - 6x$, где $x \in [0;3]$; $g'_1=2x-6$; $g'_1(3)=0$; $g_1(3)=f(3;0)=-9$. На отрезке *OB* имеем: x=0. z=f(0;y) или $z=g_2(y)=-y^2-2y$, где $y \in [0;2]; \quad g_2'(y) = -2y - 2; \quad g_2'(-1) = 0$, $-1 \notin [0;2]$. На отрезке АВ имеем $y = 2 - \frac{2}{3}x, \quad z = f\left(x; 2 - \frac{2}{3}x\right)$ или

$z = g_3(x) = -\frac{19}{9}x^2 + 6x - 8,$ где $x \in [0;3]$; $g_3'(x) = -\frac{38}{9}x + 6$; $g_3'\left(\frac{27}{19}\right) = 0$,

$$g_3\left(\frac{27}{19}\right) = f\left(\frac{27}{19}; \frac{20}{19}\right) = -\frac{71}{19}.$$

Найдем значения функции z в точках *O*, *A* и *B*. z(0) = f(0,0) = 0; z(A) = f(3;0) = -9, z(B) = f(0;2) = -8.

Сравнивая значения $f(0;0), \quad f(0;2), \quad f(3;0), \quad f(\frac{27}{19}; \frac{20}{19}), \quad f(1;1)$, приходим к выводу:

наибольшее значение zmax=0 в т. O(0,0);

наименьшее значение zmin=-9 в т. A(3,0).

Задание 1.Найти частные производные второго порядка

В1 $z=x^2y^2-4x-5y$

В2 $z=y^2-x^2+xy-2x-6y$

В3 $z=xy(1-x-y)$

В4 $z=y\sqrt{x}-y^2-x+6y$

В5 $z=e^{x/2}(x+y^2)$

В6 $z=x^3-y^3-3xy$

В7 $z=0,5xy+(47-x-y)(x/3+y/4)$

В8 $z=x^2+y^2+xy-3x-6y$

В9 $z=xy^2(1-x-y)$

В16 $z=x^3-y^3-3xy$

В17 $z=0,5xy+(47-x-y)(x/3+y/4)$

В18. $Z=x^2+y^2+xy-3x-6y$

В19. $z=xy^2(1-x-y)$

В20. $z=x^3+y^3-15xy$

В21. $z=3-2x^2-xy-y^2$

В22. $z=y^2-xy-2$

В23. $z=x^2+2xy-y^2+4x$

В24 $z=2x^2+2xy-y^2/2-4x$

В10 $z=x^3+y^3-15xy$

В11 $z=x^2+y^2+xy-4x-5y$

В12 $z=y^2-x^2+xy-2x-6y$

В13 $z=xy(1-x-y)$

В14 $z=y\sqrt{x}-y^2-y+6y$

В15 $z=e^{x/2}(x+y^2)$

В25 $z=x^2+xy-2$

В26. $z=y^2-2xy-x^2+4y+1$

В27. $z=1-2xy+2x^2$

В28. $z=4x+2y+4x^2+y^2+6$

В29 $z=x^2+2xy-10$

В30. $z=x^2+2xy-y^2-4x$

Задание 2.Исследовать заданную функцию на экстремум

В1. $z=12+2xy-x^2$

В2. $z=5x^2-3xy+y^2+4$

В3. $z=4x^2+9y^2-4x-6y+3$

В4. $z=x^2-2xy-y^2+4x+1$

В5. $z=y^2+2xy-x^2-4y$

В6. $z=x^2+3y^2+x-y$

В7. $z=x^2y$

В8. $z=4-2x^2-y^2$

В9. $z=x^2/2-xy$

В10. $z=1+xy^2$

В11. $z=4-2y^2+x^2$

В12. $z=y^2+2xy-x^2-4y$

В13. $z=x^2-xy$

В16. $z=x^2+2xy-10$

В17. $z=4x+2y+4x^2+y^2+6$

В18. $z=1-2xy+2x^2$

В19. $z=x^2+2xy-y^2+2x+2y$

В20. $z=y^2-2xy-x^2+4y+1$

В21. $z=x^2+xy-2$

В22. $z=2x^2+2xy-y^2/2-4x$

В23. $z=x^2+2xy-y^2+4x$

В24. $z=3-2x^2-xy-y^2$

В25. $z=y^2-xy-2$

В26. $z=x^2+y^2+xy-4x-5y$

В27. $z=y^2-x^2+xy-2x-6y$

В28. $z=x^2+y^2+xy-3x-6y$

В14. $z=xy(4-x-y)$

В29. $z=x^3-y^3-3xy$

В15. $z=x^2+2xy-y^2-4x$

В30. $z= x^3+y^3-15xy$

Контрольные вопросы

1.Сформулировать алгоритм нахождения экстремума функции нескольких переменных

Практическая работа № 11 по теме

«Вычисление неопределенных интегралов»

Цель: проверить умение находить неопределенные интегралы используя методы непосредственного интегрирования, интегрирование подстановкой и по частям.

Время выполнения 90 минут

Материальное обеспечение
1.Теоретические сведения
2.Задание
3.Лист А 4

4.Калькуляторы

Порядок выполнения работы

1.Изучить задание

2. Изучить теоретические сведения

3. Выполнить и оформить работу

4.Показать результаты преподавателю

Домашнее задание

1.Подготовить ответы на контрольные вопросы

Ход работы

Теоретические сведения

Определение Пусть $f(x)$ -- функция, заданная на объединении интервалов вещественной оси. Набор всех первообразных для $f(x)$ называется *неопределённым интегралом* от $f(x)$ и обозначается $\int f(x)\,dx$. Операция нахождения неопределённого интеграла по заданной функции $f(x)$ называется *интегрированием* этой функции; найти неопределённый интеграл означает *проинтегрировать* данную функцию. Функция $f(x)$, записанная после знака интеграла (или, как часто говорят, *под* знаком интеграла), называется *подынтегральной функцией*. Согласно доказанным выше теоремам о виде первообразных, неопределённый интеграл от функции $f(x)$ состоит из функций вида $F(x)+C$, где $F(x)$ -- какая-либо фиксированная первообразная для $f(x)$, а C -- величина, постоянная на каждом из непересекающихся интервалов, на которых задана функция $f(x)$. Поэтому можно написать такую формулу:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

Таблица интегралов элементарных функций

1	$\int 0\cdot dx = C$.	11	$\int \mathrm{ch}\, x dx = \mathrm{sh}\, x + C$.
2	$\int 1\cdot dx = x + C$.	12	$\int \frac{dx}{\mathrm{sh}^2 x} = -\mathrm{cth}\, x + C$.

3	$\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ ($\alpha \neq -1$).	13	$\int \frac{dx}{\text{ch}^2 x} = \text{th}\, x + C$.
4	$\int \frac{1}{x}dx = \int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$.	14	$\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\text{arctg}\,\frac{x}{a} + C$.
5	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$; $\int e^x dx = e^x + C$.	15	$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + C$.
6	$\int \sin x dx = -\cos x + C$.	16	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C = -\arccos\frac{x}{a} + C$
7	$\int \cos x dx = \sin x + C$.	17	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2+\alpha}\right\rvert + C$.
8	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\text{ctg}\, x + C$.	18	$\int \sqrt{x^2+\alpha}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+\alpha} + \frac{\alpha}{2}\ln\left\lvert x + \sqrt{x^2+\alpha}\right\rvert$.
9	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \text{tg}\, x + C$.	19	$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$.
10	$\int \text{sh}\, x dx = \text{ch}\, x + C$.	20	$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left\lvert\text{tg}\,\frac{x}{2}\right\rvert + C$; $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left\lvert\text{tg}\,\frac{x+\pi/2}{2}\right\rvert + C$.

Замена переменной в неопределённом интеграле (интегрирование подстановкой).

Пусть $\int f(x)dx = F(x) + C$. Тогда $\int f(t(x))t'(x)dx = F(t(x)) + C$. Здесь $t(x)$ - дифференцируемая монотонная функция.

При решении задач замену переменной можно выполнить двумя способами.

1. Если в подынтегральной функции удаётся сразу заметить оба сомножителя, и $f(t(x))$, и $t'(x)$, то замена переменной осуществляется подведением множителя $t'(x)$ под знак дифференциала: $t'(x)dx = dt$, и задача сводится к вычислению интеграла $\int f(t)dt$. Например,

$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{-\sin x dx}{\cos x} = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} =$ (задача сведена к вычислению $\int \frac{dt}{t}$, где $t = \cos x$) $= -\ln|\cos x| + C$ (аналогично находится интеграл от $\operatorname{ctg} x$); $\int e^{\sin x} \cos x dx = \int e^{\sin x} d \sin x =$ (задача сведена к вычислению $\int e^t dt$, где $t = \sin x$) $= e^{\sin x} + C$. В более сложных задачах операция подведения под знак дифференциала может выполняться несколько раз:

$\int e^{\operatorname{arcctg}^5 x^2} \operatorname{arcctg}^4 x^2 \frac{x}{1+x^4} dx =$ (самое неприятное в подынтегральной функции - пятая степень арккотангенса под знаком экспоненты; если дальше не найдётся дифференциал этой функции, то интеграл, возможно, взять вообще не удастся; в то же время следующий множитель ($\operatorname{arcctg}^4 x^2$) - производная (с точностью до постоянного множителя) степенной функции; затем следуют производные (опять с точностью до постоянных множителей) функций $\operatorname{arcctg} x^2$ и x^2 по своим аргументам)

$$= \frac{1}{2}\int e^{\operatorname{arcctg}^5 x^2} \operatorname{arcctg}^4 x^2 \frac{1}{1+x^4}(2x dx) = \frac{1}{2}\int e^{\operatorname{arcctg}^5 x^2} \operatorname{arcctg}^4 x^2 \frac{1}{1+x^4} dx^2 =$$

$$= -\frac{1}{2}\int e^{\operatorname{arcctg}^5 x^2} \operatorname{arcctg}^4 x^2 \left(\frac{-dx^2}{1+x^4}\right) = -\frac{1}{2}\int e^{\operatorname{arcctg}^5 x^2} \operatorname{arcctg}^4 x^2 d \operatorname{arcctg} x^2 =$$

$$= -\frac{1}{2\cdot 5}\int e^{\operatorname{arcctg}^5 x^2} (5 \operatorname{arcctg}^4 x^2 d \operatorname{arcctg} x^2) = -\frac{1}{10}\int e^{\operatorname{arcctg}^5 x^2} (d \operatorname{arcctg}^5 x^2) = -\frac{1}{10} e^{\operatorname{arcctg}^5 x^2} + C$$

2. Замену переменной можно осуществлять формальным сведением подынтегрального выражения к новой переменной. Так, в $\int e^{\sin x} \cos x dx$ имеет смысл перейти к переменной (сделать подстановку) $t = \sin x$. Выражаем все множители подынтегрального выражения через переменную t:

$x = \arcsin t; dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}; \cos x = \sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{1-t^2}$; в результате $\int e^{\sin x} \cos x dx =$

$= \int e^t \sqrt{1-t^2} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int e^t dt = e^t + C =$ (возвращаемся к исходной переменной) $= e^{\sin x} + C$. Другие примеры:

$\int \frac{dx}{\sqrt{x-5}(1+\sqrt[3]{x-5})}$. Подынтегральная функция содержит два множителя, ни один из которых не является производной другого, поэтому подводить их под знак дифференциала бесполезно. Попытаемся ввести новую переменную, такую, чтобы корни извлеклись: $\int \frac{dx}{\sqrt{x-5}(1+\sqrt[3]{x-5})} = \left| \begin{matrix} x-5=t^6;\ t=\sqrt[6]{x-5}; \\ x=t^6+5;\ dx=6t^5dt \end{matrix} \right| =$

$$\int \frac{6t^5 dt}{t^3(1+t^2)} = 6\int \frac{t^2 dt}{t^2+1} = 6\int \frac{(t^2+1-1)dt}{t^2+1} =$$

$$= 6\left(\int dt - \int \frac{dt}{t^2+1}\right) = 6(t - \operatorname{arctg} t) + C = 6(\sqrt[6]{x-5} - \operatorname{arctg} \sqrt[6]{x-5}) + C$$

. Рассмотрим $\int \sqrt{a^2-x^2}dx$ (интеграл №19 из **табл.**). Здесь подынтегральная функция состоит из единственного множителя; можно опять попытаться сделать такую замену переменной, чтобы корень извлёкся. Структура подкоренного выражения подсказывает эту замену: $x = a\sin t$ (или $x = a\cos t$, $a > 0$):

$$\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \left| \begin{matrix} x = a\sin t,\ dx = a\cos t dt, \\ \sqrt{a^2-x^2} = a\sqrt{1-\sin^2 t} = a\cos t \end{matrix} \right| = a^2 \int \cos^2 t \cdot dt$$

. Интеграл свёлся к интегралу от квадрата косинуса. При интегрировании чётных степеней синуса и косинуса часто применяются формулы, выражающие $\sin^2 t$ и $\cos^2 t$ через косинус двойного угла: $\sin^2 t = \frac{1-\cos 2t}{2};\ \cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$. Поэтому

$$a^2 \int \cos^2 t \cdot dt = a^2 \int \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \frac{a^2}{2}\left(\int dt + \int \cos 2t dt\right) = \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{1}{2}\int \cos 2t \cdot d2t\right) =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right) + C = \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right) + C = \frac{a^2}{2}(t + \sin t\cos t) + C = \left| \begin{matrix} \sin t = \frac{x}{a};\ \cos t = \\ \sqrt{1-\sin^2 t} = \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a} \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{a^2}{2}\arcsin \frac{x}{a} + \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + C$$

.

Примеры: 1.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}}dx = \left| \begin{matrix} t = x + \sqrt{x^2+\alpha};\ t - x = \sqrt{x^2+\alpha};\ (t-x)^2 = x^2+\alpha; \\ t^2 - 2tx + x^2 = x^2 + \alpha;\ x = \frac{t^2-\alpha}{2t};\ \sqrt{x^2+\alpha} = t - \frac{t^2-\alpha}{2t} = \\ = \frac{t^2+\alpha}{2t};\ dx = \frac{t^2+\alpha}{2t^2}dt \end{matrix} \right| = \ln|t| + C = \ln\left|x + \sqrt{x^2+\alpha}\right| +$$

.

2. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\int \frac{2a}{x^2 - a^2}dx = \frac{1}{2a}\int \frac{(x+a)-(x-a)}{(x+a)(x-a)}dx = \frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right)dx =$

$$= \frac{1}{2a}\left(\int\frac{d(x-a)}{x-a} - \int\frac{d(x+a)}{x+a}\right) = \frac{1}{2a}(\ln|x-a| - \ln|x+a|) + C = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$$

Интегрирование по частям.

Интегрирование по частям - приём, который применяется почти так же часто, как и замена переменной. Пусть $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ и $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ - функции, имеющие непрерывные частные производные. Тогда по формуле дифференцирования произведения $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{uv}) = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{dv} + \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{du}$ $\Rightarrow u \cdot dv = d(uv) - v \cdot du$. Находим неопределённые интегралы для обеих частей этого равенства (при этом $\int d(uv) = uv + C$):

$$\int u \cdot dv = uv - \int v \cdot du.$$

Эта формула и называется формулой интегрирования по частям. Часто ее записывают в производных ($\boldsymbol{dv} = \boldsymbol{v}'\cdot\boldsymbol{dx}$, $\boldsymbol{du} = \boldsymbol{u}'\cdot\boldsymbol{dx}$):

$$\int u \cdot v' dx = uv - \int v \cdot u' dx.$$

Примеры:

$$\int x \sin x dx = \left| \begin{matrix} u = x;\ dv = \sin x dx; \\ du = dx;\ v = \int \sin x dx = -\cos x \end{matrix} \right| = x(-\cos x) - \int(-\cos x)dx = -x\cos x + \sin x + C$$

$$\int \ln x dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x;\ dv = dx; \\ du = \frac{dx}{x};\ v = x \end{matrix} \right| = x\ln x - \int x\frac{dx}{x} = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C.$$

Формула интегрирования по частям может применяться неоднократно. При наличии небольшого опыта в простых интегралах нет необходимости выписывать промежуточные выкладки ($\boldsymbol{u} = \ldots$, $\boldsymbol{dv} = \ldots$), можно сразу применять формулу, представив интеграл в виде $\int u \cdot dv$:

$$\int e^x x^3 dx = \int x^3(e^x dx) = \int x^3 de^x = x^3e^x - \int e^x dx^3 = x^3e^x - \int e^x 3x^2 dx = x^3e^x - 3\int x^2(e^x dx) =$$
$$= x^3e^x - 3\int x^2 de^x = x^3e^x - 3(x^2e^x - \int e^x dx^2) = x^3e^x - 3(x^2e^x - \int e^x 2x dx) =$$
$$= x^3e^x - 3x^2e^x + 6\int x de^x = x^3e^x - 3x^2e^x + 6(xe^x - \int e^x dx) = x^3e^x - 3x^2e^x + 6xe^x - 6\int e^x dx =$$
$$= x^3e^x - 3x^2e^x + 6xe^x - 6e^x + C = e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + C.$$

Приведённые примеры показывают, для каких функций надо применять (или попытаться применить) формулу интегрирования по частям:

Интегралы вида $\int P_n(x)\cdot\cos ax\cdot dx$, $\int P_n(x)\cdot\sin ax\cdot dx$, $\int P_n(x)\cdot a^x\cdot dx$, где $P_n(x)$ - многочлен n-ой степени. Так, для $\int P_n(x)\cdot\cos ax\cdot dx$ имеем $u = P_n(x), dv = \cos ax dx$, $du = (P_n(x))'dx = P_{n-1}(x)dx,\ v = (\sin ax)/a$, и $\int P_n(x)\cdot\cos ax\cdot dx = P_n(x)\cdot(\sin ax)/a - 1/a\int P_{n-1}(x)\cdot\sin ax\cdot dx$. В результате мы получили интеграл того же типа с многочленом степени на единицу меньше. После n-кратного применения формулы степень многочлена уменьшится до нуля, т.е. многочлен превратится в постоянную, и интеграл сведётся к табличному.

Интегралы $\int P_n(x)\cdot f(x)\cdot dx$, где $f(x)$ - трансцендентная функция, имеющая дробно-рациональную или дробно-иррациональную производную (ln x, arctg x, arcctg x, arcsin x, arcos x). В этом случае имеет смысл взять $u = f(x)$, d$v = P_n(x)dx$, для того, чтобы в интеграле $\int v du$ участвовала не $f(x)$, а её производная. Пример:

$$\int x\cdot\arcsin x\cdot dx = \left|\begin{matrix} u = \arcsin x;\ dv = xdx; \\ du = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}};\ v = \dfrac{x^2}{2}\end{matrix}\right| = \frac{x^2}{2}\arcsin x - \int\frac{x^2dx}{2\sqrt{1-x^2}} = \left|\begin{matrix} x = \sin t;\ dx = \cos t dt \\ \sqrt{1-x^2} = \cos t\end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{x^2}{2}\arcsin x - \frac{1}{2}\int\sin^2 t dt = \frac{x^2}{2}\arcsin x - \frac{1}{4}\int(1-\cos 2t)dt = \frac{x^2}{2}\arcsin x - \frac{1}{4}\left(t - \frac{\sin 2t}{2}\right) + C =$$

$$= \frac{x^2}{2}\arcsin x - \frac{t}{4} + \frac{\sin t\cos t}{4} + C = \frac{x^2}{2}\arcsin x - \frac{\arcsin x}{4} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{4} + C.$$

Для некоторых функций применяется приём “сведения интеграла к самому себе”. С помощью интегрирования по частям (возможно, неоднократного) интеграл выражается через такой же интеграл; в результате получается уравнение относительно этого интеграла, решая которое, находим значение интеграла. Примеры:

Найти $I = \int\sqrt{a^2 - x^2}dx$ (это интеграл №19 из **табл. 10.3.неопределённых интегралов**; в предыдущем параграфе мы вычислили этот интеграл с помощью тригонометрической подстановки $x = a\sin t$).

$$I = \int\sqrt{a^2 - x^2}dx = \left|\begin{matrix} u = \sqrt{a^2-x^2};\ dv = dx; \\ du = -\dfrac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}};\ v = x\end{matrix}\right| = x\sqrt{a^2-x^2} + \int\frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = x\sqrt{a^2-x^2} - \int\frac{-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx =$$

$$= x\sqrt{a^2-x^2} - \int\frac{(a^2-x^2)-a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = x\sqrt{a^2-x^2} - \int\frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx + \int\frac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx =$$

$$= x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx + a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = x\sqrt{a^2 - x^2} - I + a^2 \arcsin\frac{x}{a}.$$

В результате для искомого интеграла мы получили уравнение $I = x\sqrt{a^2 - x^2} - I + a^2 \arcsin\frac{x}{a}$, решая которое, получаем $2I = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin\frac{x}{a} + C$ (константа C появилась вследствие того, что интегралы I в правой и левой частях уравнения определены с точностью до произвольной постоянной) и $I = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$ (константа $\frac{C}{2}$ переобозначена через C).

Сведение интеграла к самому себе – самый простой способ нахождения часто встречающихся интегралов вида $\int e^{ax}\cos bx\,dx$ и $\int e^{ax}\sin bx\,dx$ ($a, b = \text{const}$). Например,

$$I = \int e^{ax}\cos bx \cdot dx = \begin{vmatrix} u = \cos bx;\ dv = e^{ax}dx \\ du = -b\sin bx\,dx;\ v = e^{ax}/a \end{vmatrix} = \frac{e^{ax}}{a}\cos bx + \frac{b}{a}\int e^{ax}\sin bx \cdot dx =$$

$$= \begin{vmatrix} u = \sin bx;\ dv = e^{ax}dx \\ du = b\cos bx\,dx;\ v = e^{ax}/a \end{vmatrix} = \frac{e^{ax}}{a}\cos bx + \frac{b}{a}\left(\frac{e^{ax}}{a}\sin bx - \frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bx \cdot dx\right) =$$

$$= \frac{e^{ax}}{a}\cos bx + \frac{be^{ax}}{a^2}\sin bx - \frac{b^2}{a^2}I.$$

Итак, после двукратного интегрирования по частям получено уравнение относительно I: $I = \frac{e^{ax}}{a}\cos bx + \frac{be^{ax}}{a^2}\sin bx - \frac{b^2}{a^2}I$, решение которого $I = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(a\cos bx + b\sin bx) + C$.

При нахождении эти интегралов не принципиально, положим ли мы $u = \cos bx$, $dv = e^{ax}dx$ или $u = e^{ax}$, $dv = \cos bx\,dx$; важно только при втором применении формулы интегрирования по частям загонять под знак дифференциала функцию того же типа, что и при первом (показательную или тригонометрическую).

Ещё один вид формул, которые обычно получаются с помощью интегрирования по частям, и используются для нахождения интегралов - **рекуррентные соотношения**. Если подынтегральная функция зависит от некоторого параметра n, и получено соотношение, которое выражает интеграл через аналогичный интеграл с меньшим значением n, то это соотношение и называется рекуррентным соотношением. Примеры: $I_n = \int \cos^n x \cdot dx$. Представим подынтегральную функцию в виде

$\cos^n x = \cos^{n-2} x \cdot \cos^2 x \quad = \cos^{n-2} x \cdot (1-\sin^2 x) = \cos^{n-2} x - \sin x \cos^{n-2} x \sin x$; интеграл от первого слагаемого аналогичен исходному с значением параметра ***n*** на две единицы меньше; к интегралу от второго слагаемого применим формулу интегрирования по частям:

$$I_n = \int \cos^n x \cdot dx = \int \cos^{n-2} x \cdot dx - \int \sin x \cos^{n-2} x \sin x dx = \left| \begin{array}{l} u = \sin x;\ dv = \cos^{n-2} x \sin x dx; \\ du = \cos x dx;\ v = -\dfrac{\cos^{n-1} x}{n-1}; \end{array} \right| =$$

$$= I_{n-2} - \sin x \left(-\frac{\cos^{n-1} x}{n-1} \right) + \int \left(-\frac{\cos^{n-1} x}{n-1} \right) \cos x \cdot dx = I_{n-2} + \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n-1} - \frac{1}{n-1} \int \cos x^n \cdot dx =$$

$$= I_{n-2} + \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n-1} - \frac{1}{n-1} I_n \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{n-1}\right) I_n = I_{n-2} + \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n-1} \Rightarrow I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} + \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n}$$

.

Теперь, зная $I_1 = \int \cos x \cdot dx = \sin x + C$, $I_2 = \int \cos^2 x \cdot dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 2x}{2} \right) + C$, мы можем выписать $I_3 = \int \cos^3 x \cdot dx = \frac{3-1}{3} I_1 + \frac{\sin x \cos^{3-1} x}{3} = \frac{2}{3} \sin x + \frac{\sin x \cos^2 x}{3} + C$;

$$I_4 = \int \cos^4 x \cdot dx = \frac{4-1}{4} I_2 + \frac{\sin x \cos^{4-1} x}{4} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4}(2x + \sin 2x) + \frac{\sin x \cos^3 x}{4} + C;$$

$$I_5 = \int \cos^5 x \cdot dx = \frac{5-1}{5} I_3 + \frac{\sin x \cos^{5-1} x}{5} = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{3}\left(2 \sin x + \sin x \cos^2 x\right) + \frac{\sin x \cos^4 x}{5} + C$$

и т.д.

Задания практической работы Найти неопределённые интегралы

1.

1.1. $\int x^3 (3x+1)^2 dx$

1.2. $\int -2\sqrt{x}(4-3x)^2 dx$

1.3. $\int \frac{4x^3 + x^4 - -8x^5}{x^3} dx$

1.4. $\int \frac{x^{\frac{1}{4}} - x^{\frac{3}{7}} - x^{\frac{1}{3}}}{x} dx$

1.11. $\int 4x^2 (4x+2)^2 dx$

1.12. $\int \frac{x^2 - 3x^3 + 2x^7}{x} dx$

1.13. $\int \frac{7x^4 - 4x^4 + 6x^4}{x^2} dx$

1.14. $\int \frac{x^{\frac{3}{4}} - x^{\frac{3}{5}} + x^{\frac{2}{3}}}{x} dx$

1.21. $\int 3\sqrt{x}(2-3x)^2 dx$

1.22. $\int \frac{2x^3 + 3x^4 - 5x^6}{x^2} dx$

1.23. $\int \frac{x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{4}{7}} - x^{\frac{1}{2}}}{x} dx$

1.24. $\int \frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[4]{x^5} - \sqrt{x}}{x} dx$

1.5. $\int \frac{\sqrt[5]{x^2}+\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt{x}}{x}dx$ 1.15. $\int \frac{3\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{x}dx$ 1.25. $\int \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}dx$

1.6. $\int \frac{1}{\sqrt{3-x^2}}dx$ 1.16. $\int \frac{3}{\sqrt{4-4x^2}}dx$ 1.26. $\int \frac{3}{\sqrt{x^2+4}}dx$

1.7. $\int \frac{3}{1+x^2}dx$ 1.17. $\int \frac{5}{25+x^2}dx$ 1.27. $\int \frac{2}{2+3x^2}dx$

1.8. $\int \left(e^x+2x-4^x+3x^{\frac{1}{2}}\right)dx;$ 1.18. $\int \left(\frac{2}{x}+8e^x+5^x-x^{-\frac{2}{3}}\right)dx;$ 1.28. $\int \frac{2\sin^3 x+3}{\sin^2 x}dx$

1.9. $\int \frac{2\cos^3 x+5}{\cos^2 x}dx$ 1.19. $\int \frac{2\cos^2 x-4}{\cos^2 x}dx$ 1.29. $\int \frac{1+3\cos^2 x}{\cos^2 x}dx$

1.10. $\int \frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}-6\cos x dx$ 1.20. $\int \frac{1}{2}\sin x+\sqrt[4]{x^7}dx$ 1.30. $\int (1-x)(2-\sqrt{x})dx$

2.

2.1. $\int \frac{\sqrt{3}}{9x^2-3}dx$ 2.11. $\int \frac{1}{\sqrt{5x^2+3}}dx$ 2.21. $\int \frac{1}{3x^2-2}dx$

2.2. $\int \frac{1}{\sqrt{9x^2+3}}dx$ 2.12. $\int \frac{1}{\sqrt{4-7x^2}}dx$ 2.22. $\int \frac{1}{4x^2+3}dx$

2.3. $\int \frac{1}{9x^2+3}dx$ 2.13. $\int \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3-4x^2}}dx$ 2.23. $\int \frac{1}{\sqrt{4x^2+3}}dx$

2.4. $\int \frac{9}{\sqrt{9x^2-3}}dx$ 2.14. $\int \frac{1}{\sqrt{2x^2-9}}dx$ 2.24. $\int \frac{1}{\sqrt{3-4x^2}}dx$

2.5. $\int \frac{1}{\sqrt{3-9x^2}}dx$ 2.15. $\int \frac{1}{2x^2+7}dx$ 2.25. $\int \frac{1}{4x^2-3}dx$

2.6. $\int \frac{1}{7x^2-4}dx$ 2.16. $\int \frac{1}{\sqrt{3x^2+1}}dx$ 2.26. $\int \frac{2}{4+3x^2}dx$

2.7. $\int \frac{3}{\sqrt{7x^2-4}}dx$ 2.17. $\int \frac{1}{3x^2+2}dx$ 2.27. $\int \frac{2}{\sqrt{4x^2-3}}dx$

2.8. $\int \frac{1}{5x^2+3}dx$ 2.18. $\int \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7-2x^2}}dx$ 2.28. $\int \frac{1}{4x^2+7}dx$

2.9. $\int \frac{1}{5x^2-3}dx$ 2.19. $\int \frac{\sqrt{14}}{2x^2-7}dx$ 2.29. $\int \frac{1}{8x^2-9}dx$

2.10. $\int \frac{1}{\sqrt{3-5x^2}}dx$ 2.20. $\int \frac{1}{8x^2+9}dx$ 2.30. $\int \frac{1}{\sqrt{9-8x^2}}dx$

3.

3.1. $\int \frac{dx}{(2x+1)\sqrt[3]{\ln^2(2x+1)}}$ 3.11. $\int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{\ln^3(1-x)}}$ 3.21. $\int \frac{\ln^7(x-7)}{(x-7)}dx$

3.2. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt[3]{\ln^2(x+1)}}$ 3.12. $\int \frac{\sqrt{\ln^3(1+x)}}{(1+x)}dx$ 3.22. $\int \frac{\ln^5(x-8)}{(x-8)}dx$

3.3. $\int \frac{dx}{(1-x)\sqrt[3]{\ln^2(1-x)}}$ 3.13. $\int \frac{\sqrt{\ln\ (2x-1)}}{(2x-1)}dx$ 3.23. $\int \frac{\ln^6(x+9)}{(x+9)}dx$

3.4. $\int \frac{\sqrt[3]{\ln^2(1-x)}}{(1-x)}dx$ 3.14. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt[3]{\ln\ (x+1)}}$ 3.24. $\int \frac{\ln\ (3x+5)}{(3x+5)}dx$

3.5. $\int \frac{\sqrt[5]{\ln^2(1+x)}}{(1+x)}dx$ 3.15. $\int \frac{\sqrt{\ln^3(6+x)}}{(6+x)}dx$ 3.25. $\int \frac{\ln^4(3x+1)}{(3x+1)}dx$

3.6. $\int \frac{\sqrt[7]{\ln^2(1+x)}}{(1+x)}dx$ 3.16. $\int \frac{\sqrt[3]{\ln\ (x+4)}}{(x+4)}dx$ 3.26. $\int \frac{dx}{(x+1)\ln^2(x+1)}$

3.7. $\int \frac{\sqrt{\ln^5(1+x)}}{(1+x)}dx$ 3.17. $\int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{\ln\ (x+2)}}$ 3.27. $\int \frac{dx}{(x-3)\ln^4(x-3)}$

3.8. $\int \frac{\sqrt[3]{\ln\ (1+3x)}}{(1+3x)}dx$ 3.18. $\int \frac{\sqrt{\ln^7(1+x)}}{(1+x)}dx$ 3.28. $\int \frac{dx}{(x+3)\ln^4(x+3)}$

3.9. $\int \frac{\sqrt{\ln^3(3+x)}}{(3+x)}dx$ 3.19. $\int \frac{\ln^3(1-x)}{(1-x)}dx$ 3.29. $\int \frac{dx}{(x-4)\ln^5(x-4)}$

3.10. $\int \frac{\sqrt[3]{\ln^4(x-5)}}{(x-5)}dx$ 3.20. $\int \frac{\ln^3(x-5)}{(x-5)}dx$ 3.30. $\int \frac{dx}{(x+5)\ln^3(x+5)}$

4

4.1. $\int \sin^4 2x\cdot\cos 2x dx$ 4.11. $\int \frac{\cos x}{\sqrt{(\sin x-4)^3}}dx$ 4.21. $\int \frac{\sin 3x}{\cos^2 3x}dx$

4.2. $\int \cos^7 2x\cdot\sin 2x dx$ 4.12. $\int \frac{\sin 5x}{\sqrt{\cos 5x}}dx$ 4.22. $\int \frac{\cos 4x}{\sin^3 4x}dx$

4.3. $\int \sin^3 4x \cdot \cos 4x dx$

4.4. $\int \frac{\cos 2x}{\sin^3 2x} dx$

4.5. $\int \frac{\sin 3x}{\cos^4 3x} dx$

4.6. $\int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x}} dx$

4.7. $\int \frac{\sin x}{\cos^5 x} dx$

4.8. $\int \frac{\cos x}{3 - \sin x} dx$

4.9. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x + 3}} dx$

4.10. $\int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x + 1}} dx$

4.13. $\int \sqrt[3]{\cos 2x} \cdot \sin 2x dx$

4.14. $\int \sin^3 5x \cdot \cos 5x dx$

4.15. $\int \frac{\cos 5x}{\sqrt{\sin^3 5x}} dx$

4.16. $\int \sqrt{\cos 7x} \cdot \sin 7x dx$

4.17. $\int \sqrt{\cos^3 2x} \cdot \sin 2x dx$

4.18. $\int \frac{\cos 6x}{\sin^7 6x} dx$

4.19. $\int \frac{\sin 4x}{\sqrt[3]{\cos 4x}} dx$

4.20. $\int \frac{\cos 6x}{\sin^4 6x} dx$

4.23. $\int \sqrt{\cos^3 2x} \cdot \sin 2x dx$

4.24. $\int \frac{\sin 5x}{\cos^4 5x} dx$

4.25. $\int \frac{\sin 4x}{\sqrt[3]{\cos^2 4x}} dx$

4.26. $\int \sin^6 3x \cdot \cos 3x dx$

4.27. $\int \sin^4 8x \cdot \cos 8x dx$

4.28. $\int \sin^5 4x \cdot \cos 4x dx$

4.29. $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt[3]{\cos^4 2x}} dx$

4.30. $\int \frac{\cos 6x}{\sqrt{\sin^3 6x}} dx$

5.

5.1. $\int \frac{\sqrt{arctg^6 3x}}{1+9x^2} dx$

5.2. $\int \frac{\sqrt{arctg^2 x}}{1+x^2} dx$

5.3. $\int \frac{\sqrt{arctg^3 x}}{1+x^2} dx$

5.4. $\int \frac{\sqrt[3]{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$

5.5. $\int \frac{\sqrt[3]{\arccos^2 x}}{\sqrt{1+x^2}} dx$

5.6. $\int \frac{\arccos^2 3x}{\sqrt{1-9x^2}} dx$

5.7. $\int \frac{\arccos^3 x}{\sqrt{1-9x^2}} dx$

5.11. $\int \frac{arctg^7 3x}{1+9x^2} dx$ 5.20.

5.12. $\int \frac{\arccos^6 3x}{1+9x^2} dx$

5.13. $\int \frac{\arcsin^3 2x}{\sqrt{1-4x^2}} dx$.

5.14. $\int \frac{\arcsin^4 x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

5.15. $\int \frac{\arccos 4x}{\sqrt{1-16x^2}} dx$ 23.

5.16. $\int \frac{\arccos^7 x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

5.17. $\int \frac{arcctg^4 5x}{1+25x^2} dx$

5.21. $\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{arctgx}}$

5.22. $\int \frac{dx}{(1+x^2) arctg^5 x}$

5.23. $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)} \arcsin^4 x}$

5.24. $\int \frac{\sqrt[3]{arctg 2x}}{1+4x^2} dx$

5.25. $\int \frac{\sqrt[3]{\arccos 2x}}{\sqrt{1-4x^2}} dx$

5.26. $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-25x^2)} \arcsin 5x}$

5.27. $\int \frac{arctg^8 3x}{1+9x^2} dx$

$5.8. \int \frac{arctg^3 2x}{1+4x^2}dx$ $5.18. \int \frac{\arcsin^2 5x}{\sqrt{1-25x^2}}dx$ $5.12. \int \frac{\arccos^2 7x}{\sqrt{1-49x^2}}dx$

$5.9. \int \frac{\arcsin^5 2x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$ $5.19. \int \frac{1}{(1+x^2)arctg^3 x}dx$ $5.29. \int \frac{\sqrt[5]{arctg^3 x}}{1+x^2}dx$

$5.10. \int \frac{\arccos^3 2x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$ $5.20. \int \frac{1}{(1+x^2)arctg^7 x}dx$ $5.30. \int \frac{arctg^4 8x}{1+64x^2}dx$

6.

$6.1. \int \frac{x-1}{7x^2+4}dx$ $6.11. \int \frac{x-1}{5-2x^2}dx$ $6.21. \int \frac{2x+3}{1-3x^2}dx$

$6.2. \int \frac{1-2x}{5x^2-1}dx$ $6.12. \int \frac{2x+3}{5x^2+2}dx$ $6.22. \int \frac{x-3}{4x^2+1}dx$

$6.3. \int \frac{2x+1}{5x^2+1}dx$ $6.13. \int \frac{x-3}{1-4x^2}dx$ $6.23. \int \frac{3x-1}{4-x^2}dx$

$6.4. \int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+4}}dx$ $6.14. \int \frac{5x-2}{x^2+9}dx$ $6.24. \int \frac{2x+5}{\sqrt{5x^2+1}}dx$

$6.5. \int \frac{3x-2}{2x^2+7}dx$ $6.15. \int \frac{1-2x}{\sqrt{3x^2+2}}dx$ $6.25. \int \frac{2x-4}{x^2+16}dx$

$6.6. \int \frac{5-x}{3x^2+1}dx$ $6.16. \int \frac{2x-3}{\sqrt{4-x^2}}dx$ $6.26. \int \frac{2x-1}{\sqrt{5-3x^2}}dx$

$6.7. \int \frac{x+5}{3x^2+1}dx$ $6.17. \int \frac{3x+4}{5-2x^2}dx$ $6.27. \int \frac{3x-3}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$6.8. \int \frac{2x-5}{\sqrt{7x^2+3}}dx$ $6.18. \int \frac{5x+2}{\sqrt{x^2+9}}dx$ $6.28. \int \frac{3-2x}{x^2-8}dx$

$6.9. \int \frac{2x-3}{\sqrt{x^2+9}}dx$ $6.19. \int \frac{x-5}{8-4x^2}dx$ $6.29. \int \frac{x+4}{7x^2+3}dx$

$6.10. \int \frac{3x-2}{3x^2+1}dx$ $6.20. \int \frac{3x+2}{\sqrt{2x^2-1}}dx$ $6.30. \int \frac{x-5}{\sqrt{4-9x^2}}dx$

7.

$7.1. \int \frac{\sin x dx}{1+\cos^2 x}$ $7.11. \int \sin^2 x \cdot \cos x dx$ $7.21. \int x^2 \sin x^3 dx$

$7.2. \int \sqrt[3]{(1+2x)^2}dx$ $7.12. \int \sqrt[5]{(7-3x)^2}dx$ $7.22. \int \sqrt[4]{(1-4x)^3}dx$

7.3. $\int \frac{1}{\sqrt[4]{(1-4x)^3}}dx$

7.13. $\int \frac{1}{\sqrt[4]{(2+5x)}}dx$

7.23. $\int \frac{1}{\sqrt[3]{(1-6x)^2}}dx$

7.4. $\int (8x+5)^{10}dx$

7.14. $\int 2(3x-5)^5 dx$

7.24. $\int 3(5x-8)^4 dx$

7.5. $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$

7.15. $\int \frac{x^2}{\sqrt{2+x^3}}dx$

7.25. $\int \frac{x^3}{\sqrt{2-x^4}}dx$

7.6. $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

7.16. $\int x^2\cos(4-x^3)dx$

7.26. $\int x^2\cos(x^3+5)dx$

7.7. $\int x^3\sin 3x^4 dx$

7.17. $\int x^2\sin 2x^3 dx$

7.27. $\int \frac{\sin 3x}{2+\cos 3x}dx$

7.8. $\int \frac{\sin 2x}{1-\cos 2x}dx$

7.18. $\int (2x^3+1)^4 x^2 dx$

7.28. $\int (3x^3-1)^5 x^2 dx$

7.9. $\int (2x^3+1)^4 x^2 dx$

7.19. $\int e^{-3x^2+1}\cdot x dx$

7.29. $\int e^{x^3+1}\cdot x^2 dx$

7.10. $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

7.20. $\int \frac{e^x}{(e^x+1)}dx$

7.30. $\int \frac{e^{3x}}{(e^{3x}-1)}dx$

8.

1. $\int x\cos 6x\,dx$

11. $\int x\cos(x-7)dx$

1.21. $\int arctg\frac{x}{5}dx$

2. $\int x\sin(x-5)dx$

12. $\int \ln(x+12)dx$

22. $\int \arcsin\frac{x}{5}dx$

3. $\int \arcsin 3x\,dx$

13. $\int (x-4)e^x\,dx$

23. $\int \arccos 2x\,dx$

4. $\int arctg\,8x\,dx$

14. $\int x e^{-6x}\,dx$

1.24. $\int \ln(2x-1)dx$

5. $\int x\sin(x-2)dx$

15. $\int arctg\,7x\,dx$

1.25. $\int \ln(2x+3)dx$

6. $\int \arcsin 8x\,dx$

1.16. $\int \arcsin 5x\,dx$

1.26. $\int \arccos\frac{x}{5}dx$

7. $\int x\sin(x+3)dx$

1.17. $\int \ln(x-7)dx$

1.27. $\int arctg\frac{x}{4}dx$

8. $\int x\cos(x+4)dx$

1.18. $\int x\cos(x+6)dx$

1.28. $\int \arcsin\frac{x}{7}dx$

9. $\int \arccos 7x\,dx$

1.19. $\int arctg\frac{x}{2}dx$

1.29. $\int arctg\,6x\,dx$

$10.\int \ln(2x-4)\,dx$ $1.20.\int \ln(x+8)\,dx$ $1.30.\int \arccos\frac{x}{3}\,dx$

2. *Найти интеграл* $\int (\kappa x+\kappa)e^{\kappa x}\,dx$, где к – порядковый номер в журнале

3. *Найти интеграл* $\int (\kappa x-4)\sin \kappa x\,dx$, где к – порядковый номер в журнале

Контрольные вопросы:

1.Таблица интегралов .
2. В чем суть метода добавочного коэффициента?
3.Метод подстановки.
4.Метод интегрирования по частям.

Практическая работа №12 по теме

«Интегрирование рациональных дробей»

Цель: проверить умение интегрировать рациональные дроби

Время выполнения 90 минут

Материальное обеспечение
1.Теоретические сведения
2.Задание
3.Лист А 4
4.Калькуляторы

Порядок выполнения работы
1.Изучить задание
2. Изучить теоретические сведения
3. Выполнить и оформить работу
4.Показать результаты преподавателю

Домашнее задание
1.Подготовить ответы на контрольные вопросы

Теоретические сведения

Рациональные дроби. Простейшие рациональные дроби и их интегрирование

Далеко не всякая элементарная функция имеет интеграл, выражающийся в элементарных функциях. Поэтому очень важно выделить такие классы функций , интегралы которых выражаются через элементарные функции. Простейшим из этих классов является класс рациональных функций.

Всякую рациональную функцию можно представить в виде рациональной дроби, т. е. в виде отношения двух многочленов:

$$\frac{Q(x)}{f(x)} = \frac{B_0 x^m + B_1 x^{m-1} + \ldots + B_m}{A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_n}.$$

Не ограничивая общности рассуждения, будем предполагать, что эти многочлены не имеют общих корней.

Если степень числителя ниже степени знаменателя, то дробь называется правильной, в противном случае дробь называется неправильной.

Если дробь неправильная, то, разделив числитель на знаменатель (по правилу деления многочленов), можно представить данную дробь в виде суммы многочлена и некоторой правильной дроби:

$$\frac{Q(x)}{f(x)} = M(x) + \frac{F(x)}{f(x)};$$

здесь M(x)-многочлен, а $\frac{F(x)}{f(x)}$- правильная дробь.

Пример. Пусть дана неправильная рациональная дробь

$$\frac{x^4 - 3}{x^2 + 2x + 1}$$

Разделив числитель на знаменатель (по правилу деления многочленов), получим

$$\frac{x^4 - 3}{x^2 + 2x + 1} = x^2 - 2x + 3 - \frac{4x + 6}{x^2 + 2x + 1}.$$

Так как интегрирование многочленов не представляет затруднений, то основная трудность при интегрировании рациональных дробей заключается в интегрировании правильных рациональных дробей.

Определение. Правильные рациональные дроби вида

(1). $\frac{A}{x-a}$

(2). $\frac{A}{(x-a)^k}$ (k-целое положительное число≥ 2

(3) $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$ (корни знаменателя комплексные, т.е. $\frac{p^2}{4} - q < 0$).

(4) $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$ (k-целое положительное число ≥ 2 ;корни знаменателя комплексные), называются простейшими дробями (1),(2),(3) и (4) типов.

Интегрирование простейших дробей типа (1),(2) и (3) не составляет большой трудности, поэтому мы приведем их интегрирование без каких-либо дополнительных пояснений:

(1) $\int \frac{A}{x-a}dx = A\ln|x-a|+C$

(2) $\frac{A}{(x-a)^k}dx = A\int (x-a)^{-k}dx = A\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1}+C = \frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}}+C$

(3) $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p)+(B-\frac{Ap}{2})}{x^2+px+q}dx = \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}dx + (B-\frac{Ap}{2})\int \frac{dx}{x^2+px+q} =$

$= \frac{A}{2}\ln|x^2+px+q| + (B-\frac{Ap}{2})\int \frac{dx}{(x+\frac{p}{2})^2+(q-\frac{p^2}{4})} = \frac{A}{2}\ln|x^2+px+q| + \frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}arctg\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C$

Более сложных вычислений требует интегрирование простейших дробей (4) типа. Пусть нам дан интеграл такого типа:

(4) $\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}dx$

Произведем преобразования:

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p)+(B-\frac{Ap}{2})}{(x^2+px+q)^k}dx = \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k}dx + (B-\frac{Ap}{2})\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k}$$

Первый интеграл берется подстановкой $x^2+px+q=t, (2x+p)dx=dt$:

$$\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k}dx = \int \frac{dt}{t^k} = \int t^{-k}dt = \frac{t^{-1k+1}}{1-k}+C = \frac{1}{(1-k)(x^2+px+q)^{k-1}}+C$$

Второй интеграл- обозначим его через I_k-запишем в виде

$$I_k = \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k} = \int \frac{dx}{[(x+\frac{p}{2})^2+(q-\frac{p^2}{4})]^k} = \int \frac{dt}{(t^2+m^2)^k},$$

полагая

$$x+\frac{p}{2}=t, dx=dt, q-\frac{p^2}{4}=m^2$$

(по предположению корни знаменателя комплексные, а следовательно, $q-\frac{p^2}{4}>0$). Далее поступаем следующим образом:

$$I_k=\int\frac{dt}{(t^2+m^2)^k}=\frac{1}{m^2}\int\frac{(t^2+m^2)-t^2}{(t^2+m^2)^k}dt=\frac{1}{m^2}\int\frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}}-\frac{1}{m^2}\int\frac{t^2}{(t^2+m^2)^k}dt.$$

Преобразуем интеграл:

$$\int\frac{t^2dt}{(t^2+m^2)^k}=\int\frac{t\cdot tdt}{(t^2+m^2)^k}=\frac{1}{2}\int t\frac{d(t^2+m^2)}{(t^2+m^2)^k}=-\frac{1}{2(k-1)}\int td(\frac{1}{(t^2+m^2)^{k-1}}).$$

Интегрируя по частям, будем иметь

$$\int\frac{t^2dt}{(t^2+m^2)^k}=-\frac{1}{2(k-1)}[t\frac{1}{(t^2+m^2)^{k-1}}-\int\frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}}].$$

Подставляя это выражение в равенство (1), получим

$$I_k=\int\frac{dt}{(t^2+m^2)^k}=$$

$$=\frac{1}{m^2}\int\frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}}+\frac{1}{m^2}\frac{1}{2(k-1)}[\frac{t}{(t^2+m^2)^{k-1}}-\int\frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}}]=$$

$$=\frac{t}{2m^2(k-1)(t^2+m^2)^{k-1}}+\frac{2k-3}{2m^2(k-1)}\int\frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}}.$$

В правой части содержится интеграл того же типа, что I_k, но показатель степени знаменателя подынтегральной функции на единицу ниже $(k-1)$;таким образом, мы выразили I_k через $\boldsymbol{I}_{k-1}$. Продолжая идти тем же путем, дойдем до известного интеграла:

$$I_1=\int\frac{dt}{t^2+m^2}=\frac{1}{m}arctg\frac{t}{m}+C$$

Подставляя затем всюду вместо t и m их значения, получим выражение интеграла (4) через x и заданные числа A, B, p,q.

Вывод

Вид простейших дробей определяется корнями знаменателя f(x). Здесь возможны следующие случаи.

1.Случай.

Корни знаменателя действительны и различны, т. е.

F(x)=(x-a)(x-b)…(x-d).

В этом случае дробь $\frac{F(x)}{f(x)}$ разлагается на простейшие дроби 1типа:

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\ldots\frac{D}{x-d,}$$

и тогда

$$\int\frac{F(x)}{f(x)}dx=\int\frac{A}{x-a}dx+\int\frac{B}{x-b}dx+\ldots\int\frac{D}{x-d}dx=A\ln|x-a|+B\ln|x-b|+\ldots+D\ln|x-d|+C$$

2. Случай.

Корни знаменателя действительные, причем некоторые из них кратные:

$$f(x)=(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\ldots(x-d)^{\delta}.$$

В этом случае дробь $\frac{F(x)}{f(x)}$ разлагается на простейшие дроби 1и 2 типов.

Пример 1.

$$\int\frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}dx=-\int\frac{dx}{(x+1)^3}+\frac{1}{3}\int\frac{dx}{(x+1)^2}-\frac{2}{9}\int\frac{dx}{x+1}+\frac{2}{9}\int\frac{dx}{x-2}=\frac{1}{2}\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{3(x+1)}-\frac{2}{9}\ln|x+1|+\frac{2}{9}\ln|x-2|+C=-\frac{2x-1}{6(x+1)^2}+\frac{2}{9}\ln|\frac{x-2}{x+1}|+C$$

3. Случай.

Среди корней знаменателя есть комплексные неповторяющиеся(т.е. различные):

$$f(x)=(x^2+px+q)\ldots(x^2+lx+s)(x-a)^{\alpha}\ldots(x-d)^{\delta}.$$

В этом случае дробь $\frac{F(x)}{f(x)}$ разлагается на простейшие дроби 1,2 и 3 типов.

Пример 2.Требуется вычислить интеграл

$\int\frac{xdx}{(x^2+1)(x-1)}$.Разложим подынтегральную дробь на простейшие:

$$\frac{x}{(x^2+1)(x-1)}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{C}{x-1}$$

Следовательно,

$$x=(Ax+B)(x-1)+C(x^2+1).$$

Полагая *x=1*, получим 1=2C, C= S; полагая *x=0*, получим 0= -B+C, B=1/2.

Приравнивая коэффициенты при x^2, получим 0=A+C, откуда A= - S. Таким образом ,

$$\int\frac{xdx}{(x^2+1)(x-1)}=-\frac{1}{2}\int\frac{x-1}{x^2+1}dx+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}=-\frac{1}{2}\int\frac{xdx}{x^2+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}=$$

$$=-\frac{1}{4}\ln|x^2+1|+\frac{1}{2}arctgx+\frac{1}{2}\ln|x-1|+C$$

4. Случай.

Среди корней знаменателя есть комплексные кратные:

$$f(x)=(x^2+px+q)^{\mu}...(x^2+lx+s)^{\nu}(x-a)^{\alpha}...(x-d)^{\delta}.$$

В этом случае разложение дроби $\frac{F(x)}{f(x)}$ будет содержать и простейшие дроби 4 типа.

Пример 3. Требуется вычислить интеграл

$$\int\frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)}dx.$$

Решение. Разлагаем дробь на простейшие:

$$\frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)}=\frac{Ax+B}{(x^2+2x+3)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+2x+3}+\frac{E}{x+1},$$

откуда

$$x^4+4x^3+11x^2+12x+8=(Ax+B)(x+1)+(Cx+D)(x^2+2x+3)(x+1)+E(x^2+2x+3)^2.$$

Комбинируя указанные выше методы определения коэффициентов, находим A=1, B= - 1, C=0, D=0, E=1.

Таким образом, получаем

$$\int\frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3^2)(x+1)}dx=\int\frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2}dx+\int\frac{dx}{x+1}=-\frac{x+2}{2(x^2+2x+3)}-\frac{\sqrt{2}}{4}arctg\frac{x+1}{\sqrt{2}}+\ln|x+1|+C$$

Из всего изложенного следует, что интеграл от любой рациональной функции может быть выражен через элементарные функции в конечном виде, а именно:

1)через логарифмы- в случаях простейших дробей 1 типа;

2)через рациональные функции- в случае простейших дробей 2 типа

3)через логарифмы и арктангенсы- в случае простейших дробей 3 типа

4)через рациональные функции и арктангенсы- в случае простейших дробей 4 типа.

Задания практической работы (по выбору)

Задани1.

1. $\int \frac{dx}{4x^2-5x+4}$

2. $\int \frac{dx}{x^2+4x+10}$

3. $\int \frac{dx}{5x^2+2x+7}$

4. $\int \frac{dx}{2x^2+x-6}$

5. $\int \frac{dx}{2x^2-2x+7}$

6. $\int \frac{dx}{2x^2-11x+2}$

7. $\int \frac{dx}{2x^2+x+2}$

8. $\int \frac{dx}{3x^2-12x+3}$

9. $\int \frac{dx}{2x^2-2x+5}$

10. $\int \frac{dx}{2x^2-3x-2}$

11. $\int \frac{dx}{2x^2+3x}$

12. $\int \frac{dx}{8-2x-x^2}$

13. $\int \frac{dx}{5x-x^2-6}$

14. $\int \frac{dx}{x^2+4x+25}$

15. $\int \frac{dx}{2x^2-8x+30}$

16. $\int \frac{dx}{3x^2-9x+6}$

17. $\int \frac{dx}{2x^2-6x+1}$

18. $\int \frac{dx}{2x^2-3x+2}$

19. $\int \frac{dx}{1-2x-3x^2}$

20. $\int \frac{dx}{2x^2+3x+6}$

21. $\int \frac{dx}{x^2-5x+6}$

22. $\int \frac{dx}{2x-3-4x^2}$

23. $\int \frac{dx}{3x^2-8x-3}$

24. $\int \frac{dx}{x^2+7x+11}$

25. $\int \frac{dx}{2x^2-3x+1}$

26. $\int \frac{dx}{5x^2-10x+25}$

27. $\int \frac{dx}{2x^2+6x+3}$

28. $\int \frac{dx}{x^2-6x+8}$

29. $\int \frac{dx}{3x^2+5x+1}$

30. $\int \frac{dx}{5-2x-x^2}$

Задание 2

В 1

а) $\int \frac{x-6}{(x+1)(x+2)(x+3)} dx$

б) $\int \frac{x^3-6x^2+13x-6}{(x+2)(x-2)^3} dx$

в) $\int \frac{x^3+4x^2+4x+2}{(1+x)^2(X^2+x+1)} dx$

В 16

а) $\int \frac{2x-5}{(x+1)(x+2)X} dx$

б) $\int \frac{x^3+6x^2+13x+8}{X(x+2)^3} dx$

в) $\int \frac{x^3+4x^2+3x+2}{(1+x)^2(x^2+1)} dx$

В 2

а) $\int \frac{3x-4}{(X^2-1)} dx$

б) $\int \frac{x^3+6x^2+13x+9}{(x+1)(x+2)^3} dx$

В 17

а) $\int \frac{4x-3}{X(x-2)(x-3)} dx$

б) $\int \frac{x^3+6x^2+14x+10}{(x+1)(x+2)^3} dx$

в) $\int \frac{2x^3+7x^2+7x-1}{(2+x)^2(X^2+2x+2)}dx$

B 3

а) $\int \frac{5x-2}{(x-1)(x-2)(x-3)}dx$

б) $\int \frac{x^3-6x^2+11x-10}{(x+2)(x-2)^3}dx$

в) $\int \frac{x^3+6x^2+9x+6}{(X+1)^2(X^2+x+1)}dx$

B 4

а) $\int \frac{7x}{(x-3)(x-42)(x-5)}dx$

б) $\int \frac{2x^3+6x^2+7x+6}{X(x+1)^3}dx$

в) $\int \frac{3x^3+6x^2+5x-1}{(1+X)^2(X^2+2)}dx$

B 5

а) $\int \frac{9x+2}{(x-5)(x-6)(x-7)}dx$

б) $\int \frac{x^3-6x^2+13x-7}{(x+1)(x-2)^3}dx$

в) $\int \frac{x^3+6x^2+8x+8}{(2+x)^2(x^2+4)}dx$

B 6

а) $\int \frac{-4x-5}{(x+2)(x+3)(x+4)}dx$

б) $\int \frac{x^3-6x^2+10x-10}{(x+1)(x-2)^3}dx$

в) $\int \frac{2x^3-4x^2-6x-12}{(-1+x)^2(x^2+4x+5)}dx$

B 7

а) $\int \frac{-6x-7}{(x+4)(x+5)(x+6)}dx$

б) $\int \frac{3x^3+9x^2+10x+2}{(x-1)(x+1)^3}dx$

в) $\int \frac{x^3+2x^2+10x}{(1+x)^2(x^2-x+1)}dx$

в) $\int \frac{2x^3+4x^2+2x-1}{(1+x)^2(x^2+2x+2)}dx$

B 18

а) $\int \frac{6x-1}{(x-2)(x-3)(x-4)}dx$

б) $\int \frac{x^3+6x^2+11x+7}{(x+1)(x+2)^3}dx$

в) $\int \frac{2x^3+11x^2+16x+10}{(2+x)^2(x^2+2x+3)}dx$

B 19

а) $\int \frac{10x+3}{(x-6)(x-7)(x-8)}dx$

б) $\int \frac{x^3+6x^2+10x+10}{(x-1)(x+2)^3}dx$

в) $\int \frac{x^3+9x^2+21x+21}{(3+x)^2(x^2+3)}dx$

B 20

а) $\int \frac{-5x-6}{(x+3)(x+4)(x+5)}dx$

б) $\int \frac{x^3-6x^2+13x-8}{X(x-2)^3}dx$

в) $\int \frac{x^3+5x^2+12x+4}{(2+x)^2(x^2+4)}dx$

B 21

а) $\int \frac{-7x-8}{(x+5)(x+6)(x+7)}dx$

б) $\int \frac{x^3-6x^2+14x-8}{(x+1)(x-2)^3}dx$

в) $\int \frac{-3x^3+13x^2-13x+11}{(-2+x)^2(x^2-x+1)}dx$

B 22

а) $\int \frac{-9x-10}{(x+7)(x+8)(x+9)}dx$

б) $\int \frac{x^3+x+2}{(x+2)x^3}dx$

в) $\int \frac{3x^3+46+x}{(-1+x)^2(x^2+9)}dx$

В 8

а) $\int \frac{-8x-9}{(x+6)(x+7)(x+8)}dx$

б) $\int \frac{2x^3+6x^2+7x+4}{(x+2)(x+1)^3}dx$

в) $\int \frac{4x^3+24x^2+20x-28}{(3+x)^2(x^2+x+1)}dx$

В 9

а) $\int \frac{-10x-11}{(x+8)(x+9)(x+10)}dx$

б) $\int \frac{2x^3+6x^2+7x}{(x-2)(+12)^3}dx$

в) $\int \frac{x^3+x+1}{(x^2+x+1)(x^2+1)}dx$

В 10

а) $\int \frac{-12x-13}{(x+10)(x+11)(x+12)}dx$

б) $\int \frac{x^3+6x^2+4x+24}{(x-2)(x+2)^3}dx$

в) $\int \frac{2x^3+4x^2+2x+2}{(x+1+x^2)(x^2+x+2)}dx$

В 11

а) $\int \frac{-14x-15}{(x+8)(x+9)(x+10)}dx$

б) $\int \frac{x^3+6x^2+18x-4}{(x-2)(x+2)^3}dx$

в) $\int \frac{4x^3+4+3x}{(1+x^2)(x^2+x+1)}dx$

В 12

а) $\int \frac{-13x-5}{(x+3)(x-2)(x+1)}dx$

б) $\int \frac{x^3-6x^2+14x-4}{(x+2)(x-2)^3}dx$

в) $\int \frac{2x^3+1-x}{(x^2+1)(x^2-x+1)}dx$

В 13

а) $\int \frac{-9x-1}{(x-3)(x+4)(x-5)}dx$

б) $\int \frac{2x^3-6x^2+7x-4}{(x-2)(x-1)^3}dx$

В 23

а) $\int \frac{-11x-12}{(x+9)(x+10)(x+11)}dx$

б) $\int \frac{2x^3+x+1}{(x+1)x^3}dx$

в) $\int \frac{2x^3+3x^2+3x+2}{(1+x^2)(x^2+x+1)}dx$

В 24

а) $\int \frac{-13x-14}{(X+9)(x+10)(x+11)}dx$

б) $\int \frac{2x^3+6x^2+5x}{(x+2)(x+1)^3}dx$

в) $\int \frac{x^3+4x^2+4x+2}{(1+x)^{2(x^2}+x+1)}dx$

В 25

а) $\int \frac{-15x-16}{(x+7)(x+8)(x+9)}dx$

б) $\int \frac{2x^3+6x^2+5x+4}{(x-2)(x+1)^3}dx$

в) $\int \frac{x^3+x+3}{(1+x^2)(x^2+x+1)}dx$

В 26

а) $\int \frac{-11x-3}{X(x+1)(x-2)}dx$

б) $\int \frac{x^3+6x^2+14x+4}{(x-2)(x+2)^3}dx$

в) $\int \frac{3x^3+4x^2+6x}{(2+x^2)(x^2+x+1)}dx$

В 27

а) $\int \frac{-7x+1}{(x-6)(x+7)(x-8)}dx$

б) $\int \frac{x^3+6x^2+10x+12}{(x-2)(x+2)^3}dx$

в) $\int \frac{x^3+x^2+1}{(1+x^2)(x^2-x+1)}dx$

В 28

а) $\int \frac{-3x+5}{(x-1)(x-2)(x-3)}dx$

б) $\int \frac{x^3+6x^2+15x+2}{(x-2)(x+2)^3}dx$

в) $\int \frac{x^3+x+1}{(1+x^2)(x^2+x+1)}dx$

В 14

а) $\int \frac{-5x+3}{(x-9)(x-2)(x-11)}dx$

б) $\int \frac{x^3+6x^2-10x+52}{(x-2)(x+2)^3}dx$

в) $\int \frac{x^3+2x^2+x+1}{(1+x^2)(x^2+x+1)}dx$

В 15

а) $\int \frac{-x+7}{(x+1)(x+2)(x+3)}dx$

б) $\int \frac{x^3+6x^2+4x+24}{(x+2)(x-2)^3}dx$

в) $\int \frac{2x^3+2x^2+2x+1}{(X^2+x+1)(x^2+1)}dx$

в) $\int \frac{2x^3+2x+1}{(x^2+1)(x^2-x+1)}dx$

В 29

а) $\int \frac{x+9}{(x-1)(x+2)(x-1)}dx$

б) $\int \frac{2x^3-6x^2+7x}{(x+2)(x-1)^3}dx$

в) $\int \frac{4+x}{(2+x^2)(x^2+x+2)}dx$

В 30

а) $\int \frac{8x+1}{(x-4)(x-5)(x-6)}dx$

б) $\int \frac{x^3-6x^2+13x-6}{(x+2)(x-2)^3}dx$

в) $\int \frac{3x^3+7x^2+12x+6}{(x^2+x+3)(x^2+2x+3)}dx$

Задание 3

1. $\int \frac{x+1}{2x^2+3x-4}dx$
2. $\int \frac{x+6}{3x^2+x+1}dx$
3. $\int \frac{2x-1}{3x^2-2x+6}dx$
4. $\int \frac{xdx}{2x^2+x+5}dx$
5. $\int \frac{x+5}{x^2+x-2}dx$
6. $\int \frac{3x-2}{5x^2-3x+2}dx$
7. $\int \frac{x+4}{2x^2-6x-8}dx$
8. $\int \frac{x+4}{2x^2-7x+1}dx$
9. $\int \frac{5x-2}{2x^2-5x+2}dx$
10. $\int \frac{4x-1}{4x^2-4x+5}dx$
11. $\int \frac{x+1}{2x^2+x+1}dx$
12. $\int \frac{x+1}{3x^2-2x-3}dx$
13. $\int \frac{4x+8}{4x^2+6x-13}dx$
14. $\int \frac{5x+1}{x^2-4x+1}dx$
15. $\int \frac{xdx}{2x^2+2x+5}dx$
16. $\int \frac{x-3}{x^2-5x+4}dx$
17. $\int \frac{2x-1}{2x^2+8x-6}dx$
18. $\int \frac{2-x}{4x^2+16x-12}dx$
19. $\int \frac{2x-1}{3x^2-6x+9}dx$
20. $\int \frac{2x-1}{3+x-2x^2}dx$
21. $\int \frac{x-4}{3x^2+x-1}dx$
22. $\int \frac{3x+1}{x^2-4x-2}dx$
23. $\int \frac{x-5}{2x^2+x-4}dx$
24. $\int \frac{2x+3}{3x^2+2x-7}dx$
25. $\int \frac{x-3}{4x^2+2x-3}dx$
26. $\int \frac{x+2}{3x^2-x+5}dx$
27. $\int \frac{3x-2}{x^2+5x-1}dx$
28. $\int \frac{x-7}{x^2+5x-1}dx$
29. $\int \frac{2x+1}{5x^2+2x+10}dx$
30. $\int \frac{x-4}{5x^2-x+7}dx$

Задание 4

1. $\int \frac{3x^2+20x+9}{(x^2+4x+3)(x+5)}dx$;

2. $\int \frac{12}{(x^2-2x-3)(x-2)}dx$;

3. $\int \frac{43x-67}{(x^2-x-12)(x-1)}dx$;

4. $\int \frac{2x^4+8x^3+9x^2-7}{(x^2+x-2)(x+3)}dx$;

5. $\int \frac{8x}{(x^2+6x+5)(x+3)}dx$;

6. $\int \frac{6x}{(x^3-1)}dx$;

7. $\int \frac{2x+22}{(x^2-2x+10)(x+2)}dx$;

8. $\int \frac{5x^2+17x+36}{(x^2+6x+13)(x+1)}dx$;

9. $\int \frac{6x^2+6x-6}{(x^2+x-2)(x+1)}dx$;

10. $\int \frac{37x-85}{(x^2+2x-3)(x-4)}dx$;

11. $\int \frac{3x^2+3x-24}{(x^2-x-2)(x-3)}dx$;

12 . $\int \frac{3x^2-15}{(x^2+5x+6)(x-1)}dx$;

13 . $\int \frac{x^2-19x+6}{(x^2+5x+6)(x-1)}dx$;

14 . $\int \frac{6x^2}{(x^2+3x+2)(x-1)}dx$;

15 . $\int \frac{2x^2-26}{(x^2+4x+3)(x+5)}dx$;

16 . $\int \frac{2x^2+12x-6}{(x^2+8x+15)(x+1)}dx$;

17 . $\int \frac{7x^2-17x}{(x^2-2x-3)(x-2)}dx$;

18 . $\int \frac{3x^2-17x+2}{(x^2+5x+6)(x-1)}dx$;

19 . $\int \frac{3x^2+1}{(x^2-1)(x-1)}dx$;

20 . $\int \frac{x+2}{(x^3+x^2)}dx$;

21. $\int \frac{4x^2}{(x^2-2x+1)(x+1)}dx$

22 . $\int \frac{2x^2+2x-1}{(1-x)x^2}dx$

23. $\int \frac{2x^2-5x+1}{x(x^2-2x+1)}dx$

24 . $\int \frac{-x^2+3x-2}{x(x+1)^2}dx$

25. $\int \frac{x^2-3x+2}{x(x^2+2x+1)}dx$

26 . $\int \frac{x+2}{x(x^2-2x+1)}dx$

27 . $\int \frac{4x}{(x^2-1)(x+1)}dx$

28. $\int \frac{3x^2+2}{x(x+1)^2}dx$

29 . $\int \frac{3x^2-7x+2}{x(x-1)^2}dx$

30 . $\int \frac{x^2+x+2}{x^2(x+1)}dx$

Задание 4

1 $\int \frac{3x+13}{(x^2+2x+5)(x-1)}dx$;

2. $\int \frac{2x^2+2x+20}{(x^2+2x+5)(x-1)}dx$;

3. $\int \frac{36}{(x^2-2x+10)(x+2)}dx$;

4. $\int \frac{4x^2+3x+17}{(x^2+2x+5)(x-1)}dx$;

5. $\int \frac{4x-x^2-12}{(x^3+8)}dx$;

6. $\int \frac{6-9x}{(x^3+8)}dx$;

7. $\int \frac{2x+3}{(x^2-9)}dx$;

11. $\int \frac{x^2-6x+8}{(x^3+8)}dx$;

12 . $\int \frac{x^2+3x-6}{(x^2+6x+13)(x+11)}dx$;

13 . $\int \frac{9x-9}{(x^2-4x+13)(x+1)}dx$

1.14. $\int \frac{4x+2}{x^2(x^2+4)}dx$;

15. $\int \frac{x^2-13x+40}{(x^2-4x+13)(x+1)}dx$;

16 . $\int \frac{4x-10}{(x^2-2x+10)(x+2)}dx$;

17 . $\int \frac{2x^2-3x-3}{(x^2-2x+5)(x-1)}dx$;

21. $\int \frac{12-6x}{(x^2-4x+13)(x+1)}dx$

22 . $\int \frac{x^2+3x+2}{x^3-1}dx$

23. $\int \frac{7x-10}{x^3+8}dx$

24. $\int \frac{x^2-5x+40}{(x+2)(x^2-2x+10)}dx$

25 . $\int \frac{3-9x}{(x^3-1)}dx$

26. $\int \frac{x+2}{x(x^2-2x+1)}dx$

27 . $\int \frac{x^2+23}{(x^2+6x+13)(x+1)}dx$

8. $\int \frac{2x^2+7x+7}{(x^2+2x+5)(x-1)}dx$; 18 . $\int \frac{19x-x^2-34}{(x^2-4x+13)(x+1)}dx$; 28. $\int \frac{4x^2+38}{(x+2)(x^2-2x+10)}dx$

9. $\int \frac{8}{(x^2+6x+13)(x+1)}dx$; 19 . $\int \frac{2x^2+4x+20}{(x+1)(x^2-4x+13)}dx$; 29 . $\int \frac{5x+13}{(x+1)(x^2+6x+13)}dx$

10. $\int \frac{4x^2+x+10}{(x^3+8)}dx$; 20 . $\int \frac{4x^2+7x+5}{(x-1)(x^2+2x+5)}dx$; 30. $\int \frac{3x^2+2x+1}{(x^3-1)}dx$

Контрольные вопросы:

1. Как выделить полный квадрат из квадратного трехчлена?
2. Сформулируйте свойства неопределенного интеграла.
3. Запишите таблицу основных неопределенных интегралов.
4. Расскажите об интегрировании с использованием подведения под знак дифференциала.
5. Какая дробь называется рациональной?
6. Какая дробь называется правильной? Как разложить правильную дробь на сумму элементарных дробей?
7. Какая дробь называется неправильной? Как разложить неправильную дробь на сумму элементарных дробей?
8. Запишите четыре основных типа простейших дробей и расскажите об их интегрировании.
9. Расскажите о методе неопределенных коэффициент

Практическая работа № 13 по теме

«Интегрирование тригонометрических функций и иррациональных выражений»

Цель: проверить умение находить неопределенные интегралы тригонометрических функций и иррациональных выражений.

Время выполнения 90 минут

Материальное обеспечение
1.Теоретические сведения
2.Задание
3.Лист А 4
4.Калькуляторы

Порядок выполнения работы
1.Изучить задание
2. Изучить теоретические сведения
3. Выполнить и оформить работу
4.Показать результаты преподавателю

Домашнее задание
1.Подготовить ответы на контрольные вопросы

Теоретические сведения.

Интегрирование тригонометрических функций

Интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$.

Здесь R – обозначение некоторой рациональной функции от переменных sinx и cosx.

Интегралы этого вида вычисляются с помощью подстановки $t = tg\frac{x}{2}$. Эта подстановка позволяет преобразовать тригонометрическую функцию в рациональную.

$$\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2};$$

Тогда $x = 2arctgt; \qquad dx = \frac{2dt}{1+t^2};$

Интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$, *если функция R является нечетной относительно cosx.*

Несмотря на возможность вычисления такого интеграла с помощью универсальной тригонометрической подстановки, рациональнее применить подстановку *t = sinx.*

Интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$, *если функция R является нечетной относительно sinx.*

По аналогии с рассмотренным выше случаем делается подстановка *t = cosx.*

Интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$, если *функция R четная относительно sinx и cosx.*

Для преобразования функции R в рациональную используется подстановка *t = tgx.*

Интеграл произведения синусов и косинусов различных аргументов.

В зависимости от типа произведения применятся одна из трех формул:

$$\int \cos mx \cos nx dx = \int \frac{1}{2}\left[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\right]dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{\sin(m-n)x}{m-n}\right]$$

$$\int \sin mx \cos nx dx = \int \frac{1}{2}\left[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x\right]dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos(m+n)x}{m+n} - \frac{\cos(m-n)x}{m-n}\right]$$

$$\int \sin mx \sin nx dx = \int \frac{1}{2}\left[-\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\right]dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{\sin(m+n)}{m+n} + \frac{\sin(m-n)}{m-n}\right]$$

Интегрирование иррациональных выражений

1) $\int R(u, \sqrt{m^2 - u^2})du;$

2) $\int R(u, \sqrt{m^2 + u^2})du;$

3) $\int R(u, \sqrt{u^2 - m^2})du;$

Тригонометрическая подстановка.

Теорема: Интеграл вида $\int R(u, \sqrt{m^2 - u^2})du$ подстановкой $u = m\sin t$ или

$u = m\cos t$ сводится к интегралу от рациональной функции относительно sint или cost.

Пример:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \left\{ \begin{array}{l} x = a\sin t; \\ dx = a\cos t dt \end{array} \right\} = \int \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}\, a\cos t dt = \int a^2\cos^2 t dt = \frac{a^2}{2}\int (1 + \cos 2t)dt =$$

$$= \frac{a^2 t}{2} + \frac{a^2}{4}\sin 2t + C = \frac{a^2 t}{2} + \frac{a^2}{2}\sin t\cos t + C = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

Теорема: Интеграл вида $\int R(u, \sqrt{m^2 + u^2})du$ подстановкой $u = mtgt$ или $u = mctgt$ сводится к интегралу от рациональной функции относительно sint и cost.

Пример:

$$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{a^2 + x^2}} = \left\{ \begin{array}{l} x = atgt; dx = \dfrac{a}{\cos^2 t}dt; \\ \sqrt{a^2 + x^2} = \dfrac{a}{\cos t}; \end{array} \right\} = \int \frac{a\cos t dt}{\cos^2 t a^4 tg^4 t a} = \int \frac{\cos^3 t dt}{a^4\sin^4 t} = \frac{1}{a^4}\int \frac{(1 - \sin^2 t)d\sin t}{\sin^4 t} =$$

$$= -\frac{1}{3a^4\sin^3 t} + \frac{1}{a^4\sin t} + C = \left\{ \sin t = \sqrt{1 - \frac{a^2}{a^2 + x^2}} = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} \right\} = -\frac{(a^2 + x^2)^{3/2}}{3a^4x^3} + \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{a^4 x} + C.$$

Теорема: Интеграл вида $\int R(u, \sqrt{u^2 - m^2})du$ подстановкой $u = \frac{1}{\sin t}$ или $u = \frac{1}{\cos t}$ сводится к интегралу от рациональной функции относительно sint или cost.

Пример:

$$\int \frac{dx}{x(x^2 - 4)^{5/2}} = \left\{ \begin{array}{l} x = \dfrac{2}{\cos t}; dx = \dfrac{2\sin t}{\cos^2 t}dt; \\ \sqrt{x^2 - 4} = 2tgt; \end{array} \right\} = \int \frac{2\sin t\cos t dt}{\cos^2 t \cdot 2 \cdot 2^5 tg^5 t} = \frac{1}{32}\int ctg^4 t dt =$$

$$= \frac{1}{32}\int ctg^2 t\left(\frac{1}{\sin^2 t} - 1\right)dt = -\frac{1}{32}\int ctg^2 t d(ctgt) - \frac{1}{32}\int ctg^2 t dt = -\frac{1}{96}ctg^3 t - \frac{1}{32}\int \left(\frac{1}{\sin^2 t} - 1\right)dt =$$

$$= -\frac{1}{96}ctg^3 t + \frac{1}{32}ctgt + \frac{t}{32} + C = \left\{ ctgt = \frac{2}{\sqrt{x^2 - 4}} \right\} = -\frac{1}{12(x^2 - 4)^{3/2}} + \frac{1}{16\sqrt{x^2 - 4}} +$$

$$+ \frac{1}{32}\arccos\frac{2}{x} + C.$$

Интеграл вида $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax + b}{cx + d}}\right)dx$ *где* n- *натуральное число.*

С помощью подстановки $\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}=t$ функция рационализируется.

$$\frac{ax+b}{cx+d}=t^n; \qquad x=\frac{t^n-b}{a-ct^n}; \qquad dx=\left(\frac{t^n-b}{a-ct^n}\right)' dt;$$

Тогда $\int R\left(x,\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right)dx=\int R\left(\dfrac{t^n-b}{a-ct^n},t\right)\left(\dfrac{t^n-b}{a-ct^n}\right)' dt=\int r(t)dt.$

<u>Пример.</u>

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-2x}-\sqrt[4]{1-2x}}=\left\{\sqrt[4]{1-2x}=t;\quad dt=\frac{-2dx}{4\left(\sqrt[4]{1-2x}\right)^3}=\frac{-dx}{2t^3};\right\}=\int\frac{-2t^3dt}{t^2-t}=-2\int\frac{t^2dt}{t-1}=$$

$$=-2\int\left(t+\frac{t}{t-1}\right)dt=-2\int tdt-2\int\frac{t}{t-1}dt=-t^2-2\int\left(1+\frac{1}{t-1}\right)dt=-t^2-2t-2\ln|t-1|+C=$$

$$=-\sqrt{1-2x}-2\sqrt[4]{1-2x}-2\ln\left|\sqrt[4]{1-2x}-1\right|+C.$$

Если в состав иррациональной функции входят корни различных степеней, то в качестве новой переменной рационально взять корень степени, равной наименьшему общему кратному степеней корней, входящих в выражение.

Проиллюстрируем это на примере.

<u>Пример.</u>

$$\int\frac{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[4]{x-1}}{(x-1)\left(1+\sqrt[6]{x-1}\right)}dx=\left\{\begin{matrix}\sqrt[12]{x-1}=t; & x-1=t^{12};\\ dx=12t^{11}dt; & \end{matrix}\right\}=\int\frac{(t^4+t^3)12t^{11}dt}{t^{12}(1+t^2)}=12\int\frac{t^3+t^2}{t^2+1}dt=$$

$$=12\left(\int\frac{t^3}{t^2+1}dt+\int\frac{t^2}{t^2+1}dt\right)=12\left(\int\left(t-\frac{t}{t^2+1}\right)dt+\int\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt\right)=12\int tdt-12\int\frac{tdt}{t^2+1}+12\int dt-$$

$$-12\int\frac{dt}{1+t^2}=6t^2+12t-6\ln(t^2+1)-12arctgt+C=6\sqrt[6]{x-1}+12\sqrt[12]{x-1}-6\ln(\sqrt[6]{x-1}+1)-$$

$$-12arctg\sqrt[12]{x-1}+C.$$

Метод неопределенных коэффициентов.

Рассмотрим интегралы следующих трех типов:

$$I.\int\frac{P(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}; \qquad II.\int P(x)\sqrt{ax^2+bx+c}dx; \qquad III.\int\frac{dx}{(x-\alpha)^n\sqrt{ax^2+bx+c}};$$

где P(x) – многочлен, n – натуральное число.

Причем интегралы II и III типов могут быть легко приведены к виду интеграла I типа.

Далее делается следующее преобразование:

$$\int \frac{P(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = Q(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}};$$

в этом выражении Q(x)- некоторый многочлен, степень которого ниже степени многочлена P(x), а λ - некоторая постоянная величина.

Для нахождения неопределенных коэффициентов многочлена Q(x), степень которого ниже степени многочлена P(x), дифференцируют обе части полученного выражения, затем умножают на $\sqrt{ax^2+bx+c}$ и, сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, определяют λ и коэффициенты многочлена Q(x).

Данный метод выгодно применять, если степень многочлена P(x) больше единицы. В противном случае можно успешно использовать методы интегрирования рациональных дробей, рассмотренные выше, т.к. линейная функция является производной подкоренного выражения.

Пример.

$$\int \frac{3x^3-7x^2+1}{\sqrt{x^2-2x+5}}dx = (Ax^2+Bx+C)\sqrt{x^2-2x+5} + \lambda\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+5}}.$$

Теперь продифференцируем полученное выражение, умножим на $\sqrt{ax^2+bx+c}$ и сгруппируем коэффициенты при одинаковых степенях x.

$$\frac{3x^3-7x^2+1}{\sqrt{x^2-2x+5}} = (2Ax+B)\sqrt{x^2-2x+5} + \frac{Ax^2+Bx+C}{\sqrt{x^2-2x+5}}(x-1) + \frac{\lambda}{\sqrt{x^2-2x+5}}$$

$$(2Ax+B)(x^2-2x+5)+(Ax^2+Bx+C)(x-1)+\lambda = 3x^3-7x^2+1$$

$$2Ax^3-4Ax^2+10Ax+Bx^2-2Bx+5B+Ax^3+Bx^2+Cx-Ax^2-Bx-C+\lambda = 3x^3-7x^2+1$$

$$3Ax^3-(5A-2B)x^2+(10A-3B+C)x+5B-C+\lambda = 3x^3-7x^2+1$$

$$\begin{cases} A=1 \\ 5A-2B=7 \\ 10A-3B+C=0 \\ 5B-C+\lambda=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \\ C=-13 \\ \lambda=-7 \end{cases}$$

Итого $\int \frac{3x^3-7x^2+1}{\sqrt{x^2-2x+5}}dx = (x^2-x-13)\sqrt{x^2-2x+5} - 7\int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^2+4}} =$

$= (x^2-x-13)\sqrt{x^2-2x+5} - 7\ln(x-1+\sqrt{x^2-2x+5}) + C.$

Пример.

$$\int (4x^2-6x)\sqrt{x^2+3}dx = \int \frac{(4x^2-6x)(x^2+3)}{\sqrt{x^2+3}}dx = (Ax^3+Bx^2+Cx+D)\sqrt{x^2+3} + \lambda\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3}}$$

$$\frac{4x^4-6x^3+12x^2-18x}{\sqrt{x^2+3}} = (3Ax^2+2Bx+C)\sqrt{x^2+3} + \frac{(Ax^3+Bx^2+Cx+D)x}{\sqrt{x^2+3}} + \frac{\lambda}{\sqrt{x^2+3}}$$

$$4x^4-6x^3+12x^2-18x = (3Ax^2+2Bx+C)(x^2+3)+Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+\lambda$$

$$4x^4-6x^3+12x^2-18x = 3Ax^4+2Bx^3+Cx^2+9Ax^2+6Bx+3C+Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+\lambda$$

$$4x^4-6x^3+12x^2-18x = 4Ax^4+3Bx^3+(2C+9A)x^2+(6B+D)x+3C+\lambda$$

$$A=1;\quad B=-2;\quad C=3/2;\quad D=-6;\quad \lambda=-9/2;$$

$$\int(4x^2-6x)\sqrt{x^2+3}dx=\left(x^3-2x^2+\frac{3}{2}x-6\right)\sqrt{x^2+3}-\frac{9}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+3}\right|+C.$$

<u>Пример.</u>

$$\int\frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-1}}=\left\{\begin{aligned}&x=\frac{1}{v};\\&dx=-\frac{dv}{v^2}\end{aligned}\right\}=-\int\frac{v^3dv}{v^2\sqrt{\frac{1}{v^2}-1}}=-\int\frac{v^2dv}{\sqrt{1-v^2}}=(Av+B)\sqrt{1-v^2}+\lambda\int\frac{dv}{\sqrt{1-v^2}}$$

$$-\frac{v^2}{\sqrt{1-v^2}}=A\sqrt{1-v^2}-\frac{(Av+B)v}{\sqrt{1-v^2}}+\frac{\lambda}{\sqrt{1-v^2}}$$

$$-v^2=A-Av^2-Av^2-Bv+\lambda$$

$$-v^2=-2Av^2-Bv+A+\lambda$$

$$A=1/2;\quad B=0;\quad \lambda=-1/2;$$

$$-\int\frac{v^2dv}{\sqrt{1-v^2}}=\frac{v\sqrt{1-v^2}}{2}-\frac{1}{2}\arcsin v=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2}-\arcsin\frac{1}{x}\right)+C$$

<u>Второй способ решения того же самого примера.</u>

$$\int\frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-1}}=\left\{\begin{aligned}&x=\frac{1}{\cos t};dx=\frac{tgt}{\cos t}dt;\\&\sqrt{x^2-1}=tgt;\end{aligned}\right\}=\int\frac{\frac{\sin t}{\cos^2 t}}{\frac{1}{\cos^3 t}\cdot tgt}dt=\int\frac{\sin t\cos^4 t}{\cos^2 t\sin t}dt=\int\cos^2 tdt=$$

$$=\int\frac{1}{2}(1+\cos 2t)dt=\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t=\left\{\sin 2t=2\sin t\cos t=2\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\right\}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\arccos\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2}\right)+C.$$

С учетом того, что функции arcsin и arccos связаны соотношением $\arcsin\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}-\arccos\frac{1}{x}$, а постоянная интегрирования С – произвольное число, ответы, полученные различными методами, совпадают.

Как видно, при интегрировании иррациональных функций возможно применять различные рассмотренные выше приемы. Выбор метода интегрирования обуславливается в основном наибольшим удобством, очевидностью применения того или иного метода, а также сложностью вычислений и преобразований.

<u>Пример.</u>

$$\int\frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}}=\left\{\begin{aligned}&x=\sin t;\\&dx=\cos tdt;\\&\cos t=\sqrt{1-x^2}\end{aligned}\right\}=\int\frac{\cos tdt}{\cos^3 t}=\int\frac{dt}{\cos^2 t}=tgt+C=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+C.$$

Несколько примеров интегралов, не выражающихся через элементарные функции.

К таким интегралам относится интеграл вида $\int R(x, \sqrt{P(x)})dx$, где P(x)-многочлен степени выше второй. Эти интегралы называются **эллиптическими.**

Если степень многочлена P(x) выше четвертой, то интеграл называется **ультраэллиптическим.**

Если всетаки интеграл такого вида выражается через элементарные функции, то он называется **псевдоэллиптическим.**

Не могут быть выражены через элементарные функции следующие интегралы:

1) $\int e^{-x^2}dx$ - интеграл Пуассона (Симеон Дени Пуассон – французский математик (1781-1840))

2) $\int \sin x^2 dx;\ \int \cos x^2 dx$ - интегралы Френеля (Жан Огюстен Френель – французский ученый (1788-1827) - теория волновой оптики и др.)

3) $\int \frac{dx}{\ln x}$ - интегральный логарифм

4) $\int \frac{e^x}{x}dx$ - приводится к интегральному логарифму

5) $\int \frac{\sin x}{x}dx$ - интегральный синус

6) $\int \frac{\cos x}{x}dx$ - интегральный косинус

Задания практической работы

Задание 1.Найти интегралы

В 1 $\int \frac{dx}{x+\sqrt[3]{x^2}}$

$\int \cos x \cos 3x\, dx$

В 2 $\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2+\sqrt[6]{x}}\, dx}{x(1-\sqrt[3]{x})}$

$\int \sin x \sin 5x\, dx$

В 16 $\int x^3\sqrt{2-x^2}\,dx$

$\int \cos 8x \sin 5x\, dx$

В 17 $\int \frac{1}{(2-x)^2}\sqrt{\frac{2-x}{2+x}}\,dx$

$\int \sin 2x \sin 6x\, dx$

B 3 $\int \frac{\sqrt{X}\,dx}{1+\sqrt[4]{X^3}}$

$\int \sin^7 x\,dx$

B 18 $\int \frac{dx}{\sqrt{(X-1)^3(X-2)}}$

$\int \frac{\sin^5 x\,dx}{\cos x}$

B 4 $\int \frac{\sqrt{X}\,dx}{X-\sqrt[3]{X^2}}$

$\int \frac{dx}{1-\sin x}$

B 19 $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(X-1)^3(X+1)}}$

$\int \sin^2 x\cos^3 x\,dx$

B 5 $\int \frac{\sqrt{X}\,dx}{1+\sqrt{X}}$

$\int \sin^4 2x\,dx$

B 20 $\int \frac{dx}{(1-X)\sqrt{(1-X^2)}}$

$\int \frac{dx}{\cos^4 x}$

$\int \frac{\sqrt{X}\,dx}{1-\sqrt[3]{X}}$

B 6 $\int \cos^6 2x\,dx$

B 21 $\int \frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{X(1+\sqrt[3]{X})}}$

$\int \sin 2x \sin 6x\,dx$

B 7 $\int \frac{\sqrt{X+2}\,dx}{X}$

$\int \frac{dx}{3+5\cos x}$

B 22 $\int \frac{dx}{X^{11}\sqrt{(1+X^4)}}$

$\int \frac{\sin 3x\,dx}{2+\cos 3x}$

B 8 $\int \frac{X\,dx}{\sqrt{X+1}}$

$\int \frac{dx}{5-3\cos x}$

B 23 $\int \frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{(1-\sqrt{X})^2\sqrt{X}}}$

$\int (\cos x+5)^4 \sin x dx$

B 9 $\int \frac{X\,dx}{\sqrt{2X+3}}$

$\int \sin^4 3x\,dx$

B 24 $\int X^5\sqrt{(1+X^3)^2}\,dx$

$\int \frac{\mathrm{ctg}x\,dx}{\sin^2 x}$

B 10 $\int \frac{(\sqrt{X+1}+1)dx}{\sqrt{1+X}+1}$

$\int \frac{\cos x\,dx}{1+\cos x}$

B 25 $\int \frac{dx}{X^3\sqrt[3]{2-x^3}}$

$\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt[5]{\sin x}}$

B 11 $\int \frac{\mathbf{(X-1)dx}}{\mathbf{\sqrt{2X-1}}}$

$\int \cos^3 x\,dx$

B 26 $\int \sqrt{x}\,(1+\sqrt{x})^3\,dx$

$\int \frac{\sin 3x\,dx}{2+\cos 3x}$

В 12 $\int X^3 \sqrt{1+X^2}\,dx$

$\int \cos5x\cos3x\,dx$

В 27 $\int \sqrt[3]{x^4-4}\,x^2\,dx$

$\int \frac{dx}{\cos^2x(2tgx+1)}$

В 13 $\int \frac{X}{\sqrt{1-2X}}dx$

$\int \sin^2x\cos^3 xdx$

В 28 $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x-X^2}}$

$\int \cos6x\cos4x\,dx$

В 14 $\int \frac{\mathbf{dx}}{\sqrt{(\mathbf{X}-\mathbf{1})^3(\mathbf{X}-\mathbf{2})}}$

$\int \cos^4x\,dx$

В 29. $\int \frac{(\sqrt{X+1}+1)dx}{\sqrt{1+X}+1}$

$\int \frac{\sqrt{2tgx+1}\,dx}{\cos^2x}$

В 15 $\int \frac{dx}{(1-X)\sqrt{(1-X^2)}}$

$\int \sin^4x\,dx$

В 30. $\int \frac{(X-1)dx}{\sqrt{2X-1}}$

$\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{2\sin x+3}}$

Контрольные вопросы:

1.Сформулировать правила нахождения интегралов иррациональных выражений.

2. Сформулировать правила нахождения интегралов тригонометрических.

Практическая работа № 14 по теме

«Вычисление определенных интегралов»

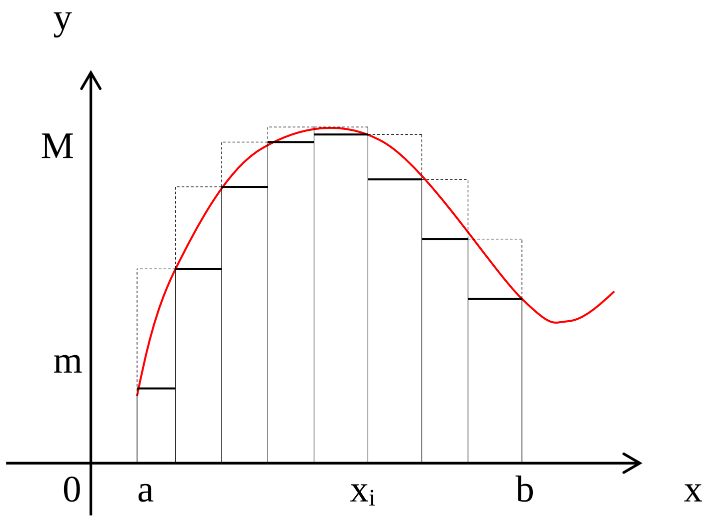
Цель: проверить умение вычисления определенных интегралов .

Время выполнения 90 минут

Материальное обеспечение
1.Теоретические сведения
2.Задание
3.Лист А 4
4.Калькуляторы
Порядок выполнения работы
1.Изучить задание
2. Изучить теоретические сведения
3. Выполнить и оформить работу
4.Показать результаты преподавателю
Домашнее задание
1.Подготовить ответы на контрольные вопросы
Теоретические сведения

Определенный интеграл.

Пусть на отрезке [a, b] задана непрерывная функция f(x).



Обозначим m и M наименьшее и наибольшее значение функции на отрезке [a, b]
Разобьем отрезок [a, b] на части (не обязательно одинаковые) n точками.

$$x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$$

Тогда $x_1 - x_0 = \Delta x_1$, $x_2 - x_1 = \Delta x_2$, … ,$x_n - x_{n-1} = \Delta x_n$;
На каждом из полученных отрезков найдем наименьшее и наибольшее значение функции.

$[x_0, x_1] \to m_1, M_1$; $[x_1, x_2] \to m_2, M_2$; … $[x_{n-1}, x_n] \to m_n, M_n$.

Составим суммы:

$\underline{S}_n = m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2 + \ \dots + m_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$

$\overline{S}_n = M_1\Delta x_1 + M_2\Delta x_2 + \dots + M_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$

Сумма $\underline{S}$ называется **нижней интегральной суммой**, а сумма $\overline{S}$ – **верхней интегральной суммой**.

Т.к. $m_i \le M_i$, то $\underline{S}_n \le \overline{S}_n$, а $m(b - a) \le \underline{S}_n \le \overline{S}_n \le M(b - a)$

Внутри каждого отрезка выберем некоторую точку ε.

$$x_0 < \varepsilon_1 < x_1, \quad x_1 < \varepsilon < x_2, \ \dots \ , x_{n-1} < \varepsilon < x_n.$$

Найдем значения функции в этих точках и составим выражение, которое называется **интегральной суммой** для функции f(x) на отрезке [a, b].

$$S_n = f(\varepsilon_1)\Delta x_1 + f(\varepsilon_2)\Delta x_2 + \dots + f(\varepsilon_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i$$

Тогда можно записать: $m_i\Delta x_i \le f(\varepsilon_i)\Delta x_i \le M_i\Delta x_i$

Следовательно, $\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$

$$\underline{S_n} \le S_n \le \overline{S_n}$$

Геометрически это представляется следующим образом: график функции f(x) ограничен сверху описанной ломаной линией, а снизу – вписанной ломаной.

Обозначим $\max\Delta x_i$ – наибольший отрезок разбиения, а $\min\Delta x_i$ – наименьший. Если $\max\Delta x_i \to 0$, то число отрезков разбиения отрезка [a, b] стремится к бесконечности.

Если $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i$, то $\lim_{\max\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i = S.$

<u>Определение:</u> Если при любых разбиениях отрезка [a, b] таких, что $\max\Delta x_i \to 0$ и произвольном выборе точек ε_i интегральная сумма $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i$ стремится к пределу S, который называется определенным интегралом от f(x) на отрезке [a, b].

Обозначение : $\int_a^b f(x)dx.$

a – нижний предел, b – верхний предел, x – переменная интегрирования, [a, b] – отрезок интегрирования.

<u>Определение:</u> Если для функции f(x) существует предел $\lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i = \int\limits_a^b f(x)dx$, то функция называется **интегрируемой** на отрезке [a, b].

Также верны утверждения: $\lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \int\limits_a^b f(x)dx$

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$

<u>Теорема:</u> Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b], то она интегрируема на этом отрезке.

<u>Свойства определенного интеграла.</u>

1) $\int\limits_a^b Af(x)dx = A\int\limits_a^b f(x)dx;$

2) $\int\limits_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int\limits_a^b f_1(x)dx \pm \int\limits_a^b f_2(x)dx$

3) $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$

4) Если f(x) ≤ φ(x) на отрезке [a, b] a < b, то $\int\limits_a^b f(x)dx \le \int\limits_a^b \varphi(x)dx$

5) Для произвольных чисел a, b, c справедливо равенство:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Разумеется, это равенство выполняется, если существует каждый из входящих в него интегралов.

6) $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$

Вычисление определенного интеграла.

Пусть в интеграле $\int\limits_a^b f(x)dx$ нижний предел a = const, а верхний предел b изменяется. Очевидно, что если изменяется верхний предел, то изменяется и значение интеграла.

Обозначим $\int\limits_a^x f(t)dt$ = Φ(x). Найдем производную функции Φ(x) по переменному верхнему пределу x.

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

Аналогичную теорему можно доказать для случая переменного нижнего предела.

Теорема: Для всякой функции f(x), непрерывной на отрезке [a, b], существует на этом отрезке первообразная, а значит, существует неопределенный интеграл.

Теорема: (Теорема Ньютона – Лейбница)

Если функция F(x) – какая- либо первообразная от непрерывной функции f(x), то

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

это выражение известно под названием формулы Ньютона – Лейбница.

Иногда применяют обозначение F(b) – F(a) = $F(x)\Big|_a^b$.

Формула Ньютона – Лейбница представляет собой общий подход к нахождению определенных интегралов.

Что касается приемов вычисления определенных интегралов, то они практически ничем не отличаются от всех тех приемов и методов, которые были рассмотрены выше при нахождении неопределенных интегралов.

Точно так же применяются методы подстановки (замены переменной), метод интегрирования по частям, те же приемы нахождения первообразных для тригонометрических, иррациональных и трансцендентных функций. Особенностью является только то, что при применении этих приемов надо распространять преобразование не только на подынтегральную функцию, но и на пределы интегрирования. Заменяя переменную интегрирования, не забыть изменить соответственно пределы интегрирования.

Замена переменных.

Пусть задан интеграл $\int_a^b f(x)dx$, где f(x) – непрерывная функция на отрезке [a, b].

Введем новую переменную в соответствии с формулой x = φ(t).

Тогда если

1) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$

2) φ(t) и φ'(t) непрерывны на отрезке [α, β]

3) f(φ(t)) определена на отрезке [α, β], то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

Тогда $\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = F[\varphi(t)]\Big|_\alpha^\beta = F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] = F(b) - F(a)$

Пример.

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \begin{Bmatrix} x=\sin t; \\ \alpha=0;\ \beta=\pi/2 \end{Bmatrix} = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2t)dt =$$
$$= \frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}\sin\pi = \frac{\pi}{4}.$$

При замене переменной в определенном интеграле следует помнить о том, что вводимая функция (в рассмотренном примере это функция sin) должна быть непрерывна на отрезке интегрирования. В противном случае формальное применение формулы приводит к абсурду.

Пример.

$\int_0^\pi dx = x\Big|_0^\pi = \pi$, с другой стороны, если применить тригонометрическую подстановку,

$$\int_0^\pi dx = \int_0^\pi \frac{dx}{\sin^2 x+\cos^2 x} = \int_0^\pi \frac{dx}{\cos^2 x(1+tg^2 x)} = \{tgx = t\} = \int_0^0 \frac{dt}{1+t^2} = 0$$

Т.е. два способа нахождения интеграла дают различные результаты. Это произошло из-за того, что не был учтен тот факт, что введенная переменная tgx имеет на отрезке интегрирования разрыв (в точке x = π/2). Поэтому в данном случае такая подстановка неприменима. При замене переменной в определенном интеграле следует внимательно следить за выполнением перечисленных выше условий.

Интегрирование по частям.

Если функции $u = \varphi(x)$ и $v = \psi(x)$ непрерывны на отрезке [a, b], а также непрерывны на этом отрезке их производные, то справедлива формула интегрирования по частям:

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu.$$

Вывод этой формулы абсолютно аналогичен выводу формулы интегрирования по частям для неопределенного интеграла, который был весьма подробно рассмотрен выше, поэтому здесь приводить его нет смысла.

Задания практической работы Вычислить определенный интеграл

1.

1. $a)\int_{1}^{2}\left(3x^2-2x\right)dx$

$b)\int_{\Pi}^{2\Pi}\frac{\cos x}{6}dx$

2. $a)\int_{-2}^{1}\left(x^2-x\right)dx$

$b)\int_{-\Pi/6}^{\Pi/6}\frac{6dx}{cos^2 2x}$

3. $a)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}3\cos x dx$

$b)\int_{0}^{2}(1-\frac{x}{2})^4 dx$

4. $a)\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{3}{\cos^2 x}dx$

$b)\int_{-1}^{4}(1+\frac{x}{2})^8 dx$

5. $a)\int_{1}^{2}\left(4x^3+2x\right)dx$

$b)\int_{0}^{\Pi}\frac{3dx}{\cos^2(\frac{x}{2}-\frac{\Pi}{3})}$

6. $a)\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\left(4\cos 2x\right)dx$

$b)\int_{1}^{5}\sqrt{9x-1}dx$

7. $a)\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(6\sin 2x\right)dx$

$b)\int_{1}^{2}(3-2x)^4 dx$

11. $a)\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{3}{\cos^2\frac{1}{2}x}dx$

$b)\int_{2}^{3}(1-x)^4 dx$

12. $a)\int_{0}^{\frac{3}{2}\pi}\cos\frac{1}{3}x dx$

$b)\int_{-1}^{4}(1+\frac{x}{2})^8 dx$

13. $a)\int_{2}^{3}\left(3x^2-2x\right)dx$

$b)\int_{-\Pi/2}^{\Pi/2}3\sin x dx$

14. $a)\int_{0}^{\pi}\left(3\sin\frac{1}{2}x\right)dx$

$b)\int_{1}^{0}(1-2x)^4 dx$

15. $a)\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\left(36\cos 2x\right)dx$

$b)\int_{-2}^{3}\frac{2dx}{(3-x^2)}dx$

16. $a)\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\cos x dx$

$b)\int_{2}^{3}(1-2x)^4 dx$

17. $a)\int_{0}^{\frac{\pi}{8}}\frac{36}{\cos^2 2x}dx$

$b)\int_{2}^{3}(3-x^2)dx$

21. $a)\int_{1}^{2}\left(4x^3-3x^2\right)dx$

$b)\int_{0}^{4}\frac{dx}{\sqrt{x+3}}$

22. $a)\int_{0}^{\frac{\pi}{9}}\left(2\cos 3x\right)dx$

$b)\int_{0}^{2}(1-\frac{x}{2})^4 dx$

23. $a)\int_{0}^{\frac{\pi}{12}}\left(108\sin 6x\right)dx$

$b)\int_{-1}^{1}(7-5x)dx$

24. $a)\int_{0}^{\frac{\pi}{8}}\frac{4}{\cos^2 2x}dx$

$b)\int_{-2}^{1}(4x^3+6x)dx$

25. $a)\int_{1}^{2}\left(5x^4-6x^2\right)dx$

$b)\int_{1}^{9}\sqrt{8x-5}dx$

26. $a)\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{5}{\sin^2 x}dx$

$b)\int_{-2}^{0}(x^5-3x^2)$

27. $a)\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\left(2\sin x\right)dx$

$b)\int_{1}^{2}(\frac{x^2}{2}-\frac{2}{x^3})dx$

8. $a)\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{5}{\cos^2 x}dx$

$b)\int_{-3}^{1} \frac{dx}{5-3x}$

9. $a)\int_0^{2} \left(x^3 - x^2 + 3\right)dx$

$b)\int_1^{2} e^{2x+3}dx$

10. $a)\int_1^{2} \left(x^4 - x^3 + 2\right)dx$

$b)\int_0^{1} 5^{4-3x}dx$

18. $a)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2\sin x\right)dx$

$b)\int_0^{4} (x^2+1)dx$

19. $a)\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x dx$

$b)\int_2^{3} (7-2x)^4 dx$

20. $a)\int_0^{2} \left(x^3 - x\right)dx$

$b)\int_0^{\Pi/3} 3\sin 3x dx$

28. $a)\int_1^{3} \left(3x^2 + 4x^3\right)dx$

$b)\int_{\Pi/4}^{\Pi/8} \frac{\cos 4x}{2}dx$

29. $a)\int_2^{3} \left(2x^3 - 2x\right)dx$

$b)\int_0^{\Pi/6} \frac{4dx}{\cos^2 2x}$

30. $a)\int_{\frac{\pi}{18}}^{\frac{\pi}{6}} \left(2\sin 3x\right)dx$

$b)\int_0^{1} \frac{dx}{x^2+4}$

2.

1. $\int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt[3]{1+x^2dx}$
2. $\int_0^{1/2} \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$
3. $\int_1^{e} \frac{\ln^2 x}{x}dx$
4. $\int_{-\infty}^{0} \frac{xdx}{\sqrt{(x^2+4)^3}}$
5. $\int_0^{1} \frac{xdx}{\sqrt[4]{(16+x^2)^5}}$
6. $\int_{3/4}^{1} \frac{dx}{\sqrt[5]{3-4x}}$
7. $\int_0^{1} \frac{x^4dx}{\sqrt[3]{1-x^5}}$
8. $\int_0^{4} \frac{10xdx}{\sqrt[4]{(16-x^2)^3}}$
9. $\int_0^{2} \frac{x^3dx}{\sqrt{\left(x^4+4\right)}}$
10. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$
11. $\int_0^{1} x^3\sqrt{4+5x^4}dx$
12. $\int_1^{e} \frac{1+\ln x}{x}dx$
13. $\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{2-4x}}$
14. $\int_{1/3}^{1} \frac{\ln(3x-1)}{3x-1}dx$
15. $\int_0^{2/3} \frac{\sqrt[3]{\ln(2-3x)}}{2-3x}dx$
16. $\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin xdx}{\sqrt[7]{\cos^2 x}}$
17. $\int_{1/2}^{1} \frac{dx}{\sqrt[9]{1-2x}}$
18. $\int_0^{1/4} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-4x}}$
19. $\int_1^{e} \frac{1+\ln x}{x}dx$
20. $\int_1^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$
21. $\int_1^{2} \frac{e^{1/x}}{x^2}dx$
22. $\int_1^{\sqrt{2}} \frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}}$
23. $\int_0^{1} \frac{x^3dx}{\sqrt{16x^4+1}}$
24. $\int_0^{1} \frac{x^2dx}{\sqrt[3]{(x^3+8)^4}}$
25. $\int_0^{\pi/6} \frac{\cos 3x}{\sqrt[6]{(1-\sin 3x)^5}}dx$
26. $\int_{-3/4}^{0} \frac{dx}{\sqrt{4x+3}}$
27. $\int_1^{5} \frac{x^2dx}{\sqrt{31(x^3-1)}}$
28. $\int_0^{1/2} \frac{dx}{(2x-1)^2}$
29. $\int_0^{1} x^3\sqrt{4+5x^4}dx$
30. $\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin xdx}{\sqrt[7]{\cos^2 x}}$

3.

1. $\int_0^1 \frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1}dx$

2. $\int_2^3 \frac{2x^4-5x^2+3}{x^2-1}dx$

3. $\int_2^3 \frac{x+2}{x^2(x-1)}dx$

4. $\int_2^3 \frac{dx}{x^2(x-1)}$

5. $\int_{-1}^1 \frac{y^5dy}{y+2}$

6. $\int_2^3 \frac{3x^2+2x-3}{x^3-x}dx$

7. $\int_{1/3}^{1/2} \frac{xdx}{(x-1)^3}$

8. $\int_4^5 \frac{dx}{(x-1)(x+2)}$

9. $\int_3^4 \frac{dx}{(x+1)(x-2)}$

10. $\int_0^1 \frac{(2x+3)dx}{(x-3)^3}$

11. $\int_2^3 \frac{dx}{(x-1)^2(x+1)}$

12. $\int_3^5 \frac{(x^2+2)dx}{(x^2+1)(x-1)}$

13. $\int_0^1 \frac{x^4+3x^3-1}{(x+1)^2}dx$

14. $\int_0^1 \frac{xdx}{x^2+3x+2}$

15. $\int_8^{10} \frac{(x^2+3)dx}{x^3-x^2-6x}$

16. $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^4+x^2}$

17. $\int_2^3 \frac{x^7dx}{1-x^4}$

18. $\int_2^3 \frac{dx}{x^4-1}$

19. $\int_{-1}^0 \frac{xdx}{x^3-1}$

20. $\int_0^{\sqrt{3}/3} \frac{2x^2+4}{x^3-x^2+x+1}dx$

21. $\int_4^5 \frac{dx}{x^2(x-1)}$

22. $\int_0^2 \frac{dx}{(x+1)(x^2+4)}$

23. $\int_7^9 \frac{x^2-x+2}{x^4-5x^2+4}dx$

24. $\int_4^6 \frac{xdx}{x^3-6x^2+16-6}$

25. $\int_1^2 \frac{dx}{x^3+1}$

26. $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{x^5+1}{x^6+x^4}dx$

27. $\int_2^3 \frac{x^3+x^2+2}{x(x^2-1)^2}dx$

28. $\int_3^5 \frac{x^3-2x^2+4}{x^3(x-2)^2}dx$

29. $\int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{x^2dx}{x^4-1}$

30. $\int_{-1}^0 \frac{x^5-2x^2+3}{(x-2)^2}dx$

4.

1.1
$a)\int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt[3]{1+x^2dx}$
$b)\int_0^2 (2-x)^2dx$

1.2
$a)\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{(3-x)^3}}$
$b)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos xdx}{(3-\sin x)^2}$

1.3
$a)\int_{-1/3}^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{1+3x}}$
$b)\int_1^2 \frac{(2x^2+1)dx}{x}$

1.11
$a)\int_{-1}^2 \frac{6x^2dx}{(x^3-5)^2}$
$b)\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{2}\cos xdx$

1.12
$a)\int_0^1 \frac{x^3dx}{\sqrt{16x^4+1}}$
$b)\int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt{25-3x^2}dx$

1.13
$a)\int_0^1 x^3\sqrt{4+5x^4}dx$
$b)\int_1^2 \frac{(x-1)dx}{x^3}$

1.21
$a)\int_{2\sqrt{2}}^4 3x\sqrt{x^2-7}dx$
$b)\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin xdx$

1.22
$a)\int_{1/2}^1 \frac{dx}{\sqrt[9]{1-2x}}$
$b)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos xdx}{(8-7\sin x)^2}$

1.23
$a)\int_1^{\sqrt{2}} \frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}}$
$b)\int_1^{e^{e^3}} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$

1.4 a) $\int\limits_{3/4}^{1}\frac{dx}{\sqrt[5]{3-4x}}$ b) $\int\limits_{1}^{2}\frac{xdx}{\left(2x^2+4\right)^4}$

1.5 a) $\int\limits_{0}^{1}\frac{x^4dx}{\sqrt[3]{1-x^5}}$ b) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{Cosxdx}{\left(5-\sin x\right)^2}$

1.6 a) $\int\limits_{3/4}^{4/3}\frac{dx}{x^2+1}$ b) $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}}x\sqrt[5]{1+x^2}dx$

1.7 a) $\int\limits_{0}^{-3}\frac{dx}{\sqrt{25+3x}}$ b) $\int\limits_{0}^{\pi/6}\frac{\cos 3x}{\sqrt[6]{(1-\sin 3x)^5}}dx$

1.8 a) $\int\limits_{0}^{2}\frac{x^3dx}{\sqrt{x^4+4}}$ b) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}3\cos 2xdx$

1.9 a) $\int\limits_{1}^{e}\frac{3\ln^2 x}{x}dx$ b) $\int\limits_{0}^{1}\frac{x^2dx}{\sqrt[5]{8-7x^3}}$

1.10 a) $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{2-4x}}$ b) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos xdx}{\left(8-\sin x\right)^2}$

1.14 a) $\int\limits_{0}^{3}6x^3\left(3x^4-1\right)^2dx$ b) $\int\limits_{0}^{1}\frac{x^2dx}{\sqrt[3]{8-7x^3}}$

1.15 a) $\int\limits_{0}^{1}\left(2x^3+1\right)^4x^2dx$ b) $\int\limits_{0}^{2}\frac{x^2dx}{\sqrt[3]{9+2x^3}}$

1.16 a) $\int\limits_{0}^{1/2}\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$ b) $\int\limits_{4}^{9}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}dx$

1.17 a) $\int\limits_{0}^{1}\left(e^x-1\right)^4e^xdx$ b) $\int\limits_{0}^{1/4}\frac{dx}{\sqrt[3]{1-4x}}$

1.18 a) $\int\limits_{-3/4}^{0}\frac{dx}{\sqrt{4x+3}}$ b) $\int\limits_{0}^{4}\frac{10xdx}{\sqrt[4]{(16-x^2)^3}}$

1.19 a) $\int\limits_{0}^{1}\left(4x^3+1\right)^5x^2dx$ b) $\int\limits_{0}^{1}x^2e^{x^3+1}dx$

1.20 a) $\int\limits_{0}^{\pi/6}\frac{\cos 3x}{\sqrt[6]{(1-\sin 3x)^5}}dx$ b) $\int\limits_{1}^{\sqrt{3}}\frac{32xdx}{\left(x^2+1\right)^5}$

1.24 a) $\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{4x^2-9}$ b) $\int\limits_{1}^{3}\sqrt{\left(2x+1\right)^3}dx$

1.25 a) $\int\limits_{0}^{1/4}\frac{dx}{\sqrt[3]{1-4x}}$ b) $\int\limits_{4}^{5}\left(4-x\right)^3dx$

1.26 a) $\int\limits_{0}^{1/2}\frac{dx}{(2x-1)^2}$ b) $\int\limits_{1}^{e}\frac{5\ln^2 x}{x}dx$

1.27 a) $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{4-3x}}$ b) $\int\limits_{0}^{1}\left(x^3-4\right)dx$

1.28 a) $\int\limits_{3}^{8}\sqrt{x+1}dx$ b) $\int\limits_{0}^{2}\frac{xdx}{\left(x^2-1\right)^3}$

1.29 a) $\int\limits_{0}^{4}\frac{10xdx}{\sqrt[4]{(16-x^2)^3}}$ b) $\int\limits_{\frac{2\pi}{9}}^{\frac{\pi}{3}}\sin\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)$

1.30 a) $\int\limits_{1}^{5}\frac{x^2dx}{\sqrt{31(x^3-1)}}$ b) $\int\limits_{0}^{1}e^{x^2}xdx$

5.

2.1	$\int\limits_{2}^{3}x\ln(x-1)dx$	$\int\limits_{1}^{e^2}\sqrt{x}\ln xdx$	$\int\limits_{2}^{3}(3-x)e^xdx$
2.2	$\int\limits_{-2}^{0}x^2e^{-x/2}dx$	$\int\limits_{0}^{1}arctg\sqrt{x}dx$	$\int\limits_{1/2}^{1}\arcsin(1-x)dx$
2.3	$\int\limits_{0}^{\pi/2}x\cos xdx$	$\int\limits_{0}^{\pi}(x+2)\cos\frac{x}{2}dx$	$\int\limits_{1}^{\sqrt{3}}arctg\frac{1}{x}dx$

2.4	$\int_{0}^{\pi/2} x^2 \sin x dx$	$\int_{0}^{\pi/8} x^2 \sin 4x dx$	$\int_{-1}^{0} x \ln(1-x) dx$
2.5	$\int_{-1/2}^{1/2} \arccos 2x dx$	$\int_{1}^{2} x^2 \ln x dx$	$\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} e^{\sin x} \cos x dx$
2.6	$\int_{1}^{2} (x-1) \ln x dx$	$\int_{1}^{e} (x+1) \ln x dx$	$\int_{-1}^{0} (2x+3) e^{-x} dx$
2.7	$\int_{-1/2}^{0} x e^{-2x} dx$	$\int_{3/2}^{2} arctg(2x-3) dx$	$\int_{-1}^{0} (x+1) e^{-2x} dx$
2.8	$\int_{1}^{2} x e^{x} dx$	$\int_{0}^{\pi/2} (x+3) \sin x dx$	$\int_{-1/2}^{1/2} \arccos 2x dx$
2.9	$\int_{-1/3}^{-2/3} \frac{x}{e^{3x}} dx$	$\int_{0}^{\ln 2} x e^{-x} dx$	$\int_{0}^{1} x arctg x dx$
2.10	$\int_{1}^{e} \frac{\ln^2 x}{x^2} dx$	$\int_{-3}^{0} (x-2) e^{-x/3} dx$	$\int_{1}^{2} \ln(3x+2) dx$

Контрольные вопросы

1.Что называют определенным интегралом функции $f(x)$?
2.В чем состоит геометрический смысл определенного интеграла?
3.Сформулируйте необходимое условие интегрируемости функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$.
4.Сформулируйте необходимое и достаточное условия интегрируемости функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.
5.Запишите свойства определенного интеграла.
6Запишите формулу Ньютона-Лейбница.
7Расскажите об основных методах интегрирования определенного интеграла.

Практическая работа № 15 по теме

«Вычисление площадей »

Цель: проверить умение вычислять площади с помощью определенных интегралов

Время выполнения 90 минут

Материальное обеспечение
1.Теоретические сведения
2.Задание
3.Лист А 4
4.Калькуляторы

Порядок выполнения работы

1.Изучить задание

2. Изучить теоретические сведения

3. Выполнить и оформить работу

4.Показать результаты преподавателю

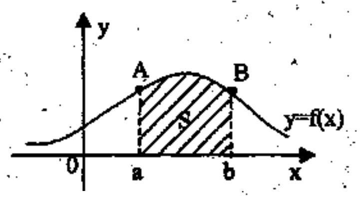
Домашнее задание

1.Подготовить ответы на контрольные вопросы

Теоретические сведения

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной кривой *y=f(x)*, двумя прямыми *x=a* и *x=b* и осью абсцисс, вычисляется с помощью определенного интеграла по формулам:

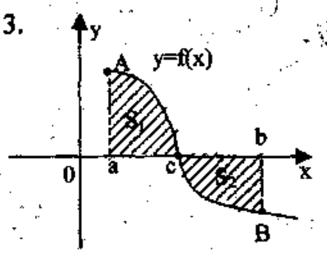
1.



$$S=\int_a^b f(x)dx$$

21

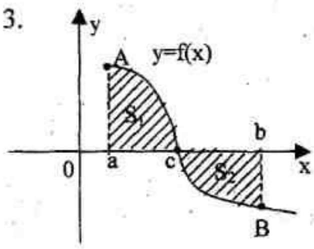
3.



$$f(x)=0 \Rightarrow x=c$$

$$S=S_1+S_2=\int_a^c f(x)dx+\left|\int_c^b f(x)d\right.$$

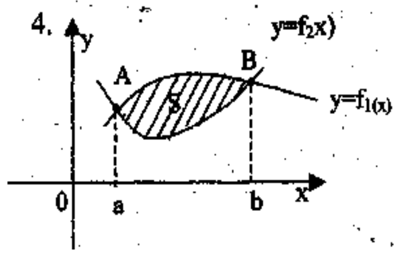
3.



$$f(x)=0 \Rightarrow x=c$$

$$S=S_1+S_2=\int_a^c f(x)dx+\left|\int_c^b f(x)dx\right|$$

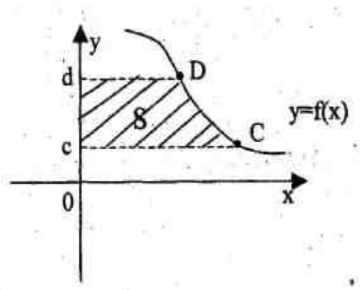
4.



$$f_1(x)=f_2(x) \Rightarrow x_1=a, x_2$$

$$S=\int_a^b f_1(x)dx-\int_a^b f_2(x)dx$$

5.

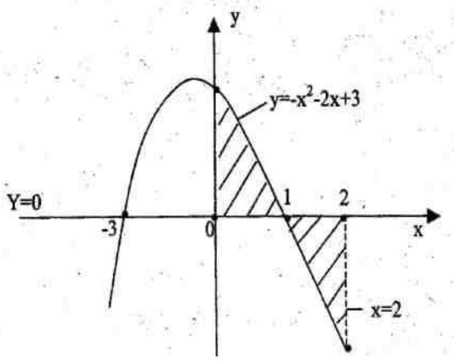


$$y=f(x) \Rightarrow x=\varphi(y$$

$$S=\int_c^d \varphi(y)dy$$

Пример 4: Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=-x^2-2x+3$, осями координат и прямой *x=2*.

Решение: Построим данные линии



Найдем точки пересечения графика функции с осью Ох: $y=-x^2-2x+3$,
$-x^2-2x+3=0$, $x_1=1,\ x_2=-3$

$$S=\int_0^1(-x^2-2x+3)dx-\int_1^2(-x^2-2x+3)dx=\left.\left(-\frac{x^3}{3}-x^2+3x\right)\right|_0^1+\left.\left(-\frac{x^3}{3}-x^2+3x\right)\right|_1^2=$$

$$=-\frac{1}{3}-1+3-\left(-\frac{8}{3}-4+6\right)+\left(-\frac{1}{3}-1+3\right)=\frac{5}{3}+\frac{2}{3}+\frac{5}{3}=\frac{12}{3}=4(кв.ед.)$$

Задания практической работы Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями

Задание 1

1,11,21. $y=8x-x^2-7$ и осью ох

2,12,22. $y=x^3-1$, y = 0, x = 0

3,13,23 . $y=x^2-3x-4$ и осью ОХ

4,14,24. $y^2=4x$ *и* $x^2=4y$

5,15,25. $y=5x-x^2+6$ и осью ОХ

6,16,26. $y=x^3$, $y=x^2$, x = −1, x = 0

7,17,27. $y=x^2-6x+8$ и осью ОХ

8,18,28. $y=x^2$ и $y=x+2$

9,19,29 $y=x^2-4x-5$ и осью ОХ

10,20,30. $y = 6x - 3x^2$ *и осью ОХ*

Задание 2

1,11,21. $y = x^2 + 2$ и $y = 2x + 2$

2,12,22. y = x^2 и $y = 2 - x^2$

3,13,23. $xy = 6$ и $y + x - 7 = 0$

4,14,24. $y = 2^x$, $y = 2x - x^2$, x = 0, x=1

5,15,25. $y = \ln x$, x =e , y =0

6,16,26. $y = \dfrac{4}{x^2}$, x =1, y = x – 1

7,17,27. $y = x^2 + x$, $y = 1 - x^2$, x = 0 , x = 1

8,18,28. $y = x^3$, x = 2

9,19,29. $y = \cos x$, x = 0, x = 2π, y = 0

10,20,30. y = $\sqrt{x}$, y = 2, x = 0

Задание 3

1,11,21. x − y + 3=0, x + y −1= 0, y = 0

2,12,22. 2x − 3y + 6 = 0, y =0 и x = 3

3,13,23. $y = x^2 - 2x + 3$ и y = 3x −1

4,14,24. x − y +2 = 0, y =0, x = −1, x = 2

5,15,25. y^2 = 4x, x = 1 и осью OX

6,16,36. $y = x^2$ и y = −3x

7,17,37. x − y +3 =0 , x + y −1= 0, y = 0

8,18,28. x^2 = 3y и y = x

9,19,29. x − y -2=0, x + y +1= 0, y = 0

10,20,30. y^2 = 9x, x = 3 и осью OX

Контрольные вопросы

1.Что такое криволинейная трапеция?
2.Формула Ньютона-Лейбница
3.Графики элементарных функций.
4. Различные виды плоских фигур и способы вычисления их площадей.

Практическая работа № 16 по теме

«Приближенное вычисление определенных интегралов»

Цель: проверить умение вычислять определенные интегралы по формулам прямоугольников, трапеций, парабол.

Время выполнения 90 минут

Материальное обеспечение
1.Теоретические сведения
2.Задание
3.Лист А 4
4.Калькуляторы
Порядок выполнения работы
1.Изучить задание
2. Изучить теоретические сведения
3. Выполнить и оформить работу
4.Показать результаты преподавателю
Домашнее задание
1.Подготовить ответы на контрольные вопросы
Теоретические сведения

Приближенное вычисление определенного интеграла.

Как было сказано выше, существует огромное количество функций, интеграл от которых не может быть выражен через элементарные функции. Для нахождения интегралов от подобных функций применяются разнообразные приближенные методы, суть которых заключается в том, что подынтегральная функция заменяется “близкой” к ней функцией, интеграл от которой выражается через элементарные функции.

Формула прямоугольников.

Если известны значения функции f(x) в некоторых точках x_0, x_1, … , x_m, то в качестве функции “близкой” к f(x) можно взять многочлен P(x) степени не выше m, значения которого в выбранных точках равны значениям функции f(x) в этих точках.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P(x)dx$$

Если разбить отрезок интегрирования на n равных частей $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. При этом:

$$y_0 = f(x_0),\ \ y_1 = f(x_1),\ \ \ldots\ ,\ y_n = f(x_n).$$

Составим суммы: $y_0\Delta x + y_1\Delta x + \ldots + y_{n-1}\Delta x$

$$y_1\Delta x + y_2\Delta x + \ldots + y_n\Delta x$$

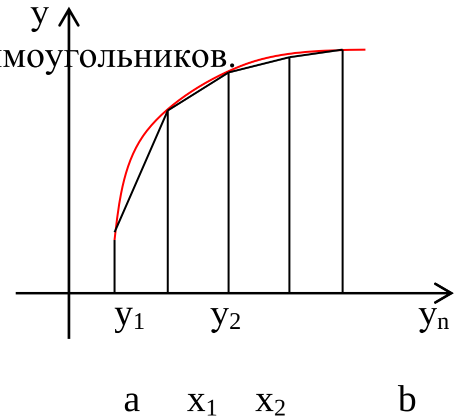
Это соответственно нижняя и верхняя интегральные суммы. Первая соответствует вписанной ломаной, вторая – описанной.

Тогда $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1})$ или

$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_1 + y_2 + \ldots + y_n)$ - любая из этих формул может применяться для приближенного вычисления определенного интеграла и называется **общей формулой прямоугольников.**

Формула трапеций.

Эта формула является более точной по сравнению с формулой прямоугольников.



Подинтегральная функция в этом случае заменяется на вписанную ломаную.

Геометрически площадь криволинейной трапеции заменяется суммой площадей вписанных трапеций. Очевидно, что чем больше взять точек n разбиения интервала, тем с большей точностью будет вычислен интеграл.

Площади вписанных трапеций вычисляются по формулам:

$$\frac{y_0 + y_1}{2}\Delta x; \quad \frac{y_1 + y_2}{2}\Delta x; \quad \ldots \quad , \frac{y_{n-1} + y_n}{2}\Delta x$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{y_0 + y_1}{2}\Delta x + \frac{y_1 + y_2}{2}\Delta x + \ldots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2}\Delta x$$

После приведения подобных слагаемых получаем **формулу трапеций**:

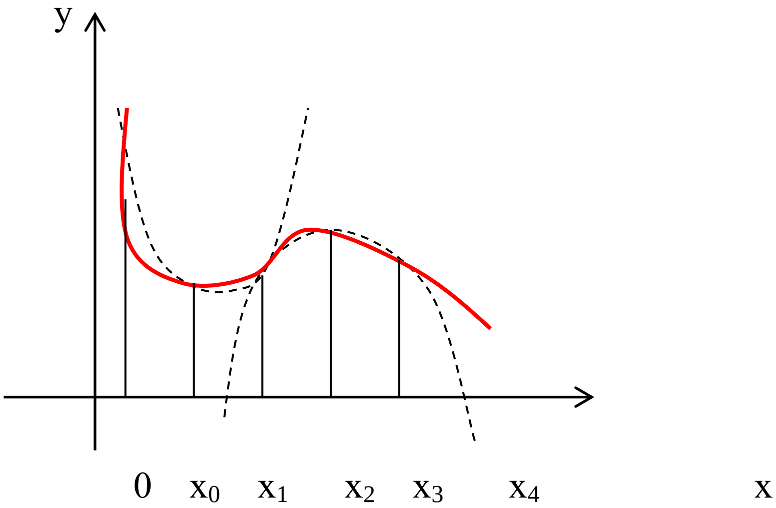
$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}\right)$$

Формула парабол
(формула Симпсона или квадратурная формула).

(Томас Симпсон (1710-1761)- английский математик)

Разделим отрезок интегрирования [a, b] на четное число отрезков (2m). Площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции f(x) заменим на площадь криволинейной трапеции, ограниченной параболой второй степени с осью симметрии, параллельной оси Оу и проходящей через точки кривой, со значениями $f(x_0)$, $f(x_1)$, $f(x_2)$.

Для каждой пары отрезков построим такую параболу.



Уравнения этих парабол имеют вид $Ax^2 + Bx + C$, где коэффициенты A, B, C могут быть легко найдены по трем точкам пересечения параболы с исходной кривой.

$$y_0 = Ax_0^2 + Bx_0 + C$$
$$y_1 = Ax_1^2 + Bx_1 + C$$
$$y_2 = Ax_2^2 + Bx_2 = C$$

(1)

Обозначим $2h = x_2 - x_0$.

$$S = \int_{x_0}^{x_2} (Ax^2 + Bx + C)dx = \left[A\frac{x^3}{3} + B\frac{x^2}{2} + Cx \right]\Bigg|_{x_0}^{x_2}$$

Если принять $x_0 = -h$, $x_1 = 0$, $x_2 = h$, то $S = \frac{h}{3}(2Ah^2 + 6C)$

(2)

Тогда уравнения значений функции (1) имеют вид:

$$y_0 = Ah^2 - Bh + C$$
$$y_1 = C$$
$$y_2 = Ah^2 + Bh + C$$

С учетом этого: $y_0 + 4y_1 + y_2 = 2Ah^2 + 6C$.

Отсюда уравнение (2) примет вид: $S = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$

Тогда

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

$$\int_{x_2}^{x_2} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4)$$

....

Складывая эти выражения, получаем **формулу Симпсона:**

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6m}\left[y_0 + y_{2m} + 2(y_2 + y_4 + ... + y_{2m-2}) + 4(y_1 + y_3 + ... + y_{2m-1})\right]$$

Чем больше взять число m, тем более точное значение интеграла будет получено.

Пример. Вычислить приближенное значение определенного интеграла $\int_{-2}^{8}\sqrt{x^3+16}dx$ с помощью формулы Симпсона, разбив отрезок интегрирования на 10 частей.

По формуле Симпсона получим:

$$\int_{-2}^{8}\sqrt{x^3+16}dx \approx \frac{8+2}{6\cdot 5}[y(-2) + y(8) + 2[y(0) + y(2) + y(4) + y(6)] + 4[y(-1) + y(1) + y(3) + y(5) + y(7)]].$$

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
f(x)	2.828	3.873	4	4.123	4.899	6.557	8.944	11.874	15.232	18.947	22.978

$$\int_{-2}^{8}\sqrt{x^3+16}dx \approx \frac{8+2}{6\cdot 5}[2.828 + 22.978 + 2[4 + 4.899 + 8.944 + 15.232] + 4[3.873 + 4.123 + 6.557 + 11.874 + 18.947]] = 91.151$$

Точное значение этого интеграла – 91.173.

Как видно, даже при сравнительно большом шаге разбиения точность полученного результата вполне удовлетворительная.

Для сравнения применим к этой же задаче формулу трапеций.

$$\int_{-2}^{8}\sqrt{x^3+16}dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2} + y_1 + y_2 + ... + y_{n-1}\right) = \frac{8+2}{10}\left(\frac{2.828+22.978}{2} + 3.873 + 4 + 4.123 + 4.899 + 6.557 + 8.944 + 11.874 + 15.232 + 18.947\right) = 91.352$$

Формула трапеций дала менее точный результат по сравнению с формулой Симпсона.

Задание. Вычислить приближенное значение интеграла методом прямоугольников, трапеций, методом Симпсона, взяв п=10, точность вычислений 10^{-5}.

В 1. $\int_0^4 \sqrt{16 - X^2}\, dx$

В 2. $\int_{-3}^3 X^2\sqrt{9 - X^2}\, dx$

В 3. $\int_0^4 \sqrt{X^3 + 9}\, dx$

В 11. $\int_2^3 \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} dx$

В 5. $\int_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \frac{\sqrt{X^2-2}}{X^4} dx$

В 6. $\int_0^8 \sqrt{8X - X^2}\, dx$

В 7. $\int_0^4 X^2 sinx\, dx$

В 8. $\int_0^1 \sqrt{4 + X^2}\, dx$

В 9. $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4-3x}} dx$

В 10. $\int_0^2 \sqrt{X + X^2}\, dx$

В 11. $\int_2^3 \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} dx$

В 16. $\int_2^3 \frac{0{,}2x^2}{\ln x} dx$

В 17. $\int_0^2 \sqrt{4 - X^2}\, dx$

В 18. $\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - 0{,}11 sin^2 x}\, dx$

В 19. $\int_1^2 \frac{1+x+x^2}{\sqrt{1+x^3}} dx$

В 20. $\int_0^{\pi} \frac{1}{3+2\cos x} dx$

В 21. $\int_1^5 \sqrt{X^3 - 8}\, dx$

В 22. $\int_0^4 \frac{2}{\sqrt{4-5x}} dx$

В 23. $\int_0^3 \sqrt{X - X^3}\, dx$

В 24. $\int_0^2 \sqrt{3 - 2X^2}\, dx$

В 25. $\int_0^1 \sqrt{4 + 2X^4}\, dx$

В 26. $\int_0^1 \frac{\ln(2+x)}{1-x^3} dx$

В 12. $\int_0^1 \sqrt{1-X^2}\,dx$

В 13. $\int_0^1 \sqrt{1+X^4}\,dx$

В 14. $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+X^2}\mathrm{dx}$

В 15. $\int_0^{\pi/3} cos^3x\,dx$

В 27. $\int_0^{\pi/4} sin^3x\,dx$

В 28. $\int_0^4 X^3 cosx\,dx$

В 29. $\int_2^3 \frac{x^3}{\sqrt{3+x^2}}\mathrm{dx}$

В 30. $\int_0^1 \sqrt{2+4X^4}\,dx$

Контрольные вопросы:

1.В чем суть метода прямоугольников?
2. В чем суть метода трапеций?
3. . В чем суть метода парабол?

Практическая работа № 17 по теме

«Вычисление двойных интегралов в декартовых координатах»

Цель: проверить умение вычислять двойные интегралы в декартовых координатах

Время выполнения 90 минут

Материальное обеспечение
1.Теоретические сведения
2.Задание
3.Лист А 4
4.Калькуляторы

Порядок выполнения работы
1.Изучить задание
2. Изучить теоретические сведения
3. Выполнить и оформить работу
4.Показать результаты преподавателю

Домашнее задание

1.Подготовить ответы на контрольные вопросы

Теоретический материал

Пусть в некоторой ограниченной замкнутой области D плоскости xOy задана непрерывная функция $z = f(P)$, где точка $P \in D$. Разобьем эту область произвольным образом на n частичных плоских ячеек $S_1, S_2, ..., S_n$, имеющие площади $\Delta S_1, \Delta S_2, ..., \Delta S_n$. В каждой такой ячейке выберем по одной произвольной точке $P_1, P_2, ..., P_n$ и вычислим значения функции $f(P)$ во взятых точках. Составим так называемую *интегральную сумму* функции $f(P)$ по области D:

$$\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta S_i = f(P_1)\Delta S_1 + f(P_2)\Delta S_2 + ... + f(P_n)\Delta S_n . \qquad (1)$$

Двойным интегралом от функции $f(P)$ по области D называется предел интегральной суммы (1) при стремлении к нулю наибольшего из диаметров всех ячеек данного разбиения:

$$\iint_D f(P)dS = \lim_{\max d(S_i)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta S_i \qquad (2)$$

Основные свойства двойного интеграла

1. Двойной интеграл по области D от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме двойных интегралов от слагаемых функций по этой же области:
$$\iint_D [f_1(P) \pm f_2(P)]dS = \iint_D f_1(P)dS \pm \iint_D f_2(P)dS .$$

2. Постоянный множитель k можно вынести за знак двойного интеграла:
$$\iint_D k \cdot f(P)dS = k \cdot \iint_D f(P)dS .$$

3. Область интегрирования двойного интеграла можно разбить на части, то есть если область D состоит из двух непересекающихся областей D_1 и D_2, то
$$\iint_D f(P)dS = \iint_{D_1} f(P)dS + \iint_{D_2} f(P)dS .$$

Примеры

Задание 1: Вычислить повторный интеграл $\int_1^3 dx \int_2^{x^2+4} \frac{1}{x^2} dy$.

Решение: Вычислим сначала внутренний интеграл по переменной y, считая x постоянным:

$$\int_1^3 dx \int_2^{x^2+4} \frac{1}{x^2} dy = \int_1^3 \left[\int_2^{x^2+4} \frac{1}{x^2} dy \right] dx = \int_1^3 \left[\frac{1}{x^2} \int_2^{x^2+4} dy \right] dx =$$

$$= \int_1^3 \left[\frac{1}{x^2} [y]_2^{x^2+4} \right] dx = \int_1^3 \left[\frac{1}{x^2} \left(x^2 + 4 - 2\right) \right] dx =$$

$$= \int_1^3 \left(1 + 2x^{-2}\right) dx = \left[x - \frac{2}{x} \right]_1^3 = \left(3 - \frac{2}{3}\right) - (1 - 2) = 3\frac{1}{3}.$$

Задание 2: Вычислить двойной интеграл $\iint_D (x+y)dxdy$ по области D, ограниченной прямыми $x = 2$, $x = 6$, $y = 1$ и $y = 4$.

Решение: Область D является простой относительно осей Ox и Oy (рис. 1), поэтому для вычисления интеграла можно использовать любую из формул $\iint_D f(x, y)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)dy$ или $\iint_D f(x, y)dxdy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)dx$. Сначала вычислим двойной интеграл по первой формуле: $\iint_D (x+y)dxdy = \int_2^6 dx \int_1^4 (x+y)dy$. Вычислив внутренний интеграл по переменной y при постоянном x, находим

$\int_1^4 (x+y)dy = \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_1^4 = (4x + 8) - \left(x + \frac{1}{2}\right) = 3x + \frac{15}{2}$. Подставив это выражение во внешний интеграл, получим $\int_2^6 \left(3x + \frac{15}{2}\right) dx = \left[\frac{3x^2}{2} + \frac{15}{2} x \right]_2^6 = 78$.

Теперь вычислим двойной интеграл по второй формуле $\iint_D (x+y)dxdy = \int_1^4 dy \int_2^6 (x+y)dx$. Найдем внутренний интеграл:

$\int_2^6 (x+y)dx = \left[\frac{x^2}{2} + xy\right]_2^6 = (18+6y)-(2+2y) = 4y+16$. Далее найдем внешний интеграл: $\int_1^4 (4x+16)dy = \left[2y^2+16y\right]_1^4 78$, то есть получили тот же ответ.

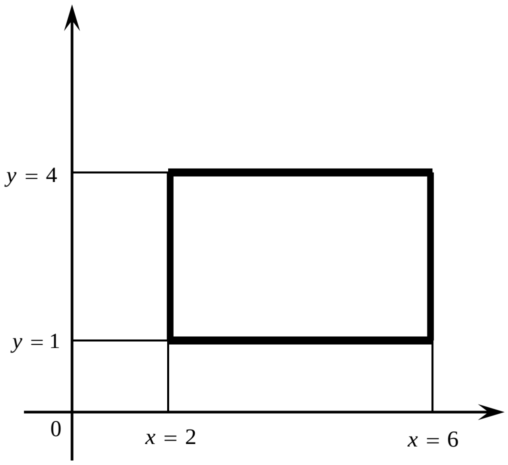


рис. 1

Задание 1. Вычислить интеграл по области D, ограниченной указанными линиями.

В 1 $\iint y^2 cosxy\, dx\, dy$

D

$D: x = 0, y = \sqrt{\pi/2}$ y=x/2

В 2 $\iint 3y^2 sin\frac{xy}{2} dx\, dy$

D

$D: x = 0, y = \sqrt{4\pi/3}$; y=2x/3

В 3 $\iint (3x^2y^2 + 4xy)\, dx\, dy$:

D

$D: x = 1 \quad y = -\sqrt{x}$; y=$x^2$

В 16 $\iint y^2 cos\frac{xy}{2} dx\, dy$

D

$D: x = 0, y = \sqrt{\pi/2}$; y=x/2

В17 $\iint (18x^2y^2 + 32x^3y^3)\, dx\, dy$

D

$D: x = 1, y = -\sqrt[3]{x}$; y=$x^3$

В18 $\iint (9x^2y^2 + 2xy)\, dx\, dy$

D

D: x = 1; $y = \sqrt{x}$; y=$-x^3$

B 4 $\iint_D (27x^2y^2 + 12xy)\, dx\, dy$

$D: x = 1, y = -\sqrt[3]{x}$; y=$x^2$

B 5 $\iint_D y^2 \sin\frac{xy}{2}\, dx\, dy$

$D: x = 0, y = \sqrt{\pi}$; y=x

B 6 $\iint_D 4y^2 \sin 2xy\, dx\, dy$

$D: x = 0, y = \sqrt{2\pi}$; y=2x

B 7 $\iint_D 4y^2 \sin xy\, dx\, dy$

$D: x = 0, y = \sqrt{\pi/2}$; y=x

B8 $\iint_D (49x^2y^2 + 28xy)\, dx\, dy$

$D: x = 1, y = -\sqrt[3]{x}$; y=$x^2$

B9 $\iint_D (9x^2y^2 + 48x^3y^3)\, dx\, dy$

$D: x = 1, y = \sqrt{x}$; y=$-x^2$

B10 $\iint_D y^2 e^{-\frac{xy}{4}}\, dx\, dy$

$D: x = 0, y = 2$; y=x

B 19 $\iint_D (18x^2y^2 + 8xy)\, dx\, dy$

$D: x = 1, y = \sqrt[3]{x}$; y=$-x^2$

B 20 $\iint_D y^2 e^{-\frac{xy}{4}}\, dx\, dy$

$D: x = 0, y = 4$; y=2x

B 21 $\iint_D (27x^2y^2 + 12xy)\, dx\, dy$

$D: x = 1, y = -\sqrt{x}$; y=x^3

B 22 $\iint_D (9x^2y^2 + 8xy)\, dx\, dy$

$D: x = 1, y = \sqrt[3]{x}$; y=$-x^3$

B 23 $\iint_D y^2 \cos xy\, dx\, dy$

$D: x = 0, y = \sqrt{\pi}$; y=x

B 24 $\iint_D (18x^2y^2 + 32x^3y^3)\, dx\, dy$

$D: x = 1, y = \sqrt[3]{x}$; y=$-x^2$

B 25 $\iint_D (18x^2y^2 + 32x^3y^3)\, dx\, dy$

$D: x = 1, y = -\sqrt{x}$; y=x^3

В11 $\iint(36x^2y^2+96x^3y^3)\,dx\,dy$

D

$D: x=1, y=\sqrt[3]{x};$ y=$-x^3$

В 12 $\iint y^2 sin\frac{xy}{2}\,dx\,dy$

D

$D: x=0, y=\sqrt{\pi};$ y=x/2

В13 $\iint(12x^2y^2+16x^3y^3)\,dx\,dy$

D

$D: x=1, y=-\sqrt{x};$ y=x^2

В 14 $\iint y^2e^{-\frac{xy}{8}}\,dx\,dy$

D

$D: x=0, y=2;$ y=x/2

В 15 $\iint y^2 cos\frac{xy}{2}\,dx\,dy$

D

$D: x=0, y=\sqrt{2\pi};$ y=2x

В 26 $\iint y^2e^{-\frac{xy}{2}}\,dx\,dy$

D

$D: x=0, y=1;$ y=x/2

В 27 $\iint y^2 cosxy\,dx\,dy$

D

$D: x=0, y=\sqrt{\pi}$; y=2x

В 28 $\iint(18x^2y^2+24xy)\,dx\,dy$

D

$D: x=1; y=-\sqrt[3]{x};$ y=x^3

В 29 $\iint(9x^2y^2+12xy)\,dx\,dy$

D

$D: x=1; y=\sqrt{x};$ y=$-x^2$

В 30 $\iint y^2 cosxy\,dx\,dy$

D

$D: x=0, y=\sqrt{\pi/4}$; y=x

Задача 2. Изменить порядок интегрирования.

2.1. $\int\limits_{-2}^{-1}dy\int\limits_{-\sqrt{2+y}}^{0}f\ dx+\int\limits_{-1}^{0}dy\int\limits_{-\sqrt{-y}}^{0}f\ dx.$

2.2. $\int\limits_{0}^{1}dy\int\limits_{-\sqrt{y}}^{0}f\ dx+\int\limits_{1}^{\sqrt{2}}dy\int\limits_{-\sqrt{-y}}^{0}f\ dx.$

2.3. $\int\limits_{0}^{1}dy\int\limits_{0}^{y}f\ dx+\int\limits_{1}^{\sqrt{2}}dy\int\limits_{0}^{\sqrt{2-y^2}}f\ dx.$

2.4. $\int\limits_{0}^{1}dy\int\limits_{0}^{\sqrt{y}}f\ dx+\int\limits_{1}^{2}dy\int\limits_{0}^{\sqrt{2-y}}f\ dx.$

2.5. $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int\limits_{-\sqrt{2-x^2}}^{0} f\ dy + \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{x}^{0} f\ dy$. 2.6. $\int\limits_{0}^{1/\sqrt{2}} dy \int\limits_{0}^{\arcsin y} f\ dx + \int\limits_{1/\sqrt{2}}^{1} dy \int\limits_{0}^{\arccos y} f\ dx$

2.7. $\int\limits_{-2}^{-1} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{2+y}} f\ dx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{-y}} f\ dx$. 2.8. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{0} f\ dx + \int\limits_{1}^{e} dy \int\limits_{-1}^{-\ln y} f\ dx$

2.9. $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{2-x^2}} f\ dy + \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{0}^{x^2} f\ dy$. 2.10. $\int\limits_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{0} fdy + \int\limits_{-\sqrt{3}}^{0} dx \int\limits_{\sqrt{4-x^2}-2}^{0} fdy$.

2.11. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{1-x^2}^{1} f\ dy + \int\limits_{1}^{e} dx \int\limits_{\ln x}^{1} f\ dy$. 2.12. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{\sqrt[3]{y}} f\ dx + \int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{0}^{2-y} f\ dx$.

2.13. $\int\limits_{0}^{\pi/4} dy \int\limits_{0}^{\sin y} f\ dx + \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} dy \int\limits_{0}^{\cos y} f\ dx$.. 2.14. $\int\limits_{-2}^{-1} dx \int\limits_{-(2+x)}^{0} f\ dy + \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{\sqrt[3]{x}}^{0} f\ dy$.

2.15. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{y}} f\ dx + \int\limits_{1}^{e} dy \int\limits_{\ln y}^{1} f\ dx$. 2.16. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{0} f\ dx + \int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{-\sqrt{2-y}}^{0} f\ dx$.

2.17. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-y}^{0} f\ dx + \int\limits_{1}^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f\ dx$. 2.18. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{y^2} f\ dx + \int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{0}^{2-y} f\ dx$.

2.19. $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} dx \int\limits_{\sqrt{4-x^2}-2}^{0} f\ dy + \int\limits_{\sqrt{3}}^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{0} f\ dy$. 2.20. $\int\limits_{-2}^{-1} dy \int\limits_{-(2+y)}^{0} f\ dx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{\sqrt[3]{y}}^{0} f\ dx$.

2.21. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{y} f\ dx + \int\limits_{1}^{e} dy \int\limits_{\ln y}^{1} f\ dx$. 2.22. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{x^2} f\ dy + \int\limits_{1}^{\sqrt{2}} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{2-x^2}} f\ dy$.

2.23. $\int\limits_0^{\pi/4} dx \int\limits_0^{\sin x} f\ dy + \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} dx \int\limits_0^{\cos x} f\ dy$. 2.24. $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{-1} dy \int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f\ dx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{y}^{0} f\ dx$.

2.25. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} f\ dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{2-x} f\ dy$. 2.26. $\int\limits_0^{\sqrt{3}} dx \int\limits_0^{2-\sqrt{4-x^2}} f\ dy + \int\limits_{\sqrt{3}}^{2} dx \int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} f\ dy$.

2.27. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{-\sqrt{x}}^{0} f\ dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_{-\sqrt{2-x}}^{0} f\ dy$. 2.28. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x} f\ dy + \int\limits_1^{\sqrt{2}} dx \int\limits_0^{\sqrt{2-x^2}} f\ dy$.

2.29. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\sqrt{y}} f\ dx + \int\limits_1^{\sqrt{2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{2-y^2}} f\ dx$. 2.30. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{x}} f\ dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{2-x}} f\ dy$.

Задача 3. Вычислить.

3.1. $\iint\limits_D \left(12x^2y^2 + 16x^3y^3\right)dxdy;$
$D:\ x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt{x}.$

3.2. $\iint\limits_D \left(9x^2y^2 + 48x^3y^3\right)dxdy;$
$D:\ x=1,\ y=\sqrt{x},\ y=-x^2.$

3.3. $\iint\limits_D \left(36x^2y^2 - 96x^3y^3\right)dxdy;$
$D:\ x=1,\ y=\sqrt[3]{x},\ y=-x^3.$

3.4. $\iint\limits_D \left(18x^2y^2 + 32x^3y^3\right)dxdy;$
$D:\ x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt[3]{x}.$

3.5. $\iint\limits_D \left(27x^2y^2 + 48x^3y^3\right)dxdy;$
$D:\ x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt[3]{x}.$

3.6. $\iint\limits_D \left(18x^2y^2 + 32x^3y^3\right)dxdy;$
$D:\ x=1,\ y=\sqrt[3]{x},\ y=-x^2.$

3.7. $\iint\limits_D \left(18x^2y^2 + 32x^3y^3\right)dxdy;$
$D:\ x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt{x}.$

3.8. $\iint\limits_D \left(27x^2y^2 + 48x^3y^3\right)dxdy;$
$D:\ x=1,\ y=\sqrt{x},\ y=-x^3.$

3.9. $\iint\limits_D \left(4xy+3x^2y^2\right)dxdy;$

$D:\ x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt{x}.$

3.10. $\iint\limits_D \left(12xy+9x^2y^2\right)dxdy;$

$D:\ x=1,\ y=\sqrt{x},\ y=-x^2.$

3.11. $\iint\limits_D \left(8xy+9x^2y^2\right)dxdy;$

$D:\ x=1,\ y=\sqrt[3]{x},\ y=-x^3.$

3.12. $\iint\limits_D \left(24xy+18x^2y^2\right)dxdy;$

$D:\ x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt[3]{x}.$

3.13. $\iint\limits_D \left(12xy+27x^2y^2\right)dxdy;$

$D:\ x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt[3]{x}.$

3.14. $\iint\limits_D \left(8xy+18x^2y^2\right)dxdy;$

$D:\ x=1,\ y=\sqrt[3]{x},\ y=-x^2.$

3.15. $\iint\limits_D \left(\frac{4}{5}xy+\frac{9}{11}x^2y^2\right)dxdy;$

$D:\ x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt{x}.$

3.16. $\iint\limits_D \left(\frac{4}{5}xy+9x^2y^2\right)dxdy;$

$D:\ x=1,\ y=\sqrt{x},\ y=-x^3.$

3.17. $\iint\limits_D \left(24xy-48x^3y^3\right)dxdy;$

$D:\ x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt{x}.$

3.18. $\iint\limits_D \left(6xy+24x^3y^3\right)dxdy;$

$D:\ x=1,\ y=\sqrt{x},\ y=-x^2.$

3.19. $\iint\limits_D \left(4xy+16x^3y^3\right)dxdy;$

$D:\ x=1,\ y=\sqrt[3]{x},\ y=-x^3.$

3.20. $\iint\limits_D \left(4xy+16x^3y^3\right)dxdy;$

$D:\ x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt[3]{x}.$

3.21. $\iint\limits_D \left(44xy+16x^3y^3\right)dxdy;$

$D:\ x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt[3]{x}.$

3.22. $\iint\limits_D \left(4xy+176x^3y^3\right)dxdy;$

$D:\ x=1,\ y=\sqrt[3]{x},\ y=-x^3.$

3.23. $\iint\limits_D \left(xy-4x^3y^3\right)dxdy;$

$D:\ x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt{x}.$

3.24. $\iint\limits_D \left(4xy+176x^3y^3\right)dxdy;$

$D:\ x=1,\ y=\sqrt{x},\ y=-x^3.$

3.25. $\iint\limits_D \left(6x^2y^2 + \frac{25}{3}x^4y^4\right)dxdy;$

$D:\ x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt{x}.$

3.26. $\iint\limits_D \left(9x^2y^2 + 25x^4y^4\right)dxdy;$

$D:\ x=1,\ y=\sqrt{x},\ y=-x^2.$

3.27. $\iint\limits_D \left(3x^2y^2 + \frac{50}{3}x^4y^4\right)dxdy;$

$D:\ x=1,\ y=\sqrt[3]{x},\ y=-x^3.$

3.28. $\iint\limits_D \left(9x^2y^2 + 25x^4y^4\right)dxdy;$

$D:\ x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt[3]{x}.$

3.29. $\iint\limits_D \left(54x^2y^2 + 150x^4y^4\right)dxdy;$

$D:\ x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt[3]{x}.$

3.30. $\iint\limits_D \left(xy - 9x^5y^5\right)dxdy;$

$D:\ x=1,\ y=\sqrt[3]{x},\ y=-x^2.$

Контрольные вопросы:

1.Что называется интегральной суммой функции $f(x,y)$ в области D ?

2.Дайте определение двойного интеграла.

3.Перечислите основные свойства двойного интеграла.

4.Какие случаи расположения области D относительно осей координат возникают при вычислении двойных интегралов? Запишите формулы вычисления двойных интегралов для каждого из этих случаев.

5.Какие интегралы называются повторными или двукратными?

Практическая работа № 18 по теме

«Вычисление двойных интегралов в полярных координатах»

Цель: проверить умение вычислять двойные интегралы в полярных координатах

Время выполнения 90 минут

Материальное обеспечение

1.Теоретические сведения

2.Задание

3.Лист А 4

4.Калькуляторы

Порядок выполнения работы

1.Изучить задание

2. Изучить теоретические сведения

3. Выполнить и оформить работу
4.Показать результаты преподавателю

Домашнее задание

1.Подготовить ответы на контрольные вопросы

Теоретические сведения

В некоторых случаях граница области интегрирования D может быть образована дугами окружностей, эллипсов и других кривых, уравнения которых в полярной системе координат имеют более простой вид, чем в декартовой системе. Поэтому для упрощения вычислений двойных интегралов по таким областям удобно от декартовых координат переходить к полярным по формулам

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases},$$

где r – полярный радиус, а φ - полярный угол. При этом следует придерживаться следующей схемы.

1) Построить область интегрирования.

2) Записать уравнения кривых, ограничивающих область D, в полярных координатах и определить пределы изменения переменных r и φ.

3) Сделать замену переменных в подынтегральном выражении. При этом элемент площади dS примет вид:

$$dS = r\,dr\,d\varphi.$$

4) Получившийся двойной интеграл

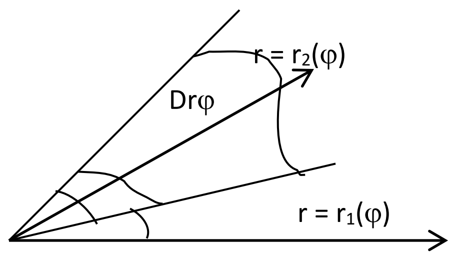
$$\iint\limits_{D} f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_{D_{r,\varphi}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$$

свести к полярному, расставив пределы интегрирования. Обычно внутренний интеграл берется по переменной r, а внешний – по φ.

5) Повторный интеграл вычислить обычным образом, т.е. сначала вычислить внутренний интеграл по переменной r, считая φ постоянной величиной, а потом внешний интеграл, в котором подынтегральная функция будет зависеть только от φ.

I. Пусть требуется вычислить двойной интеграл $\iint\limits_{D_{r,\varphi}} f(r,\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$,если область интегрирования $D_{r,\varphi}$ ограничена линиями

$r = r_1(\varphi)$, $r = r_2(\varphi)$, $\varphi = \varphi_1$, $\varphi = \varphi_2$ $(\varphi_1 < \varphi_2)$.

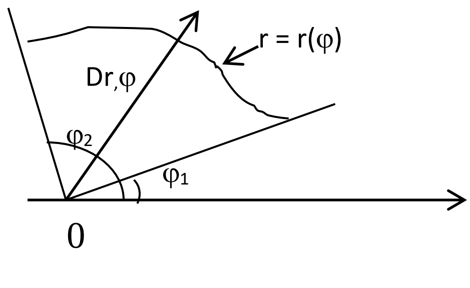


В произвольном месте внутри области $D_{r,\varphi}$ проведем луч из полюса O. Первая от полюса точка пересечения этого луча с границей области (точка входа) даст нижний предел внутреннего интегрирования по r, вторая точка (точка выхода) – верхний предел. Пределами внешнего интеграла по φ являются постоянные углы φ_1 и φ_2. Таким образом двойной интеграл $\iint\limits_{D_{r,\varphi}} f(r,\varphi)\, r\, dr\, d\varphi$ сводится к повторному

$$\iint\limits_{D_{r,\varphi}} f(r,\varphi)\, r\, dr\, d\varphi = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r,\varphi)\, r\, dr.$$

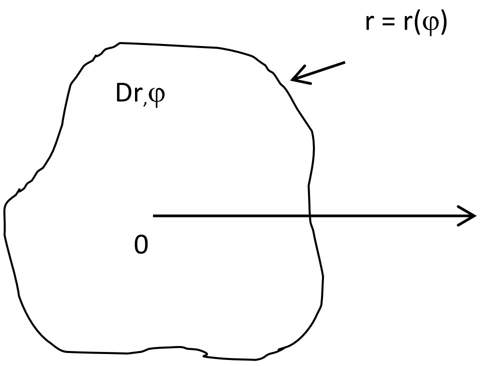
II. Пусть область интегрирования $D_{r,\varphi}$ ограничена линиями $r = r(\varphi)$, $\varphi = \varphi_1$, $\varphi = \varphi_2$ ($\varphi_1 < \varphi_2$). В этом случае точка входа в область $D_{r,\varphi}$ луча, проведенного из полюса, совпадает с полюсом, т.е. нижняя граница изменения переменной r равна нулю, и двойной интеграл сводится к повторному

$$\iint\limits_{D_{r,\varphi}} f(r,\varphi)\, r\, dr\, d\varphi = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{0}^{r(\varphi)} f(r,\varphi)\, r\, dr.$$



III. Пусть область $D_{r,\varphi}$ ограничена одной кривой $r = r(\varphi)$ и полюс O лежит внутри области. Переменная φ в такой области принимает значения $[0, 2\pi]$ и повторный интеграл будет иметь вид

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{r(\varphi)} f(r,\varphi)\, r\, dr.$$



Пример 1. Переходя к полярным координатам, вычислить двойной интеграл

$$\iint_D \frac{y\, dx\, dy}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

если область D – внутренность круга, ограниченного окружностью $x^2 + y^2 = 2ax$.

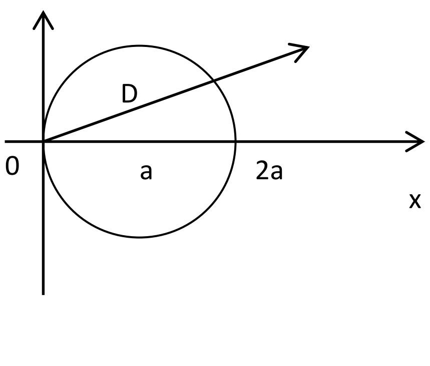
Решение. Построим область D. Для этого приведем уравнение окружности к каноническому виду:

$$x^2 + y^2 = 2ax,$$

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 = a^2,$$

$$(x - a)^2 + y^2 = a^2.$$

y



Центр этой окружности находится в точке (a, 0), радиус равен a.
Используя формулы
$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$, запишем уравнение окружности в полярных координатах

$x^2 + y^2 = 2\,a\,x \;\Rightarrow\; r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = 2\,a\,r\cos\varphi,$

$r^2 = 2\,a\,r\cos\varphi \;\Rightarrow r = 2\,a\cos\varphi.$

Проведем луч из начала координат (полюса) в произвольном месте области. Точка входа в область совпадает с полюсом, значит нижняя граница изменения r равна нулю. Точка выхода лежит на окружности, следовательно, верхняя граница для r равна $2\,a\cos\varphi$. Угол φ здесь меняется от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$.

Преобразуем подынтегральное выражение

$$\frac{y\,dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{r\sin\varphi\, r\,dr\,d\varphi}{\sqrt{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi}} = \frac{r^2\sin\varphi\;dr\,d\varphi}{r} = r\sin\varphi\,dr\,d\varphi.$$

Получившийся двойной интеграл запишем как повторный и вычислим

$$\iint\limits_{D}\frac{y\,dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \iint\limits_{D_{r,\varphi}} r\sin\varphi\,dr\,d\varphi = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\,d\varphi\int\limits_{0}^{2a\cos\varphi} r\,dr =$$

$$= \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cdot\frac{r^2}{2}\Bigg|_{0}^{2a\cos\varphi} d\varphi = -\,2\,a^2\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi\,d(\cos\varphi) =$$

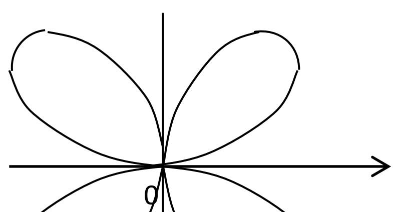
$$= -\,\frac{2}{3}\,a^2\cos^3\varphi\,\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 0.$$

Пример 2. Найти площадь области, ограниченной замкнутой линией $(x^2 + y^2)^3 = 4\,x^2\,y^2$.

Решение. Уравнение данной линии в декартовой системе координат имеет сложный аналитический вид. Чтобы построить эту кривую, запишем ее уравнение в полярной системе координат

$(r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi)^3 = 4\,r^2\cos^2\varphi\;\; r^2\sin^2\varphi,$

$r^6 = 4\,r^4\cos^2\varphi\;\;\sin^2\varphi,$



$r^2 = 4\cos^2\varphi \sin^2\varphi$,

$r^2 = \sin^2 2\varphi$,

$r = |\sin 2\varphi|$.

Для вычисления площади используем формулу

$$\boldsymbol{S} = \iint\limits_D dx\,dy = \iint\limits_{D_{r,\varphi}} r\,dr\,d\varphi .$$

Учитывая симметрию фигуры, получим

$$S = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\sin 2\varphi} r\,dr = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^2}{2}\Big|_0^{\sin 2\varphi} d\varphi = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\varphi\, d\varphi =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 4\varphi)\, d\varphi = \left(\varphi - \frac{1}{4}\sin 4\varphi\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}.$$

Задания практической работы

Задание 1. Вычислить интеграл по области D, заданной системой неравенств:

- изобразить область в декартовой системе координат;
- вычислить интеграл, переходя к полярным координатам.

В 1 $\iint\limits_D \sqrt{16-x^2-y^2}\,dx\,dy$

$D:\ \begin{cases} x^2+y^2 \le 4; \\ x \ge 0; y \le 0 \end{cases}$

В 2. $\iint\limits_D \frac{1}{(9+X^2+Y^2)^2}\,dx\,dy$

D: $\begin{cases} 4 \le x^2+y^2 \le 9 \\ y \ge 0; x \ge 0 \end{cases}$

В 16 $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$

D: $\begin{cases} x^2+y^2 \le 9 \\ y \ge 0; x \ge 0 \end{cases}$

В 17. $\iint\limits_D \frac{1}{\sqrt{3-x^2-y^2}}\,dx\,dy$

D: $\begin{cases} x^2+y^2 \le 9; \\ 0 \le y \end{cases}$

B 3. $\iint\limits_D \frac{108}{(9-X^2Y^2)^2} dx\, dy$

D: $\begin{cases} 1 \le x^2 + y^2 \le 9; \\ x \le 0 \end{cases}$

B 4. $\iint\limits_D \frac{1}{\sqrt{9-x^2-y^2}} dx\, dy$

D: $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 3; \\ y \le 0 \end{cases}$

B 5. $\iint\limits_D arctg\frac{x}{y} dx\, dy$

D: $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 4; \\ y \ge 0 \end{cases}$

B 6. $\iint\limits_D \frac{1}{(4-X^2-Y^2)^2} dx\, dy$

D: $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 2; \\ y^2 \le 0 \end{cases}$

B 7. $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2} dx\, dy$

D: $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 9; \\ y \ge 0 \end{cases}$

B 8. $\iint \sqrt{16 - x^2 - y^2}\, dx\, dy$

B 18. $\iint\limits_D (x-y)\, dx\, dy$

D: $\begin{cases} 2 \le x^2 + y^2 \le 4; \\ 0 \le y \end{cases}$

B19. $\iint\limits_D \sqrt{16 - x^2 - y^2}\, dx\, dy$

D: $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 4; \\ 0 \le x \end{cases}$

B 20. $\iint\limits_D \frac{1}{x^2} e^{\frac{y}{x}} dx\, dy$

D: $\begin{cases} 1 \le x^2 + y^2 \le 4; \\ 0 \le y \end{cases}$

B 21. $\iint\limits_D \frac{1}{(4-X^2-Y^2)^2} dx\, dy$

D: $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 4; \\ y \ge 0 \end{cases}$

B 22 $\iint\limits_D arctg\frac{x}{y} dx\, dy$

D: $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 4; \\ 0 \le \mathrm{y} \end{cases}$

B 23. $\iint \frac{y}{x^2} dx\, dy$

D

D: $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 1; \\ y \le 0 \end{cases}$

D

D: $\begin{cases} 0 \le \text{y}; \\ 16 \le x^2 + y^2 \le 25 \end{cases}$

B 9. $\iint e^{x^2+y^2}\, dx\, dy$

D

D: $\begin{cases} 4 \le x^2 + y^2 \le 9; \\ 0 \le y \end{cases}$

B 24. $\iint \frac{1}{(4+X^2+Y^2)^2}\, dx\, dy$

D

D: $\begin{cases} y \ge 0; x \ge 0; \\ 2 \le x^2 + y^2 \le 4 \end{cases}$

B 10. $\iint ln\sqrt{16 - x^2 - y^2}\, dx\, dy$

D

D: $\begin{cases} 4 \le x^2 + y^2 \le 9; \\ y \ge 0 \end{cases}$

B 25. $\iint \frac{x^2}{y^3}\, dx\, dy$

D

D: $\begin{cases} y \ge 0; \\ x^2 + y^2 \le 9 \end{cases}$

B 11. $\iint (x - y)\, dx\, dy$

D

D: $\begin{cases} 2 \le x^2 + y^2 \le 4; \\ y \ge 0; x \ge 0 \end{cases}$

B 26. $\iint \frac{x}{y^2}\, dx\, dy$

D

D: $\begin{cases} x \ge 0; \\ 1 \le x^2 + y^2 \le 4 \end{cases}$

B 12. $\iint (9 - x^2 - y^2)\, dx\, dy$

D

D: $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 4; \\ y \le 0 \end{cases}$

B 27. $\iint \frac{y^2}{x^2}\, dx\, dy$

D

D: $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 4; \\ y \ge 0 \end{cases}$

B13. $\iint\limits_D ln\sqrt{16-x^2-y^2}\,dx\,dy$

D: $\begin{cases} 4 \le x^2+y^2 \le 9; \\ y \ge 0 \end{cases}$

B 28 $\iint\limits_D \frac{1}{x+y}\,dx\,dy$

D: $\begin{cases} x^2+y^2 \le 4 \\ y \ge 0 \end{cases}$

B 14. $\iint\limits_D \sqrt{4-x^2-y^2}\,dx\,dy$

D: $\begin{cases} x^2+y^2 \le 9; \\ y \ge 0 \end{cases}$

B 29. $\iint\limits_D \frac{1}{(X^2+Y^2)^2}\,dx\,dy$

D: $\begin{cases} x \ge 0; \\ x^2+y^2 \le 2 \end{cases}$

B 15. $\iint\limits_D (1-x^2-y^2)\,dx\,dy$

D: $\begin{cases} 0 \le y; \\ x^2+y^2 \le 9 \end{cases}$

B 30. $\iint\limits_D \frac{x+y}{x^2+y^2}\,dx\,dy$

D: $\begin{cases} x^2+y^2 \le 4; \\ y \le 0 \end{cases}$

Задание 2. Вычислить двойной интеграл, перейдя к полярным координатам.

1. $\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$, где $D:\ x^2+y^2=4;\ y \ge 0$.
2. $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$, где .
3. $\iint\limits_D \sqrt{1+x^2+y^2}\,dxdy$, где $D:\ x^2+y^2=16;\ x \ge 0;\ y \ge 0$.
4. $\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{25-x^2-y^2}}$, где $D:\ x^2+y^2=25;\ x \ge 0;\ y \ge 0$.
5. $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$, где $D:\ x^2+y^2=1;\ x \ge 0$.
6. $\iint\limits_D (1+x^2+y^2)\,dxdy$, где $D:\ x^2+y^2=4;\ x \ge 0;\ y \ge 0$.
7. $\iint\limits_D 5\,dxdy$, где $D:\ x^2+y^2=9$.

8. $\iint\limits_D \frac{1}{7}dxdy$, где $D:\ x^2+y^2=2x;\ y\geq 0$.

9. $\iint\limits_D 3dxdy$, где $D:\ x^2+y^2=16; x\leq 0$.

10. $\iint\limits_D dxdy$, где $D:\ x^2+y^2=49;\ y\leq 0$.

11. $\iint\limits_D 4dxdy$, где $D:\ x^2+y^2=4x;\ y\geq 0$

12. $\iint\limits_D \sqrt{9-x^2-y^2}dxdy$, где $D:\ x^2+y^2=9;\ x\geq 0;\ y\geq 0$.

13. $\iint\limits_D 5dxdy$, где $D:\ x^2+y^2+2x=0$.

14. $\iint\limits_D \frac{2}{3}dxdy$, где $D:\ x^2+y^2=25;\ x\leq 0;\ y\geq 0$.

15. $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$, где $D:\ x^2+y^2=4y$.

16. $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$, где $D:\ x^2+y^2=6x$.

17. $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$, где $D:\ (x+1)^2+y^2=1$.

18. $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$, где $D:\ (x-1)^2+y^2=1$.

19. $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$, где $D:\ x^2+(y+2)^2=4$.

20. $\iint\limits_D \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy$, где $D:\ x^2+y^2=2x$.

21. $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$, где $D:\ x^2+y^2+4y=0$.

22. $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$, где $D:\ x^2+y^2+6x=0$.

23. $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$, где $D:\ x^2+y^2-10y=0$.

24. $\iint\limits_D arctg\frac{y}{x}dxdy$, где $D:\ x^2+y^2=1$.

25. $\iint\limits_D arctg\frac{y}{x}dxdy$, где $D:\ x^2+y^2=9$.

26. $\iint\limits_D arctg\frac{y}{x}dxdy$, где $D:\ x^2+y^2=16$.

27. $\iint\limits_D xdxdy$, где $D:\ x^2+y^2=16$.

28. $\iint\limits_D x\,dxdy$, где $D:\ x^2 + y^2 = 2y$.

29. $\iint\limits_D y\,dxdy$, где $D:\ x^2 + y^2 = 16$.

30. $\iint\limits_D y\,dxdy$, где $D:\ x^2 + y^2 = 4x$.

Контрольные вопросы:

1.Сформулировать алгоритм перехода от декартовых координат к полярным координатам.

Практическая работа № 19 по теме

«Вычисление площадей с помощью двойных интегралов»

Цель: проверить умение вычислять площади с помощью двойных интегралов .

Время выполнения 90 минут

Материальное обеспечение

1.Теоретические сведения

2.Задание

3.Лист А 4

4.Калькуляторы

Порядок выполнения работы

1.Изучить задание

2. Изучить теоретические сведения

3. Выполнить и оформить работу

4.Показать результаты преподавателю

Домашнее задание

1.Подготовить ответы на контрольные вопросы

Теоретический сведения

Площадь S плоской области D в прямоугольных координатах вычисляется по формуле

$$S = \iint\limits_D dxdy; \qquad (1)$$

а в полярных координатах – по формуле

$$S = \iint\limits_{D} r dr d\varphi . \qquad (2)$$

Объем цилиндрического тела, ограниченного сверху поверхностью $z = f(x, y)$, снизу областью $z = 0$ и сбоку прямой цилиндрической поверхностью, вырезающей на плоскости xOy $(z = 0)$ область D (рис. 1), вычисляется по формуле

$$V = \iint\limits_{\geq D} z dx dy \qquad (3)$$

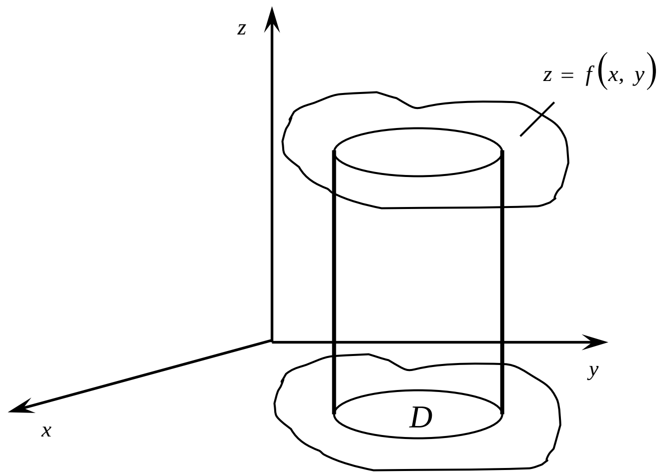


рис. 1

Примеры

Задание: Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z = 2x + 1$, $x = 0$, $y = 4$, $y = x^2$.

Решение: Тело, ограниченное заданными поверхностями, представляет собой вертикальный параболический цилиндр, расположенный в первом октанте. Сверху тело ограничено плоскостью $z = 2x + 1$, сбоку параболическим цилиндром $y = x^2$ и плоскостями $x = 0$ и $y = 4$. Найдем точки пересечения параболы $y = x^2$ и прямой $y = 4$: $\begin{cases} y = x^2 \\ y = 4 \end{cases}$. Таким образом, получим одну точку пересечения $M(2; 4)$.

Значение $x=-2$ не рассматриваем, так как цилиндр расположен в первом октанте. Область D запишем в виде системы неравенств $0 \le x \le 2$ и $x^2 \le y \le 4$.

Согласно формуле (3), получим

$$V=\iint\limits_D zdxdy=\int\limits_0^2 dx\int\limits_{x^2}^4 (2x+1)dy=\int\limits_0^2 [2xy+y]_{x^2}^4\, dx=\int\limits_0^2 \left(8x+4-2x^3-x^2\right)dx=13\frac{1}{3}\text{(куб. ед.)}$$

Задания практической работы

Задание 1. Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями

В1. $y^2-2y+x^2=0$, $y^2-4y+x^2=0$

$y=\frac{x}{\sqrt{3}}$, $y=\sqrt{3}x$

В 2. $y^2-6y+x^2=0$, $y^2-8y+x^2=0$

$y=\frac{x}{\sqrt{3}}$, $y=\sqrt{3}x$

В 3. $y^2-8y+x^2=0$, $y^2-10y+x^2=0$

$y=\frac{x}{\sqrt{3}}$, $y=\sqrt{3}x$

В 4. $y^2-4y+x^2=0$, $y^2-6y+x^2=0$

$y=x$, $x=0$

В 5. $y^2-6y+x^2=0$, $y^2-10y+x^2=0$

$y=x$, $x=0$

В 6. $y^2-8y+x^2=0$, $y^2-10y+x^2=0$

$x=0$ $y=\sqrt{3}x$

В 7. $y^2-4y+x^2=0$, $y^2-6y+x^2=0$

$x=0$ $y=\sqrt{3}x$

В 16. $y^2-4y+x^2=0$, $y^2-8y+x^2=0$

$y=\frac{x}{\sqrt{3}}$, $y=0$

В 17. $y^2-2y+x^2=0$, $y^2-4y+x^2=0$

$y=x$, $x=0$

В 18. $y^2-4y+x^2=0$, $y^2-8y+x^2=0$

$y=x$, $x=0$

В 19. $y^2-2y+x^2=0$, $y^2-10y+x^2=0$

$y=0$ $y=\sqrt{3}x$

В 20. $y^2-2y+x^2=0$, $y^2-4y+x^2=0$

$y=\frac{x}{\sqrt{3}}$, $y=\sqrt{3}x$

В 21. $y^2-2y+x^2=0$, $y^2-6y+x^2=0$

$y=\frac{x}{\sqrt{3}}$, $y=\sqrt{3}x$

В 22. $y^2-2y+x^2=0$, $y^2-8y+x^2=0$

$y=\frac{x}{\sqrt{3}}$, $y=\sqrt{3}x$

В 8. $y^2-2y+x^2=0$, $y^2-6y+x^2=0$

$y=\frac{x}{\sqrt{3}}$, $y=0$

В 23. $y^2-2y+x^2=0$, $y^2-6y+x^2=0$

$y=\frac{x}{\sqrt{3}}$, $y=0$

В 9. $y^2-2y+x^2=0$, $y^2-10y+x^2=0$

$y=\frac{x}{\sqrt{3}}$, $y=\sqrt{3}x$

В 24. $y^2-2y+x^2=0$, $y^2-6y+x^2=0$

$y=\frac{x}{\sqrt{3}}$, $y=0$

В 10. $y^2-4y+x^2=0$, $y^2-10y+x^2=0$

$y=\frac{x}{\sqrt{3}}$, $y=\sqrt{3}x$

В 25. $y^2-6y+x^2=0$, $y^2-2y+x^2=0$

$y=x$, $x=0$

В 11. $y^2-4y+x^2=0$, $y^2-2y+x^2=0$

$y=x$, $x=0$

В 26. $y^2-4y+x^2=0$, $y^2-2y+x^2=0$

$x=0$, $y=\sqrt{3}x$

В 12. $y^2-6y+x^2=0$, $y^2-8y+x^2=0$

$y=x$, $x=0$

В 27. $y^2-4y+x^2=0$, $y^2-8y+x^2=0$

$x=0$, $y=\sqrt{3}x$

В 13. $y^2-4y+x^2=0$, $y^2-8y+x^2=0$

$y=x$, $x=0$

В 28. $y^2-4y+x^2=0$, $y^2-8y+x^2=0$

$y=\frac{x}{\sqrt{3}}$, $y=\sqrt{3}x$

В 14. $y^2-4y+x^2=0$, $y^2-8y+x^2=0$

$x=0$ $y=\sqrt{3}x$

В 29. $y^2-4y+x^2=0$, $y^2-6y+x^2=0$

$y=\frac{x}{\sqrt{3}}$, $y=\sqrt{3}x$

В15 $y^2-2y+x^2=0$, $y^2-6y+x^2=0$

$y=\frac{x}{\sqrt{3}}$, $x=0$

В 30. $y^2-6y+x^2=0$, $y^2-10y+x^2=0$

$y=\frac{x}{\sqrt{3}}$, $y=\sqrt{3}x$

Задание 2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями в прямоугольной системе координат.

1. $y=4-x^2;\ 3x-y=0;\ y=0$.
2. $2y=x^2;\ 2x+2y-3=0$.
3. $y-2x=0;\ y=x^2;\ x=1$.
4. $y=x^3;\ y=x;\ y=2x$.
5. $y^2=x;\ 3y^2=4x-4$.

17. $x=4y^2;\ x=\dfrac{y^2}{9};\ x=2$.
18. $y=\ln x;\ x+y=1;\ y=1$.
19. $y=2^x;\ y=2x-x^2;\ 0\le x\le 2$.
20. $y=\arcsin x;\ 0\le y\le \pi;\ x\ge 0$.
21. $y=\arccos x;\ y\ge 0;\ x\ge 0$.

6. $y=(x-4)^2;\ y=16-x^2$.

7. $y=x+1;\ y=\cos x;\ y=0$.

8. $y=\frac{2}{\pi}x;\ y=\sin x;\ y=0$.

9. $4y=8x-x^2;\ 4y=x+6$.

10. $y=e^x;\ y=e^{-x};\ x=3$.

11. $y=2^x;\ 2x+3y=8;\ x\geq 0;\ y\geq 0$.

12. $y=\ln x;\ y=-1;\ x=3$.

13. $xy=6;\ x+y=7$.

14. $xy=4;\ x-y=0;\ x-4=0$.

15. $x+2y^2=0;\ x+3y^2=1$.

16. $y^2=x^3;\ x=\frac{4}{3}$.

22. $x=\arcsin y;\ 0\leq x\leq\frac{\pi}{2};\ y\geq 0$.

23. $x=\arccos y;\ y\geq 0;\ x\leq 0$.

24. $y=tg\frac{x}{2};\ y=\sqrt{3};\ x\geq 0$.

25. $y=\sqrt{x-1};\ y=|x-2|$.

26. $x=|y|;\ x=4-y^2$.

27. $x=\ln y;\ y\leq 7.29;\ x\geq 0$.

28. $y=x^2+4x;\ x-y+4=0$.

29. $y=x^2;\ 4y=x^2;\ c=\pm 2$.

30. $y=x^2+1;\ y=3-x^2$

Задание 3

Вычислите объемы тел, ограниченных заданными поверхностями (дополнительное задание)

1) $z=6,\ y=x^2,\ y=4,\ x=0,\ z=0;$

2) $z=3-x-y,\ x=0,\ y=x^2+1,\ y=2,\ z=0;$

3) $z=4x+1,\ y=x^2,\ x=0,\ y=4,\ z=0;$

4) $z=4-x^2,\ x+y-4=0, x=0,\ y=0,\ z=0;$

5) $z=2-x,\ y^2=9x,\ y=3x^2,\ z=0.$

Контрольные вопросы:

1.По какой формуле вычисляется площадь плоской области в прямоугольных координатах?
2. По какой формуле вычисляется площадь плоской области в полярных координатах?
3. По какой формуле находится объем тела, ограниченного поверхностями?

Практическая работа № 20 по теме «Дифференциальные уравнения первого порядка»

Цель: проверить умение решать дифференциальные уравнения первого порядка с разделенными и разделяющимися переменными.

Время выполнения 90 минут

Материальное обеспечение

1.Теоретические сведения

2.Задание

3.Лист А 4

4.Калькуляторы

Порядок выполнения работы

1.Изучить задание

2. Изучить теоретические сведения

3. Выполнить и оформить работу

4.Показать результаты преподавателю

Домашнее задание

1.Подготовить ответы на контрольные вопросы

Теоретический материал

Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее между собой независимую переменную x, искомую функцию y и ее производные или дифференциалы.

Символически дифференциальное уравнение записывается так:

$$F(x, y, y') = 0,\ F(x, y, y'') = 0,\ F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0.$$

Дифференциальное уравнение называется *обыкновенным*, если искомая функция зависит от одного независимого переменного.

Порядком дифференциального уравнения называется порядок старшей производной (или дифференциала), входящей в данное уравнение.

Решением (или *интегралом*) дифференциального уравнения называется такая функция, которая обращает это уравнение в тождество.

Общим решением (или *общим интегралом*) дифференциального уравнения называется такое решение, в которое входит столько независимых произвольных постоянных, каков порядок уравнения. Так, общее решение дифференциального уравнения первого порядка содержит одну произвольную постоянную.

Частным решением дифференциального уравнения называется решение, полученное из общего при различных числовых значениях произвольных постоянных. Значения произвольных постоянных находятся при определенных начальных значениях аргумента и функции.

Дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение, в которое входят производные (или дифференциалы) не выше первого порядка.

Дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными называется уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot \varphi(y).$$

Для решения этого уравнения нужно сначала разделить переменные:

$$\frac{dy}{\varphi(y)} = f(x)dx,$$

а затем проинтегрировать обе части полученного равенства:

$$\int \frac{dy}{\varphi(y)} = \int f(x)dx.$$

Примеры

<u>Задание 1:</u> Найдите общее решение уравнения $x \cdot (1 + y^2)dx = ydy$.

<u>Решение:</u> Разделив переменные, имеем $xdx = \frac{ydy}{1 + y^2}$. Интегрируем обе части полученного уравнения:

$$\int xdx = \int \frac{ydy}{1 + y^2}; \qquad \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2}\ln(1 + y^2) + \frac{1}{2}\ln C.$$

Так как произвольная постоянная C может принимать любые числовые значения, то для удобства дальнейших преобразований вместо C мы написали $\frac{1}{2}\ln C$. Потенцируя последнее равенство, получим $x^2 = \ln[C \cdot (1 + y^2)]$.

Это и есть общее решение данного уравнения.

<u>Задание 2:</u> Найти частное решение уравнения $s \cdot tg\, t\, dt + ds = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $s = 4$ при $t = \frac{\pi}{3}$.

Решение: Разделив переменные, имеем $tg\,t\,dt + \frac{ds}{s} = 0$. Проинтегрируем обе части полученного уравнения:

$\int tg\,t\,dt + \int \frac{ds}{s} = \ln C$; $\quad -\ln\cos t + \ln s = \ln C$,

Или $\ln s = \ln C + \ln\cos t$, $\quad s = C\cos t$.

Это общее решение данного уравнения. Для нахождения значения произвольной постоянной C подставим значения $t = \frac{\pi}{3}$ и $s = 4$ в выражение для общего решения: $4 = C\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$, или $4 = \frac{C}{2}$, откуда $C = 8$.

Следовательно, искомое частное решение, удовлетворяющее указанным начальным условиям, имеет вид $s = 8\cos t$.

Задания практической работы

Задание 1.Найти общее решение уравнений а), б).

Задание 2.Найти частное решение уравнения с разделяющимися переменными

В1.1. а)$x^2\,dx = 3y^2\,dy$

б)$y(1+x)dx + x(1-y)\,dy = 0$

2.$y^2\,dx = e^{-x}\,dy;\ y = 1\ при\ x = 0$

В2. 1.а)$\frac{1}{\sqrt{x}}dy = \frac{3}{\sqrt{y}}dx$

б)$y^2dx + (x-2)\,dy = 0$

2.$\frac{1}{y^2}dx = \frac{1}{x^2}dy, y = 2\ при\ x = 0$

В3 1.а)$\sqrt{x}\,dx = \sqrt{y}\,dy$

б)$(1+y^2)dx - \sqrt{x}\,dy = 0$

2.$(1+y)\,dx = (1-x)\,dy,$

$y = 3\quad при\ x = -2$

В16.1.а)$x^2\,dx = 3y^2\,dy$

б)$y(1+x)dx + x(1-y)\,dy = 0$

2.$dx = e^{-x}\,dy;\ y = 1\ при\ x = 0$

В17. 1.а)$\frac{1}{\sqrt{x}}dy = \frac{3}{\sqrt{y}}dx$

б)$y^2dx + (x-2)\,dy = 0$

2.$dx = \frac{1}{x^2}dy, y = 2\ при\ x = 0$

В18. 1.а)$\sqrt{x}\,dx = \sqrt{y}\,dy$

б)$(1+y^2)dx - \sqrt{x}\,dy = 0$

2.$(1+y)\,dx = (1-x)\,dy,$

$y = 3\ при\ x = -2$

В4. 1.а)$(3x^2-2x)\,dx=dy$

б) -(2xy+3y)$dx+x^2\,dy=0$

2.$y\,dx=x\,dy, y=6$ *при* $x=2$

В5. 1.а)$(4x-3)\,dx=dy$

б) (xy+x)$\frac{dx}{dy}$=1

2.$\frac{2x-1}{y+1}=\frac{dx}{dy},\quad y=0$ *при* $x=5$

В6. 1.а)$x\,dx=dy$

б) 2(xy+y)$dx=x\,dy$

2.$(y+1)\,dx-(1-x)\,dy=0,$

$y=1$ *при* $x=0$

В7.1.а)$x^2\,dx=3y^2\,dy$

б)y(1+x)$dx+x(1-y)\,dy=0$

2.$y^2\,dx=e^{-x}\,dy;\; y=1$ *при* $x=0$

В8.1.а)$\frac{1}{\sqrt{x}}dy=\frac{3}{\sqrt{y}}dx$

б)y²$dx+(x-2)\,dy=0$

2.$\frac{1}{y^2}\,dx=\frac{1}{x^2}\,dy, y=2$ *при* $x=0$

В9. 1.а)$\sqrt{x}\,dx=\sqrt{y}\,dy$

б)(1+y²)$dx-\sqrt{x}\,dy=0$

2.$(1+y)\,dx=(1-x)\,dy,$

$y=3$ *при* $x=-2$

В10 1.а)$(3x^2-2x)\,dx=dy$

б) -(2xy+3y)$dx+x^2\,dy=0$

2.$y\,dx=x\,dy, y=6$ *при* $x=2$

В19. 1.а)$(3x^2-2x)\,dx=dy$

б) -(2xy+3y)$dx+x^2\,dy=0$

2.$y\,dx=x\,dy, y=6$ *при* $x=2$

В20. 1.а)$(4x-3)\,dx=dy$

б) (xy+x)$\frac{dx}{dy}$=1

2.$\frac{2x-1}{y+1}=\frac{dx}{dy},\quad y=0$ *при* $x=5$

В21.1.а)$x\,dx=dy$

б) 2(xy+y)$dx=x\,dy$

2.$(y+1)\,dx-(1-x)\,dy=0,$

$y=1$ *при* $x=0$

В22.1.а)$x^2\,dx=3y^2\,dy$

б)y(1+x)$dx+x(1-y)\,dy=0$

2.$y^2\,dx=e^{-x}\,dy;\; y=1$ *при* $x=0$

В23. 1.а)$\frac{1}{\sqrt{x}}dy=\frac{3}{\sqrt{y}}dx$

б)y²$dx+(x-2)\,dy=0$

2.$\frac{1}{y^2}\,dx=\frac{1}{x^2}\,dy, y=2$ *при* $x=0$

В24.1.а)$\sqrt{x}\,dx=\sqrt{y}\,dy$

б)(1+y²)$dx-\sqrt{x}\,dy=0$

2.$(1+y)\,dx=(1-x)\,dy,$

$y=3$ *при* $x=-2$

В25.1.а)$(3x^2-2x)\,dx=dy$

б) -(2xy+3y)$dx+x^2\,dy=0$

2. $y\,dx=x\,dy, y=6$ *при* $x=2$

В11. 1.а) $(4x-3)\,dx = dy$

б) (xy+x)$\frac{dx}{dy}$=1

2. $\frac{2x-1}{y+1} = \frac{dx}{dy}$, $\quad y = 0$ *при* $x = 5$

В12. 1.а) $x\,dx = dy$

б) 2(xy+y)$dx = x\,dy$

2. $(y+1)\,dx - (1-x)\,dy = 0$,

$y = 1$ *при* $x = 0$

В13. 1.а) $x^2\,dx = 3y^2\,dy$

б) y(1+x)$dx + x(1-y)\,dy = 0$

2. $y^2\,dx = e^{-x}\,dy$;

$y = 1$ *при* $x = 0$

В14. 1.а) $\frac{1}{\sqrt{x}}dy = \frac{3}{\sqrt{y}}dx$

б) y$^2dx + (x-2)\,dy = 0$

2. $\frac{1}{y^2}dx = \frac{1}{x^2}dy$, $y = 2$ *при* $x = 0$

В15. 1.а) $\sqrt{x}\,dx = \sqrt{y}\,dy$

б) (1+y^2)$dx - \sqrt{x}\,dy = 0$

2. $(1+y)\,dx = (1-x)\,dy$,

$y = 3$ *при* $x = -2$

В26. 1.а) $(4x-3)\,dx = dy$

б) (xy+x)$\frac{dx}{dy}$=1

2. $\frac{2x-1}{y+1} = \frac{dx}{dy}$, $\quad y = 0$ *при* $x = 5$

В27. 1.а) $x\,dx = dy$

б) 2(xy+y)$dx = x\,dy$

2. $(y+1)\,dx - (1-x)\,dy = 0$,

$y = 1$ *при* $x = 0$

В28. 1.а) $x^2\,dx = 3y^2\,dy$

б) y(1+x)$dx + x(1-y)\,dy = 0$

2. $y^2\,dx = e^{-x}\,dy$; $y = 1$ *при* $x = 0$

В29. 1.а) $\frac{1}{\sqrt{x}}dy = \frac{3}{\sqrt{y}}dx$

б) y$^2dx + (x-2)\,dy = 0$

2. $\frac{1}{y^2}dx = \frac{1}{x^2}dy$, $y = 2$ *при* $x = 0$

В30. 1.а) $\sqrt{x}\,dx = \sqrt{y}\,dy$

б) (1+y^2)$dx - \sqrt{x}\,dy = 0$

2. $(1+y)\,dx = (1-x)\,dy$,

$y = 3$ *при* $x = -2$

Контрольные вопросы:

1. Какое уравнение называется дифференциальным?
2. Что называется решением дифференциального уравнения?
3. Какое решение дифференциального уравнения называется общим?
4. Какое решение дифференциального уравнения называется частным?
5. Какие дифференциальные уравнения называются уравнениями первого порядка?

6. Какие дифференциальные уравнения называются уравнениями с разделяющимися переменными?

Практическая работа № 21 по теме «Однородные дифференциальные уравнения первого порядка»

Цель: научиться решать однородные дифференциальные уравнения первого порядка.

Время выполнения 90 минут

Материальное обеспечение

1.Теоретические сведения

2.Задание

3.Лист А 4

4.Калькуляторы

Порядок выполнения работы

1.Изучить задание

2. Изучить теоретические сведения

3. Выполнить и оформить работу

4.Показать результаты преподавателю

Домашнее задание

1.Подготовить ответы на контрольные вопросы

Теоретические сведения.

Определение. Функция f(x, y) называется **однородной n – го измерения** относительно своих аргументов x и y, если для любого значения параметра t (кроме нуля) выполняется тождество:

$$f(tx,ty) = t^n f(x,y).$$

Пример. Является ли однородной функция $f(x,y) = x^3 + 3x^2 y$?

$$f(tx,ty) = (tx)^3 + 3(tx)^2 ty = t^3 x^3 + 3t^3 x^2 y = t^3 (x^3 + 3x^2 y) = t^3 f(x,y)$$

Таким образом, функция f(x, y) является однородной 3- го порядка.

Определение. Дифференциальное уравнение вида $y' = f(x,y)$ называется **однородным**, если его правая часть f(x, y) есть однородная функция нулевого измерения относительно своих аргументов.

Любое уравнение вида $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ является однородным, если функции *P(x, y)* и *Q(x, y)* – однородные функции одинакового измерения.

Решение любого однородного уравнения основано на приведении этого уравнения к уравнению с разделяющимися переменными.

Рассмотрим однородное уравнение $y' = f(x,y)$.

Т.к. функция f(x, y) – однородная нулевого измерения, то можно записать:

$$f(tx,ty) = f(x,y).$$

Т.к. параметр t вообще говоря произвольный, предположим, что $t = \frac{1}{x}$. Получаем:

$$f(x,y) = f\left(1,\frac{y}{x}\right)$$

Правая часть полученного равенства зависит фактически только от одного аргумента $u = \frac{y}{x}$, т.е. $f(x,y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) = \varphi(u);$

Исходное дифференциальное уравнение таким образом можно записать в виде:

$$y' = \varphi(u)$$

Далее заменяем *y = ux*,

$$y' = u'x + ux'. \quad u'x + ux' = \varphi(u); \quad u'x + u = \varphi(u); \quad u' = \frac{\varphi(u) - u}{x};$$

таким образом, получили уравнение с разделяющимися переменными относительно неизвестной функции u.

$$\frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x}; \quad \int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \int \frac{dx}{x} + C;$$

Далее, заменив вспомогательную функцию u на ее выражение через x и y и найдя интегралы, получим общее решение однородного дифференциального уравнения.

<u>Пример.</u> Решить уравнение $y' = \frac{y}{x}\left(\ln\frac{y}{x} + 1\right)$.

Введем вспомогательную функцию *u*.

$$u = \frac{y}{x}; \quad y = ux; \quad y' = u'x + u\ .$$

Отметим, что введенная нами функция *u* всегда положительна, т.к. в противном случае теряет смысл исходное дифференциальное уравнение, содержащее $\ln u = \ln\frac{y}{x}$.

Подставляем в исходное уравнение:

$$u'x + u = u(\ln u + 1); \quad u'x + u = u\ln u + u; \quad u'x = u\ln u;$$

Разделяем переменные: $\frac{du}{u\ln u} = \frac{dx}{x}; \quad \int\frac{du}{u\ln u} = \int\frac{dx}{x};$

Интегрируя, получаем: $\ln|\ln u| = \ln|x| + C; \quad \ln u = Cx; \quad u = e^{Cx};$

Переходя от вспомогательной функции обратно к функции у, получаем общее решение: $y = xe^{Cx}$.

Уравнения, приводящиеся к однородным.

Кроме уравнений, описанных выше, существует класс уравнений, которые с помощью определенных подстановок могут приведены к однородным.

Это уравнения вида $y' = f\left(\frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right)$.

Если определитель $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0$, то переменные могут быть разделены подстановкой

$$x = u + \alpha; \qquad y = v + \beta;$$

где α и β - решения системы уравнений $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a_1x + b_1y + c_1 = 0 \end{cases}$

<u>Пример.</u> Решить уравнение $(x - 2y + 3)dy + (2x + y - 1)dx = 0.$

Получаем $(x - 2y + 3)\frac{dy}{dx} = -2x - y + 1; \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{-2x - y + 1}{x - 2y + 3};$

Находим значение определителя $\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4+1=5 \neq 0$.

Решаем систему уравнений $\begin{cases} -2x-y+1=0 \\ x-2y+3=0 \end{cases}$; $\begin{cases} y=1-2x \\ x-2+4x+3=0 \end{cases}$; $\begin{cases} x=-1/5 \\ y=7/5 \end{cases}$;

Применяем подстановку $x=u-1/5;\quad y=v+7/5;$ в исходное уравнение:

$$(u-1/5-2v-14/5+3)dv+(2u-2/5+v+7/5-1)du=0;$$

$$(u-2v)dv+(2u+v)du=0; \qquad \frac{dv}{du}=\frac{2u+v}{2v-u}=\frac{2+v/u}{2v/u-1};$$

Заменяем переменную $\frac{v}{u}=t;\quad v=ut;\quad v'=t'u+t;$ при подстановке в выражение, записанное выше, имеем: $t'u+t=\frac{2+t}{2t-1}$

Разделяем переменные: $\frac{dt}{du}u=\frac{2+t}{2t-1}-t=\frac{2+t-2t^2+t}{2t-1}=\frac{2(1+t-t^2)}{2t-1};$

$$\frac{du}{u}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1-2t}{1+t-t^2}dt; \qquad \int\frac{du}{u}=-\frac{1}{2}\int\frac{(1-2t)dt}{1+t-t^2};$$

$$-\frac{1}{2}\ln\left|1+t-t^2\right|=\ln|u|+\ln C_1 \qquad \ln\left|1+t-t^2\right|=-2\ln|C_1u|$$

$$\ln\left|1+t-t^2\right|=\ln\left|\frac{C_2}{u^2}\right|; \quad 1+t-t^2=\frac{C_2}{u^2};$$

Переходим теперь к первоначальной функции y и переменной x.

$$t=\frac{v}{u}=\frac{y-7/5}{x+1/5}=\frac{5y-7}{5x+1}; \quad u=x+1/5;$$

$$1+\frac{5y-7}{5x+1}-\left(\frac{5y-7}{5x+1}\right)^2=\frac{25C_2}{(5x+1)^2};$$

$$(5x+1)^2+(5y-7)(5x+1)-(5y-7)^2=25C_2$$

$$25x^2+10x+1+25xy+5y-35x-7-25y^2+70y-49=25C_2$$

$$25x^2-25x+25xy+75y-25y^2=25C_2+49-1+7$$

$$x^2-x+xy+3y-y^2=C_2+\frac{55}{25}=C;$$

Итого, выражение $x^2 - x + xy + 3y - y^2 = C$ является общим интегралом исходного дифференциального уравнения.

В случае если в исходном уравнении вида $y' = f\left(\dfrac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$ определитель $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0,$ то переменные могут быть разделены подстановкой

$$ax + by = t.$$

Пример. Решить уравнение $2(x+y)dy + (3x+3y-1)dx = 0.$

Получаем $2(x+y)\dfrac{dy}{dx} = -3x - 3y + 1;$ $\quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-3x-3y+1}{2x+2y} = -\dfrac{3x+3y-1}{2x+2y};$

Находим значение определителя $\begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -6 + 6 = 0;$

Применяем подстановку $3x + 3y = t.$ $\quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{t'}{3} - 1;$

Подставляем это выражение в исходное уравнение:

$$\frac{t'}{3} - 1 = -\frac{3(t-1)}{2t}; \quad 2t(t'-3) = -9t + 9; \quad 2tt' = 6t - 9t + 9; \quad 2tt' = -3t + 9;$$

Разделяем переменные: $\dfrac{2t}{-3t+9}dt = dx;$ $\quad \dfrac{t}{t-3}dt = -\dfrac{3}{2}dx;$

$$\int\left(1 + \frac{3}{t-3}\right)dt = -\frac{3}{2}\int dx; \qquad t + 3\ln|t-3| = -\frac{3}{2}x + C_1$$

Далее возвращаемся к первоначальной функции у и переменной х.

$$2x + 2y + 2\ln|3(x+y-1)| = -x + C_2;$$

$$3x + 2y + 2\ln 3 + 2\ln|x+y-1| = C_2;$$

$$3x + 2y + 2\ln|x+y-1| = C;$$

таким образом, мы получили общий интеграл исходного дифференциального уравнения.

Задания практической работы

Задание. Решить однородное дифференциальное уравнение.

В1. $xy+y^2-(2x^2+xy)y^{/}=0$

В2. $(x-y)dx+xdy=0$

В3 $(x^2-xy)dy-y^2\,dx=0$

В4. $xy^2y^{/}=x^3+y^3$

В5. $(.x-y)y\,dx=x^2\,dy$

В6. $xy^2y^{/}=x^3+y^3$

В7. $xy+y^2-(2x^2+xy)y^{/}=0$

В8. $(x-y)dx+xdy=0$

В9. $(x^2-.xy)dy-y^2\,dx=0$

В10. $xy^2y^{/}=x^3+y^3$

В11. $(x-y)y\,dx=x^2\,dy$

В16. $xy+y^2-(2x^2+xy)y^{/}=0$

В17. $(x-y)dx+xdy=0$

В18. $(x^2-xy)dy-y^2\,dx=0$

В19. $xy^2y^{/}=x^3+y^3$

В20. $(x-y)y\,dx=x^2\,dy$

В21. $xy^2y^{/}=x^3+y^3$

В22. $xy+y^2-(2x^2+xy)y^{/}=0$

В23. $(x-y)dx+xdy=0$

В24. $(x^2-.xy)dy-y^2\,dx=0$

В25. $xy^2y^{/}=x^3+y^3$

В26. $(x-y)y\,dx=x^2\,dy$

В12. $xy^2y' = x^3 + y^3$

В27. $xy^2y' = x^3 + y^3$

В13. $4.xy' - xy = (1+x^2)e^x$

В28. $4.xy' - xy = (1+x^2)e^x$

В14. $(x-y)dx+xdy=0$

В29. $(x-y)dx+xdy=0$

В15. $(x^2-.xy)dy-y^2\,dx=0$

В30. $(x^2-.xy)dy-y^2\,dx=0$

Контрольные вопросы:

1. Какое уравнение называется однородным уравнением первого порядка и его решение?

Практическая работа № 22 по теме
« Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Уравнение Бернули»

Цель: научиться решать линейные дифференциальные уравнения первого порядка.

Время выполнения 90 минут

Материальное обеспечение

1.Теоретические сведения

2.Задание

3.Лист А 4

4.Калькуляторы

Порядок выполнения работы

1.Изучить задание

2. Изучить теоретические сведения

3. Выполнить и оформить работу

4.Показать результаты преподавателю

Домашнее задание

1.Подготовить ответы на контрольные вопросы

Теоретические сведения

Определение. Дифференциальное уравнение называется **линейным**

относительно неизвестной функции и ее производной, если оно может быть записано в виде:

$$y' + P(x)y = Q(x),$$

при этом, если правая часть *Q(x)* равна нулю, то такое уравнение называется **линейным однородным** дифференциальным уравнением, если правая часть *Q(x)* не равна нулю, то такое уравнение называется **линейным неоднородным** дифференциальным уравнением.

P(x) и *Q(x)*- функции непрерывные на некотором промежутке a < x < b.

Линейные однородные дифференциальные уравнения.

Рассмотрим методы нахождения общего решения линейного однородного дифференциального уравнения первого порядка вида

$$y' + P(x)y = 0.$$

Для этого типа дифференциальных уравнений разделение переменных не представляет сложностей.

$$\frac{dy}{y} = -P(x)dx$$

$$\ln|y| = -\int P(x)dx + \ln|C|;$$

$$\ln\left|\frac{y}{C}\right| = -\int P(x)dx;$$

Общее решение: $y = Ce^{-\int P(x)dx}$

Линейные неоднородные дифференциальные уравнения.

Для интегрирования линейных неоднородных уравнений (*Q(x)≠0)* применяются в основном два метода: метод Бернулли и метод Лагранжа.

Метод Бернулли.

(Якоб Бернулли (1654-1705) – швейцарский математик.)

Суть метода заключается в том, что искомая функция представляется в виде произведения двух функций $y = uv$.

При этом очевидно, что $y' = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx}$ - дифференцирование по частям.

Подставляя в исходное уравнение, получаем:

$$u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} + P(x)uv = Q(x)$$

$$u\frac{dv}{dx}+v\left(\frac{du}{dx}+P(x)u\right)=Q(x)$$

Далее следует важное замечание – т.к. первоначальная функция была представлена нами в виде произведения, то каждый из сомножителей, входящих в это произведение, может быть произвольным, выбранным по нашему усмотрению.

Например, функция $y=2x^2$ может быть представлена как $y=1\cdot 2x^2$; $y=2\cdot x^2$;

$y=2x\cdot x$; и т.п.

Таким образом, можно одну из составляющих произведение функций выбрать так, что выражение $\frac{du}{dx}+P(x)u=0$.

Таким образом, возможно получить функцию *u*, проинтегрировав, полученное соотношение как однородное дифференциальное уравнение по описанной выше схеме:

$$\frac{du}{u}=-P(x)dx; \qquad \int\frac{du}{u}=-\int P(x)dx; \qquad \ln|u|=-\int P(x)dx;$$

$$\ln|C_1|+\ln|u|=-\int P(x)dx; \qquad u=Ce^{-\int P(x)dx}; \quad C=1/C_1;$$

Для нахождения второй неизвестной функции *v* подставим поученное выражение для функции *u* в исходное уравнение $u\frac{dv}{dx}+v\left(\frac{du}{dx}+P(x)u\right)=Q(x)$ с учетом того, что выражение, стоящее в скобках, равно нулю.

$$Ce^{-\int P(x)dx}\frac{dv}{dx}=Q(x); \qquad Cdv=Q(x)e^{\int P(x)dx}dx;$$

Интегрируя, можем найти функцию *v*:

$$Cv=\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C_1; \qquad v=\frac{1}{C}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C_2;$$

Т.е. была получена вторая составляющая произведения $y=uv$, которое и определяет искомую функцию.

Подставляя полученные значения, получаем:

$$y=uv=Ce^{-\int P(x)dx}\cdot\frac{1}{C}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C_2\right)$$

Окончательно получаем формулу:

$$\boxed{y = e^{-\int P(x)dx} \cdot \left(\int Q(x) e^{\int P(x)dx} dx + C_2 \right),}$$ C_2 - произвольный коэффициент.

Это соотношение может считаться решением неоднородного линейного дифференциального уравнения в общем виде по способу Бернулли.

Метод Лагранжа.

(Ларганж Жозеф Луи (1736-1813) - французский математик, през. Берлинской АН, поч. чл. Пет. АН (1776)).

Метод Лагранжа решения неоднородных линейных дифференциальных уравнений еще называют методом **вариации произвольной постоянной**.

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

Первый шаг данного метода состоит в отбрасывании правой части уравнения и замене ее нулем

$$y' + P(x)y = 0$$

Далее находится решение получившегося однородного дифференциального уравнения:

$$y = C_1 e^{-\int P(x)dx}.$$

Для того, чтобы найти соответствующее решение неоднородного дифференциального уравнения, будем считать постоянную C_1 некоторой функцией от x.

Тогда по правилам дифференцирования произведения функций получаем:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dC_1(x)}{dx} e^{-\int P(x)dx} + C_1(x) e^{-\int P(x)dx} \cdot (-P(x));$$

Подставляем полученное соотношение в исходное уравнение

$$\frac{dC_1(x)}{dx} e^{-\int P(x)dx} - C_1(x) P(x) e^{-\int P(x)dx} + P(x) C_1(x) e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$$

$$\frac{dC_1(x)}{dx} e^{-\int P(x)dx} = Q(x);$$

Из этого уравнения определим переменную функцию $C_1(x)$:

$$dC_1(x) = Q(x)e^{\int P(x)dx}dx;$$

Интегрируя, получаем:

$$C_1 = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C;$$

Подставляя это значение в исходное уравнение, получаем:

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right).$$

Таким образом, мы получили результат, полностью совпадающий с результатом расчета по методу Бернулли.

При выборе метода решения линейных дифференциальных уравнений следует руководствоваться простотой интегрирования функций, входящих в исходный интеграл.

Далее рассмотрим примеры решения различных дифференциальных уравнений различными методами и сравним результаты.

<u>Пример.</u> Решить уравнение $x^2y' + y = ax^2e^{\frac{1}{x}}$.

Сначала приведем данное уравнение к стандартному виду: $y' + \frac{1}{x^2}y = ae^{\frac{1}{x}}$.

Применим полученную выше формулу: $P = \frac{1}{x^2}$; $Q = ae^{\frac{1}{x}}$;

$$y = e^{-\int\frac{1}{x^2}dx}\left(\int ae^{\frac{1}{x}}e^{\int\frac{1}{x^2}dx}dx + C\right)$$

$$y = e^{\frac{1}{x}}\left(\int ae^{\frac{1}{x}}e^{-\frac{1}{x}}dx + C\right) = e^{\frac{1}{x}}\left(\int adx + C\right)$$

$$y = e^{\frac{1}{x}}(ax + C).$$

Задание. Решить линейное дифференциальное уравнение.

B1.$xy^/ - xy = (1+x^2)e^x$ **B16.** $xy^/ - xy = (1+x^2)e^x$

B2. $y' + 2xy = x^3$

B3 $(1+x^2)y' - xy = 2x$

B4. $xy' + y = x + 1$

B5. $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x$

B6. $y' + y = x + 1$

B7. $xy' - xy = (1+x^2)e^x$

B8. $y' + 2xy = x^3$

B9. $(1+x^2)y' - xy = 2x$

B10. $xy' + y = x + 1$

B11. $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x$

B12. $xy' + y = x + 1$

B13. $xy' - xy = (1+x^2)e^x$

B14. $y' + 2xy = x^3$

B15. $(1+x^2)y' - xy = 2x$

B17. $y' + 2xy = x^3$

B18. $(1+x^2)y' - xy = 2x$

B19. $xy' + y = x + 1$

B20. $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x$

B21. $xy' + y = x + 1$

B22. $xy' - xy = (1+x^2)e^x$

B23. $y' + 2xy = x^3$

B24. $(1+x^2)y' - xy = 2x$

B25. $xy' + y = x + 1$

B26. $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x$

B27. $xy' + y = x + 1$

B28. $xy' - xy = (1+x^2)e^x$

B29. $y' + 2xy = x^3$

B30. $(1+x^2)y' - xy = 2x$

Задача 2. Найти решение задачи Коши.

4.1. $y' - y/x = x^2, \quad y(1) = 0.$ 4.2. $y' - y\,\mathrm{ctg}\,x = 2x\sin x, \quad y(\pi/2) = 0.$

4.3. $y' + y\cos x = \dfrac{1}{2}\sin 2x, \quad y(0) = 0.$ 4.4. $y' + y\,\mathrm{tg}\,x = \cos^2 x, \quad y(\pi/4) = 1/2.$

4.5. $y' - \frac{y}{x+2} = x^2 + 2x, \quad y(-1) = 3/2.$ 4.6. $y' - \frac{1}{x+1} y = \mathrm{e}^x (x+1), \quad y(0) = 1.$

4.7. $y' - \frac{y}{x} = x \sin x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$

4.8. $y' + \frac{y}{x} = \sin x, \quad y(\pi) = \frac{1}{\pi}.$

4.9. $y' + \frac{y}{2x} = x^2, \quad y(1) = 1.$

4.10. $y' + \frac{2x}{1+x^2} y = \frac{2x^2}{1+x^2}, \quad y(0) = \frac{2}{3}.$

4.11. $y' - \frac{2x-5}{x^2} y = 5, \quad y(2) = 4.$

4.12. $y' + \frac{y}{x} = \frac{x+1}{x} \mathrm{e}^x, \quad y(1) = \mathrm{e}.$

4.13. $y' - \frac{y}{x} = -2 \frac{\ln x}{x}, \quad y(1) = 1.$

4.14. $y' - \frac{y}{x} = -\frac{12}{x^3}, \quad y(1) = 4.$

4.15. $y' + \frac{2}{x} y = x^3, \quad y(1) = -5/6.$

4.16. $y' + \frac{y}{x} = 3x, \quad y(1) = 1.$

4.17. $y' - \frac{2xy}{1+x^2} = 1 + x^2, \quad y(1) = 3.$

4.18. $y' + \frac{1-2x}{x^2} y = 1, \quad y(1) = 1.$

4.19. $y' + \frac{3y}{x} = \frac{2}{x^3}, \quad y(1) = 1.$

4.20. $y' + 2xy = -2x^3, \quad y(1) = \mathrm{e}^{-1}.$

4.21. $y' + \frac{xy}{2(1-x^2)} = \frac{x}{2}, \quad y(0) = \frac{2}{3}.$

4.22. $y' + xy = -x^3, \quad y(0) = 3.$

4.23 $y' - \frac{2}{x+1} y = \mathrm{e}^x (x+1)^2, \quad y(0) = 1.$

4.24 $y' + 2xy = x \mathrm{e}^{-x^2} \sin x, \quad y(0) = 1.$

4.25. $y' - 2y/(x+1) = (x+1)^3$, $y(0) = 1/2$.

4.26. $y' - y\cos x = -\sin 2x, \quad y(0) = 3.$

4.27. $y' - 4xy = -4x^3, \quad y(0) = -1/2.$ 4.28. $y' - \dfrac{y}{x} = -\dfrac{\ln x}{x}, \quad y(1) = 1.$

4.29. $y' - 3x^2 y = x^2\left(1 + x^3\right)\Big/3, \quad y(0) = 0.$

4.30. $y' - y\cos x = \sin 2x, \quad y(0) = -1.$

Контрольные вопросы:

1. Какое уравнение называется линейным уравнением первого порядка?
2. Какое уравнение называется дифференциальным уравнением.
3. Что называется решением дифференциального уравнения.
4. Общее решение дифференциального уравнения.
5. Написать общий вид дифференциального уравнения 1-го порядка с разделяющимися переменными.
6. Задача Коши.
7. Каков общий вид однородного дифференциального уравнения 1-го порядка?
8. Алгоритм решения однородного дифференциального уравнения первого порядка.

Практическая работа № 23 по теме «Дифференциальные уравнения второго порядка. Линейные однородные уравнения второго порядка с постоянными коэфициентами»

Цель: научиться решать линейные однородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Время выполнения 90 минут

Материальное обеспечение

1. Теоретические сведения
2. Задание
3. Лист А 4
4. Калькуляторы

Порядок выполнения работы

1. Изучить задание
2. Изучить теоретические сведения
3. Выполнить и оформить работу
4. Показать результаты преподавателю

Домашнее задание

1.Подготовить ответы на контрольные вопросы

Теоретические сведения

Уравнение, содержащее производные (или дифференциалы) не выше второго порядка, называется *дифференциальным уравнением второго порядка*. В общем виде уравнение второго порядка записывается следующим образом:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right).$$

Общее решение дифференциального уравнения второго порядка содержит две произвольные постоянные.

Линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = 0, \qquad (1)$$

где p и q - постоянные величины.

Для отыскания общего решения уравнения (1) составляется *характеристическое уравнение*

$$r^2 + pr + q = 0, \qquad (2)$$

которое получается из уравнения (1) заменой $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{dy}{dx}$ и y на соответствующие степени r, причем сама функция y заменяется единицей.

Тогда общее решение дифференциального уравнения (1) строится в зависимости от корней r_1 и r_2 характеристического уравнения (2). Здесь возможны три случая.

I случай: Корни r_1 и r_2 - действительные и различные. В этом случае общее решение уравнения (1) имеет вид

$$y = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x}. \qquad (3)$$

II случай: Корни r_1 и r_2 - действительные и равные: $r_1 = r_2 = r$. Тогда общее решение уравнения (1) записывается так:

$$y = (C_1 + C_2x)\cdot e^{rx}. \qquad (4)$$

III случай: Корни r_1 и r_2 - комплексно – сопряженные: $r_1 = \alpha + \beta \cdot i$, $r_2 = \alpha - \beta \cdot i$. В этом случае общее решение уравнения (1) записывается следующим образом:

$$y = e^{\alpha x} \cdot (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x). \qquad (5)$$

Примеры

Задание 1: Решить уравнение: $\frac{d^2 y}{dx^2} - 7\frac{dy}{dx} + 10y = 0$.

Решение: Составим характеристическое уравнение и найдем его корни: $r^2 - 7r + 10 = 0$. Отсюда следует, что $r_1 = 2$, $r_2 = 5$. Так как корни характеристического уравнения действительные и разные, то общее решение данного дифференциального уравнения согласно формуле (3) запишется так: $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{5x}$.

Задание 2: Найти частное решение уравнения $\frac{d^2 y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} = 0$, если $y = 1$ и $\frac{dy}{dx} = -1$ при $x = 0$.

Решение: Составим характеристическое уравнение $r^2 - 5r = 0$. Решая его, получим, $r_1 = 0$, $r_2 = 5$. Так как корни характеристического уравнения действительные и различные, то общее решение дифференциального уравнения имеет вид: $y = C_1 e^{0 \cdot x} + C_2 e^{5x}$, то есть $y = C_1 + C_2 e^{5x}$.

Для нахождения искомого частного решения нужно определить значения постоянных C_1 и C_2. Подставив в общее решение значения $x = 0$ и $y = 1$, получим $1 = C_1 + C_2$.

Продифференцировав общее решение и подставив в полученное выражение значения $x = 0$ и $\frac{dy}{dx} = -1$, имеем $\frac{dy}{dx} = 5C_2 e^{5x}$, отсюда следует, что $-1 = 5C_2$. Из данного выражения находим: $C_2 = -\frac{1}{5}$, $C_1 = 1 - C_2 = 1 - \left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{6}{5}$.

Таким образом, искомое частное решение имеет вид $y = \frac{6}{5} - \frac{1}{5}e^{5x}$.

Задание 3: Решить уравнение $\frac{d^2y}{dx^2} - 8\frac{dy}{dx} + 16y = 0$.

Решение: Составим характеристическое уравнение и найдем его корни: $r^2 - 8r + 16 = 0$, $r_1 = r_2 = 4$. Характеристическое уравнение имеет равные действительные корни; поэтому согласно формуле (4) общее решение данного дифференциального уравнения записывается в виде $y = (C_1 + C_2 x) \cdot e^{4x}$.

Задание 4: Найдите частное решение уравнения $y'' + 8y' + 16y = 0$, если $y = 1$ и $y' = 1$ при $x = 0$.

Решение: Так как характеристическое уравнение $r^2 + 8r + 16 = 0$ имеет равные действительные корни $r_1 = r_2 = -4$, то общее решение данного дифференциального уравнения записывается в виде

$$y = (C_1 + C_2 x) \cdot e^{-4x} = C_1 e^{-4x} + C_2 x e^{-4x}.$$

Дифференцируя общее решение, имеем

$$y' = -4C_1 e^{-4x} + C_2 e^{-4x} - 4C_2 x e^{-4x}.$$

Подставив начальные данные в выражение для y и y', получим систему уравнений

$\begin{cases} 1 = C_1 e^0 + C_2 \cdot 0 \cdot e^0 \\ 1 = -4C_1 e^0 + C_2 e^0 - 4C_2 \cdot 0 \cdot e^0 \end{cases}$, или $\begin{cases} 1 = C_1 \\ 1 = -4C_1 + C_2 \end{cases}$, откуда $C_1 = 1$ и $C_2 = 5$. Следовательно, искомое частное решение имеет вид $y = e^{-4x} + 5xe^{-4x}$.

Задания практической работы

Задания Решить однородные линейные дифференциальные уравнения второго порядка. В пункте а) найти частное решение при заданных начальных условиях $y(x_0) = y_0$, $y'(0) = y'_0$.

1,10. а) $y'' + y' - 2y = 0$ $\quad y(0) = 1 \quad y'(0) = 3$ б) $y'' + 12y' + 36y = 0$

в) $4y'' + 9y = 0$

2,12. а) $3y'' - 2y' - 8y = 0$ $\quad y(0) = 1 \quad y'(0) = 1$

б) $y'' - 6y' + 9y = 0$ в) $y'' - 8y' + 17y = 0$

3,13. а) $y'' - 4y' + 3y = 0$ $y(0) = 6$ $y'(0) = 10$

б) $y'' + 8y' + 16y = 0$ в) $4y'' - 20y' + 25y = 0$

4,14. а) $y'' - 7y' + 6y = 0$ $y(0) = 2$ $y'(0) = -1$

б) $y'' + 10y' + 25y = 0$ в) $y'' + 2y' + 5y = 0$

5,15. а) $2y'' + y' - y = 0$ $y(0) = 1$ $y'(0) = -1$

б) $4y'' - 4y' + y = 0$ в) $y'' - 2y' + 10y = 0$

6,16. а) $2y'' + 5y' = 0$ $y(0) = 1$ $y'(0) = 4$

б) $y'' - 14y' + 49y = 0$ в) $y'' + 4y = 0$

7,17. а) $12y'' + 5y' = 0$ $y(0) = 2$ $y'(0) = 2$

б) $9y'' - 6y' + y = 0$ в) $5y'' - 6y' + 5y = 0$

8,18. а) $y'' - 6y' + 8y = 0$ $y(0) = 2$ $y'(0) = -4$

б) $16y'' + 8y' + y = 0$ в) $y'' - 6y' + 13y = 0$

9,19. а) $y'' - 4y' - 5y = 0$ $y(0) = 2$ $y'(0) = -3$

б) $16y'' + 24y' + 9y = 0$ в) $y'' - 4y' + 13y = 0$

10,20. а) $y'' - 3y' + 2y = 0$ $y(0) = 1$ $y'(0) = 6$

б) $9y'' + 6y' + y = 0$ в) $y'' + 9y = 0$

Контрольные вопросы

1.Дайте определение дифференциального уравнения.

2.Что называют порядком дифференциального уравнения?

3.Дайте определение общего решения дифференциального уравнения.

4.Что называют условиями Коши?

5.Что называют задачей Коши?

6.Дайте определение частного решения дифференциального уравнения.

7.Какие уравнения называются дифференциальными уравнениями II порядка?

8.Понятие характеристического уравнения.

9.Общее решение уравнения характеристического уравнения.

Практическая работа № 23 по теме
Линейные неоднородные уравнения второго порядка»

Цель: научиться решать линейные неоднородные уравнения второго порядка

Время выполнения 90 минут

Материальное обеспечение

1.Теоретические сведения

2.Задание

3.Лист А 4

4.Калькуляторы

Порядок выполнения работы

1.Изучить задание

2. Изучить теоретические сведения

3. Выполнить и оформить работу

4.Показать результаты преподавателю

Домашнее задание

1.Подготовить ответы на контрольные вопросы

Теоретические сведения

Уравнения с правой частью специального вида.

Различают следующие случаи:

I. Правая часть линейного неоднородного дифференциального уравнения имеет вид: $f(x) = P(x)e^{\alpha x}$, где $P(x) = A_0x^m + A_1x^{m-1} + ... + A_m$ - многочлен степени *m*.

Тогда частное решение ищется в виде: $y = x^r e^{\alpha x} Q(x)$

Здесь *Q(x)*- многочлен той же степени, что и *P(x)*, но с неопределенными коэффициентами, а *r* – число, показывающее сколько раз число α является корнем характеристического уравнения для соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения.

II. Правая часть линейного неоднородного дифференциального уравнения имеет вид: $f(x) = e^{\alpha x}\left[P_1(x)\cos\beta x + P_2(x)\sin\beta x\right]$

Здесь *$P_1(x)$* и *$P_2(x)$* – многочлены степени m_1 и m_2 соответственно.

Тогда частное решение неоднородного уравнения будет иметь вид:

$y = x^r e^{\alpha x}\left[Q_1(x)\cos\beta x + Q_2(x)\sin\beta x\right]$

где число *r* показывает сколько раз число $\alpha + i\beta$ является корнем характеристического уравнения для соответствующего однородного уравнения, а *$Q_1(x)$* и *$Q_2(x)$* – многочлены степени не выше *m*, где *m*- большая из степеней m_1 и m_2.

Заметим, что если правая часть уравнения является комбинацией выражений рассмотренного выше вида, то решение находится как комбинация решений вспомогательных уравнений, каждое из которых имеет правую часть, соответствующую выражению, входящему в комбинацию.

Т.е. если уравнение имеет вид: $L(y) = f_1(x) + f_2(x)$, то частное решение этого уравнения будет $y = y_1 + y_2$, где y_1 и y_2 – частные решения вспомогательных уравнений

$$L(y) = f_1(x) \text{ и } L(y) = f_2(x)$$

<u>Пример.</u> Решить уравнение $y'' + y = x - \sin 2x.$

Правую часть дифференциального уравнения представим в виде суммы двух функций $f_1(x) + f_2(x) = x +$ (-sin$x$).

Составим и решим характеристическое уравнение: $k^2 + 1 = 0;\quad k_{1,2} = \pm i;$
1.Для функции $f_1(x)$ решение ищем в виде $y_1 = x^r e^{\alpha x} Q(x)$.

Получаем: $\alpha = 0,\quad r = 0, Q(x) = Ax + B;$ Т.е. $y_1 = Ax + B;$
$y_1' = A;\qquad y_1'' = 0;$
$Ax + B = x;\quad A = 1;\quad B = 0;$

Итого: $y_1 = x;$

2.Для функции $f_2(x)$ решение ищем в виде: $y_2 = x^r e^{\alpha x}(Q_1(x)\cos\beta x + Q_2(x)\sin\beta x)$.

Анализируя функцию $f_2(x)$, получаем: $P_1(x) = 0; \quad P_2(x) = -1; \quad \alpha = 0; \quad \beta = 2; \quad r = 0;$

Таким образом, $y_2 = C\cos 2x + D\sin 2x;$

$$y_2' = -2C\sin 2x + 2D\cos 2x;$$
$$y_2'' = -4C2\cos x - 4D\sin 2x;$$
$$-4C\cos 2x - 4D\sin 2x + C\cos 2x + D\sin 2x = -\sin 2x;$$

$$-3C\cos 2x - 3D\sin 2x = -\sin 2x$$

$$A = 0; \quad B = \frac{1}{3};$$

Итого: $y_2 = \frac{1}{3}\sin 2x;$

Т.е. искомое частное решение имеет вид: $y = y_1 + y_2 = \frac{1}{3}\sin 2x + x;$

Общее решение неоднородного дифференциального уравнения:

$$y = \frac{1}{3}\sin 2x + x + C_1\cos x + C_2\sin x;$$

Рассмотрим примеры применения описанных методов.

Пример. Решить уравнение $y'' - 2y' + y = 3e^x$.

Составим характеристическое уравнение для соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения:

$$k^2 - 2k + 1 - 0; \qquad k_1 = k_2 = 1;$$

Общее решение однородного уравнения: $y = C_1e^x + C_2xe^x$.

Теперь найдем частное решение неоднородного уравнения в виде:

$$y = x^r e^{\alpha x} Q(x)$$

$$\alpha = 1; \quad r = 2; \quad Q(x) = C;$$

$$y = Cx^2e^x.$$

Воспользуемся методом неопределенных коэффициентов.

$$y' = 2Cxe^x + Cx^2e^x; \qquad y'' = 2Ce^x + 2Cxe^x + 2Cxe^x + Cx^2e^x.$$

Подставляя в исходное уравнение, получаем:

$$2Ce^x + 4Cxe^x + Cx^2e^x - 4Cxe^x - 2Cx^2e^x + Cx^2e^x = 3e^x.$$

$$2C = 3; \qquad C = \frac{3}{2}.$$

Частное решение имеет вид: $y = \frac{3}{2}x^2e^x$.

Общее решение линейного неоднородного уравнения:

$$y = C_1e^x + C_2xe^x + \frac{3}{2}x^2e^x.$$

Задания

Вариант 1

1. Найти общее решение дифференциального уравнения:
$y'' - 4y' + 3y = e^{5x}$
2. Найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям:
а) $y'' + 4y' - 12y = 8\sin 2x$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$
б) $x'' - 8x' + 16x = e^{4x}$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

Вариант 2

1. Найти общее решение дифференциального уравнения:
$y'' - 6y' + 9y = e^x$
2. Найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям:
а) $y'' - 6y' + 9y = x^2 - x + 3$; $y(0) = \frac{4}{3}$, $y'(0) = \frac{1}{27}$
б) $x'' + 4x' - 5x = 8\cos x$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$

Вариант 3

1. Найти общее решение дифференциального уравнения:
$y'' + 7y' + 12y = \sin x$
2. Найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям:
а) $y'' + 4y = e^{-2x}$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$
б) $2x'' + x' - x = 2e^x$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$

Вариант 4

1. Найти общее решение дифференциального уравнения:
$y'' + y = \cos 2x$

2. Найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям:

а) $y'' - 2y' + 5y = xe^{2x}$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

б) $x'' - 2x' - 3x = 2x$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$

Вариант 5

1. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$y'' - 4y' + 8y = \sin 2x$

2. Найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям:

а) $y'' + 5y' + 6y = 12\cos 2x$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$

б) $x'' - 6x' + 9x = -12x$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$

Вариант 6

1. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$y'' + y' - 2y = e^x$

2. Найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям:

а) $y'' - 5y' + 6y = (12\mathrm{x} - 7)\mathrm{e}^{-\mathrm{x}}$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$

б) $x'' + x' = \sin 3x$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

Вариант 7

1. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$y'' - 4y' - 5y = x^2$

2. Найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям:

а) $y'' - 4y' + 13y = 26\mathrm{x} + 5$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

б) $x'' + 4x' = x$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$

Вариант 8

1. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$y'' - y' = 2(1 - x)$

2. Найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям:

а) $y'' - 4y' = 6\mathrm{x}^2 + 1$; $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$

б) $x'' - 2x' + x = \cos x$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

Контрольные вопросы

1. Охарактеризовать решения линейных неоднородных уравнений в зависимости от их правой части.

Практическая работа № 25 по теме
«Исследование числовых рядов на сходимость»

Цель: научиться исследовать числовые ряды на сходимость

Время выполнения 90 минут

Материальное обеспечение
1.Теоретические сведения
2.Задание
3.Лист А 4
4.Калькуляторы
Порядок выполнения работы
1.Изучить задание
2. Изучить теоретические сведения
3. Выполнить и оформить работу
4.Показать результаты преподавателю
Домашнее задание
1.Подготовить ответы на контрольные вопросы
Теоретические сведени

Определение. Сумма членов бесконечной числовой последовательности $u_1, u_2, ..., u_n, ...$ называется **числовым рядом**.

$$u_1 + u_2 + ... + u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

При этом числа $u_1, u_2, ...$ будем называть членами ряда, а u_n – общим членом ряда.

Определение. Суммы $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$, $n = 1, 2, ...$ называются **частными (частичными) суммами** ряда.

Таким образом, возможно рассматривать последовательности частичных сумм ряда $S_1, S_2, ..., S_n, ...$

Определение. Ряд $u_1 + u_2 + ... + u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется **сходящимся**, если сходится последовательность его частных сумм. **Сумма сходящегося ряда** – предел последовательности его частных сумм.

$$\lim S_n = S, \qquad S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Определение. Если последовательность частных сумм ряда расходится, т.е. не имеет предела, или имеет бесконечный предел, то ряд называется **расходящимся** и ему не ставят в соответствие никакой суммы.

Свойства рядов.

1) Сходимость или расходимость ряда не нарушится если изменить, отбросить или добавить конечное число членов ряда.

2) Рассмотрим два ряда $\sum u_n$ и $\sum Cu_n$, где С – постоянное число.

Теорема. *Если ряд $\sum u_n$ сходится и его сумма равна S, то ряд $\sum Cu_n$ тоже сходится, и его сумма равна CS. ($C \neq 0$)*

3) Рассмотрим два ряда $\sum u_n$ и $\sum v_n$. **Суммой** или **разностью** этих рядов будет называться ряд $\sum (u_n \pm v_n)$, где элементы получены в результате сложения (вычитания) исходных элементов с одинаковыми номерами.

Теорема. *Если ряды $\sum u_n$ и $\sum v_n$ сходятся и их суммы равны соответственно S и σ, то ряд $\sum (u_n \pm v_n)$ тоже сходится и его сумма равна S + σ.*

$$\sum (u_n + v_n) = \sum u_n + \sum v_n = S + \sigma$$

Разность двух сходящихся рядов также будет сходящимся рядом.
Сумма сходящегося и расходящегося рядов будет расходящимся рядом.
О сумме двух расходящихся рядов общего утверждения сделать нельзя.

При изучении рядов решают в основном две задачи: исследование на сходимость и нахождение суммы ряда.

1) Если ряд $\sum u_n$ сходится, то необходимо, чтобы общий член u_n стремился к нулю. Однако, это условие не является достаточным. Можно говорить только о том, что если общий член не стремится к нулю, то ряд точно расходится. Например, так называемый гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ является расходящимся, хотя его общий член и стремится к нулю.

Пример. Исследовать сходимость ряда $\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\frac{3}{8}+\ldots+\frac{n}{3n-1}+\ldots$

Найдем $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{3n-1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3-\frac{1}{n}}=\frac{1}{3}\neq 0$ - необходимый признак сходимости не выполняется, значит ряд расходится.

2) Если ряд сходится, то последовательность его частных сумм ограничена.

Однако, этот признак также не является достаточным.

Например, ряд 1-1+1-1+1-1+ … $+(-1)^{n+1}+\ldots$ расходится, т.к. расходится последовательность его частных сумм в силу того, что

$$S_n=\begin{cases}0, & при \quad четных \quad n\\ 1, & при \quad нечетных \quad n\end{cases}$$

Однако, при этом последовательность частных сумм ограничена, т.к. $|S_n|<2$ при любом n.

Ряды с неотрицательными членами.

При изучении знакопостоянных рядов ограничимся рассмотрением рядов с неотрицательными членами, т.к. при простом умножении на -1 из этих рядов можно получить ряды с отрицательными членами.

Теорема. *Для сходимости ряда $\sum u_n$ с неотрицательными членами необходимо и достаточно, чтобы частные суммы ряда были ограничены.*

Признак сравнения рядов с неотрицательными членами.

Пусть даны два ряда $\sum u_n$ и $\sum v_n$ при $u_n, v_n \geq 0$.

Теорема. Если $u_n \leq v_n$ при любом n, то из сходимости ряда $\sum v_n$ следует сходимость ряда $\sum u_n$, а из расходимости ряда $\sum u_n$ следует расходимость ряда $\sum v_n$.

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}+...+\frac{1}{\ln n}+...$

Т.к. $\frac{1}{\ln n}>\frac{1}{n}$, а гармонический ряд $\sum\frac{1}{n}$ расходится, то расходится и ряд $\sum\frac{1}{\ln n}$

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}$.

Т.к. $\frac{1}{n2^n}<\frac{1}{2^n}$, а ряд $\sum\frac{1}{2^n}$ сходится (как убывающая геометрическая прогрессия), то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}$ тоже сходится.

Также используется следующий признак сходимости

Теорема. *Если $u_n>0,\quad v_n>0$ и существует предел $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=h$, где h – число, отличное от нуля, то ряды $\sum u_n$ и $\sum v_n$ ведут одинаково в смысле сходимости.*

Признак Даламбера.

(Жан Лерон Даламбер (1717 – 1783) – французский математик)

Если для ряда $\sum u_n$ с положительными членами существует такое число $q<1$, что для всех достаточно больших n выполняется неравенство

$\frac{u_{n+1}}{u_n}\le q$, *то ряд $\sum u_n$ сходится, если же для всех достаточно больших n*

выполняется условие $\frac{u_{n+1}}{u_n}\ge 1$, *то ряд $\sum u_n$ расходится.*

Предельный признак Даламбера.

Предельный признак Даламбера является следствием из приведенного выше признака Даламбера.

Если существует предел $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$, то при $\rho<1$ ряд сходится, а при $\rho>1$ – расходится. Если $\rho=1$, то на вопрос о сходимости ответить нельзя.

Пример. Определить сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$.

$$u_n=\frac{n}{2^n};\quad u_{n+1}=\frac{n+1}{2^{n+1}};\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)2^n}{2^{n+1}n}=\frac{n+1}{2n}=\frac{1+\frac{1}{n}}{2}=\frac{1}{2}<1$$

Вывод: ряд сходится.

<u>Пример.</u> Определить сходимость ряда $1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{n!}+...$

$$u_n=\frac{1}{n!};\quad u_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!};\quad \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0<1$$

Вывод: ряд сходится.

Признак Коши. (радикальный признак)

Если для ряда $\sum u_n$ с неотрицательными членами существует такое число q<1, что для всех достаточно больших n выполняется неравенство $\sqrt[n]{u_n}\le q$, то ряд $\sum u_n$ сходится, если же для всех достаточно больших n выполняется неравенство $\sqrt[n]{u_n}\ge 1$, то ряд $\sum u_n$ расходится.

<u>Следствие.</u> Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho$, то при ρ<1 ряд сходится, а при ρ>1 ряд расходится.

<u>Пример.</u> Определить сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+1}{3n^2+5}\right)^n$.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+1}{3n^2+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n^2}}{3+\frac{5}{n^2}}=\frac{2}{3}<1$$

Вывод: ряд сходится.

<u>Пример.</u> Определить сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1.$$

Т.е. признак Коши не дает ответа на вопрос о сходимости ряда. Проверим выполнение необходимых условий сходимости. Как было сказано выше, если ряд сходится, то общий член ряда стремится к нулю.

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \neq 0,$$

таким образом, необходимое условие сходимости не выполняется, значит, ряд расходится.

Интегральный признак Коши.

Если φ(x) – непрерывная положительная функция, убывающая на промежутке [1;∞), *то ряд φ(1) + φ(2) + ...+ φ(n) + ... =* $\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(n)$ *и несобственный интеграл* $\int_1^{\infty}\varphi(x)dx$ *одинаковы в смысле сходимости.*

Пример. Ряд $1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+...+\frac{1}{n^\alpha}+...$ сходится при α>1 и расходится α≤1 т.к. соответствующий несобственный интеграл $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$ сходится при α>1 и расходится α≤1. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ называется **общегармоническим** рядом.

Следствие. Если *f(x)* и *φ(x)* – непрерывные функции на интервале (a, b] и $\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = h, \quad h\neq 0,$ то интегралы $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b \varphi(x)dx$ ведут себя одинаково в смысле сходимости.

Знакопеременные ряды. (Знакочередующиеся ряды).

Знакочередующийся ряд можно записать в виде:

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + ... + (-1)^{n+1}u_n + ...$$

где $u_n > 0, \quad n = 1,2,3,...$

Признак Лейбница.

Если у знакочередующегося ряда $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + ... + (-1)^{n+1}u_n + ...$ *абсолютные величины* u_i *убывают* $u_1 > u_2 > u_3 > ...$ *и общий член стремится к нулю* $u_n \to 0$, *то ряд сходится.*

Абсолютная и условная сходимость рядов.

Рассмотрим некоторый знакопеременный ряд (с членами произвольных знаков) $u_1 + u_2 + ... + u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ (1)

и ряд, составленный из абсолютных величин членов ряда (1):

$$|u_1|+|u_2|+\ldots+|u_n|+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}|u_n| \qquad (2)$$

Теорема. *Из сходимости ряда (2) следует сходимость ряда (1).*

Определение. Ряд $\sum u_n$ называется **абсолютно сходящимся**, если сходится ряд $\sum |u_n|$.

Очевидно, что для знакопостоянных рядов понятия сходимости и абсолютной сходимости совпадают.

Определение. Ряд $\sum u_n$ называется **условно сходящимся**, если он сходится, а ряд $\sum |u_n|$ расходится.

Признаки Даламбера и Коши для знакопеременных рядов.

Пусть $\sum u_n$ - знакопеременный ряд.

Признак Даламбера. Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\rho$, то при $\rho<1$ ряд $\sum u_n$ будет абсолютно сходящимся, а при $\rho>1$ ряд будет расходящимся. При $\rho=1$ признак не дает ответа о сходимости ряда.

Признак Коши. Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=\rho$, то при $\rho<1$ ряд $\sum u_n$ будет абсолютно сходящимся, а при $\rho>1$ ряд будет расходящимся. При $\rho=1$ признак не дает ответа о сходимости ряда.

Свойства абсолютно сходящихся рядов.

1) **Теорема.** *Для абсолютной сходимости ряда* $\sum u_n$ *необходимо и достаточно, чтобы его можно было представить в виде разности двух сходящихся рядов с неотрицательными членами.*

Следствие. Условно сходящийся ряд является разностью двух расходящихся рядов с неотрицательными стремящимися к нулю членами.

2) В сходящемся ряде любая группировка членов ряда, не изменяющая их порядка, сохраняет сходимость и величину ряда.

3) Если ряд сходится абсолютно, то ряд, полученный из него любой перестановкой членов, также абсолютно сходится и имеет ту же сумму.

Перестановкой членов условно сходящегося ряда можно получить условно сходящийся ряд, имеющий любую наперед заданную сумму, и даже расходящийся ряд.

4) **<u>Теорема.</u>** *При любой группировке членов абсолютно сходящегося ряда (при этом число групп может быть как конечным, так и бесконечным и число членов в группе может быть как конечным, так и бесконечным) получается сходящийся ряд, сумма которого равна сумме исходного ряда*.

5) Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходятся абсолютно и их суммы равны соответственно S и σ, то ряд, составленный из всех произведений вида $u_i v_k, \quad i,k = 1,2,...$ взятых в каком угодно порядке, также сходится абсолютно и его сумма равна $S \cdot \sigma$ - произведению сумм перемножаемых рядов.

Если же производить перемножение условно сходящихся рядов, то в результате можно получить расходящийся ряд.

Задания практической работы

1.Выписать три первых члена ряда найти третью частичную сумму

1,11,21 а) $\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{2^n}{n \cdot n!}$; б) $\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\ln n}{n}$.

2,12,22 а) $\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{5^{n-1}}{n^2 \cdot (n-1)!}$; б) $\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{4n^3}{(n^4+4)^2}$

3,13,23 а) $\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{3^{n+2}}{(n-5)!}$; б) $\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{|\sin n|}{\sqrt{n^3}}$.

4,14,24 а) $\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{2^{2n}}{n \cdot (n+1)!}$; б) $\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\cos^2 n}{\sqrt[3]{n^5}}$.

5,15,25 а) $\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{3^{n+1}}{n!(n+1)}$; б) $\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{n}{n^2+1}$.

6,16,26 а) $\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{n^2+1}{\sqrt{n \cdot 3^n}}$; б) $\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n}$.

7,17,27 а) $\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{2^{n+2} n^2}{3^{2n-1}}$; б) $\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{e^n}{1+e^{n2}}$.

8,18.28 а) $\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{2^{3n} \cdot n!}{(2n)!}$; б) $\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin^4 n}{2n\sqrt{n}}$.

9, 19,29 а) $\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}$; б) $\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}\cdot\cos n}$.

10,20,30 а) $\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{n!(n+1)!}{(2n)!}$; б) $\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1+\cos^2 n}{n}$.

2.Исследовать на сходимость, применяя необходимый признак сходимости

1,11,21. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{4n+5}$

2,12,22. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{10n-1}$

3,13,23. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n\ \ +1}{5n+2}$

4,14,24. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3-4n^2+1}{n^2-5n}$

5,15,525. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n^2+1}{n^3+2n}$

6,16,26. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2n-1)\cdot 2^n}$

7,17,27. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$

8,18,28. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$

9,19,29. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{7n+1}$

10,20,30. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2}{3n-1}$

3.Исследовать на сходимость, используя признак Даламбера

1,11,21. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}$

2,12,22. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{(\sqrt{3})^n}$

3,13,23. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot n^2}{5^n}$

4,14,24. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{n^n}$

5,15,25. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3\cdot 2^n}$

6,16,26. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{3^n}$

7,17,27. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$

8,18,28. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n(n+1)}$

9,19,29. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}$

10,20,30. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n^5}$

Контрольные вопросы

1. Определение числового ряда.
2. Свойства и виды рядов.
3. Определение суммы ряда.

4. Необходимый признак сходимости.
5. Признаки сравнения, признаки Даламбера и Коши.

Практическая работа № 26 по теме
«Область сходимости степенного ряда»

Цель: научиться исследовать степенные ряды на сходимось

Время выполнения 90 минут

Материальное обеспечение
1.Теоретические сведения
2.Задание
3.Лист А 4
4.Калькуляторы

Порядок выполнения работы
1.Изучить задание
2. Изучить теоретические сведения
3. Выполнить и оформить работу
4.Показать результаты преподавателю

Домашнее задание
1.Подготовить ответы на контрольные вопросы

Теоретические сведения

Функциональные ряды: основные понятия, область сходимости

Определение 1. Ряд, члены которого являются функциями одной или нескольких независимых переменных, определёнными на некотором множестве, называется *функциональным рядом*.

Рассмотрим функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \ldots$, члены которого являются функциями одной независимой переменной x. Сумма первых n членов ряда $S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x)$ является частичной суммой данного функционального ряда. Общий член $u_n(x)$ есть функция от x, определённая в некоторой области. Рассмотрим функциональный ряд в точке $x = x_0$. Если соответствующий числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ сходится, т.е. существует предел частичных сумм этого ряда $\lim_{n\to\infty} S_n(x_0) = S(x_0)$ (где $S(x_0) < \infty$ − сумма числового ряда), то точка x_0 называется *точкой сходимости* функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. Если числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ расходится, то точка x_0 называется *точкой расходимости* функционального ряда.

Определение 2. *Областью сходимости* функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется множество всех таких значений *x*, при которых функциональный ряд сходится. Область сходимости, состоящая из всех точек сходимости, обозначается $D(x)$. Отметим, что $D(x) \subset \mathrm{R}$.

Функциональный ряд сходится в области $D(x)$, если для любого $x \in D(x)$ он сходится как числовой ряд, при этом его сумма будет некоторой функцией $S(x)$. Это так называемая *предельная функция* последовательности $\{S_n(x)\}$: $\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$.

Как находить область сходимости функционального ряда $D(x)$?

Можно использовать признак, аналогичный признаку Даламбера. Для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ составляем $u_{n+1}(x)$ и рассматриваем предел при фиксированном *x*: $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = |l(x)|$. Тогда $D(x)$ является решением неравенства $|l(x)| < 1$ и решением уравнения $|l(x)| = 1$ (берём только те решения уравнения, в которых соответствующие числовые ряды сходятся).

Пример 1. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

Решение. Обозначим $u_n(x) = \frac{x^n}{n}$, $u_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$. Составим и вычислим предел $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1} \cdot n}{x^n \cdot (n+1)} \right| = |x|$, тогда область сходимости ряда определяется неравенством $|x| < 1,\ x \in (-1;1)$ и уравнением $|x| = 1$. Исследуем дополнительно сходимость исходного ряда в точках, являющимися корнями уравнения:

а) если $x = 1$, $u_n(1) = \frac{1}{n}$, то получается расходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$;

б) если $x = -1$, $u_n(-1) = \frac{(-1)^n}{n}$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ сходится условно (по признаку Лейбница, пример 1, лекция 3, разд. 3.1).

Таким образом, область сходимости $D(x)$ ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ имеет вид: $-1 \le x < 1$.

Степенные ряды: основные понятия, теорема Абеля

Рассмотрим частный случай функционального ряда, так называемый *степенной ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, где $u_n(x) = a_n (x - x_0)^n$.

Определение 3. *Степенным рядом* называется функциональный ряд вида

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + ... + a_n(x - x_0)^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n,$$

где $a_0, a_1, a_2, ...$ − постоянные числа, называемые *коэффициентами ряда*.

Степенной ряд есть «бесконечный многочлен», расположенный по возрастающим степеням $(x - x_0)$. Любой числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ является частным случаем степенного ряда при $x - x_0 = 1$.

Рассмотрим частный случай степенного ряда при $x_0 = 0$: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + ...$ Выясним, какой вид имеет область сходимости данного ряда $D(x)$.

Теорема 1 (теорема Абеля). 1) Если степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится в точке $x = \alpha$ $(\alpha \neq 0)$, то он абсолютно сходится при всяком *x*, для которого справедливо неравенство $|x| < |\alpha|$.

2) Если же степенной ряд расходится при $x = \beta$, то он расходится при всяком *x*, для которого $|x| > |\beta|$.

Следствие. Теорема Абеля позволяет судить о расположении точки сходимости степенного ряда. Если точка $x = \alpha \neq 0$ является точкой сходимости степенного ряда, то интервал $(-|\alpha|; |\alpha|)$ заполнен точками сходимости; если точкой расходимости является точка $x = \beta$, то бесконечные интервалы $(-\infty; -|\beta|)$, $(|\beta|, \infty)$ заполнены точками расходимости (рис. 1).

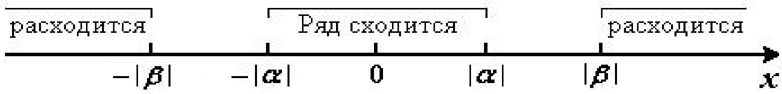


Рис. 1. Интервалы сходимости и расходимости ряда

Можно показать, что существует такое число $R > 0$, что при всех $|x| < R$ $(-R < x < R)$ степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ абсолютно сходится, а при $|x| > R$ − расходится. Будем считать, что если ряд сходится только в одной точке 0, то $R = 0$, а если ряд сходится при всех $x \in (-\infty, +\infty)$, то $R = \infty$.

Определение 4. *Интервалом сходимости* степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ называется такой интервал $(-R,\ R)$, что при всех $x \in (-R,\ R)$ этот ряд сходится и притом абсолютно, а для всех x, лежащих вне этого интервала, ряд расходится. Число R называется *радиусом сходимости* степенного ряда.

Замечание. На концах интервала $(-R,\ R)$ вопрос о сходимости или расходимости степенного ряда решается отдельно для каждого конкретного ряда.

Покажем один из способов определения интервала и радиуса сходимости степенного ряда.

Рассмотрим степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ и обозначим $a_n \cdot x^n = u_n$.

Составим ряд из абсолютных величин его членов:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=0}^{\infty} \left|a_n x^n\right| = |a_0| + |a_1 x| + \left|a_2 x^2\right| + ... + \left|a_n x^n\right| + ...$$

и применим к нему признак Даламбера.

Пусть существует

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \cdot |x|\right) = |x| \cdot \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l \cdot |x|,$$

где $l = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|,\ l \neq 0$.

По признаку Даламбера ряд сходится, если $l \cdot |x| < 1$, и расходится, если $l \cdot |x| > 1$. Отсюда ряд сходится при $|x| < \frac{1}{l}$, тогда интервал сходимости: $\left(-\frac{1}{l}, \frac{1}{l}\right)$. При $|x| > \frac{1}{l}$ ряд расходится, так как $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| > 1$.

Используя обозначение $R = \frac{1}{l}$, получим формулу для определения радиуса сходимости степенного ряда:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{R},$$

где $a_n,\ a_{n+1}$ – коэффициенты степенного ряда.

Если окажется, что предел $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l = 0$, то полагаем $R = \infty$.

Для определения интервала и радиуса сходимости степенного ряда также можно использовать радикальный признак Коши, радиус сходимости ряда определяется из соотношения $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\dfrac{1}{R}$.

Определение 5. *Обобщенным степенным рядом* называется ряд вида $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$. Его также называют рядом по степеням $(x-x_0)$.
Для такого ряда интервал сходимости имеет вид: (x_0-R,x_0+R), где $R\geq 0$ – радиус сходимости.

Покажем, как находится радиус сходимости для обобщенного степенного ряда.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{a_n(x-x_0)^n}\right|=|x-x_0|\cdot\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=|x-x_0|\cdot l<1,$$

т.е. $|x-x_0|<R$, где $\dfrac{1}{R}=l=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$.

Если $l=0$, то $R=\infty$, и область сходимости $D(x)=$R; если $l=\infty$, то $R=0$ и область сходимости $D(x)=\{x_0\}$.

Пример 2. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x+1)^n}{n\cdot 5^n}$.

Решение. Обозначим $\dfrac{(x+1)^n}{n\cdot 5^n}=u_n(x)$. Составим предел

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{|x+1|^{n+1}\cdot 5^n\cdot n}{(n+1)\cdot 5^{n+1}\cdot|x+1|^n}=|x+1|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n}{5(n+1)}=\frac{|x+1|}{5}.$$

Решаем неравенство: $\dfrac{|x+1|}{5}<1$, $|x+1|<5$, следовательно, интервал сходимости имеет вид: $-6<x<4$, причём R = 5. Дополнительно исследуем концы интервала сходимости:

а) $x=4$, $u_n(4)=\dfrac{1}{n}$, получаем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$, который расходится;

б) $x=-6$, $u_n(-6)=\dfrac{(-1)^n}{n}$, получаем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$, который сходится условно. Таким образом, область сходимости: $[-6;4)$, $R=5$.
Ответ: область сходимости $[-6;4)$.

Пример 3. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(nx)^n$ расходится для всех $x\neq 0$, так как $(nx)^n\to\infty$ при $n\to\infty$, радиус сходимости $R=0$.

Пример 4. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ сходится при всех $x\in R$, радиус сходимости $R=\infty$.

Задания практическойработы

Найти область сходимости и проверить сходимость на границах интервала:

1,11,21. а) $\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{n}{2n-1}\cdot x^n$; б) $\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{3^n(x-1)^n}{5^{n-1}(n+1)}$;

2,12,22. а) $\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{3^{n-1}\cdot x^n}{5n^2\sqrt{5^n}}$; б) $\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{5^{2n}(x-3)^n}{(n^2+1)2^{3n-1}}$;

3,13,23. а) $\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{2^n\cdot x^n}{\sqrt{3^n}(n^2+1)}$; б) $\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{2^{3n-1}n(x-2)^n}{(2n-1)4^{n+1}}$;

4.14,24. а) $\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\sqrt{5^n}\cdot x^n}{2^n\cdot(n^2+1)}$; б) $\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{(n^2+2)5^{2n-1}(x-1)^n}{(2n^2+3)2^{5n+1}}$;

5,15,25. а) $\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{n!\cdot 2^n\cdot x^n}{(n+5)!}$; б) $\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{(5n^2+2)(x-2)^n}{(n^3+1)3^{2n}}$;

6,16,26. а) $\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{3^{n+1}\cdot x^n}{5^{2n-1}\cdot n}$; б) $\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{2^{3n}(n^2+2)(x-1)^n}{5^{2n+1}(n^2-2)}$;

7,17,27. а) $\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{5^{3n-1}\cdot x^n}{(n^2+n)\cdot 2^n}$; б) $\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{5^{2n+3}n^3(x-2)^n}{3^{2n+1}(n^3+5)}$;

8,18,28. а) $\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\sqrt[3]{2^{n+1}}x^n}{n\cdot(n^2+1)}$; б) $\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{2^{3n+1}n^2(x-1)^n}{3^{2n-1}(n^2+1)}$;

9,19,29. а) $\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{2^{n-2}\cdot n\cdot x^n}{3^{n-3}(n-3)}$; б) $\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{2^{3n+1}(n^2+2)(x-1)^n}{(2n+1)5^{2n-2}}$;

10,20,30. а) $\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{n!\cdot x^n}{3^n(n+2)!}$; б) $\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{3^{2n-1}(n^2+5)(x-2)^n}{(5n^2+1)4^{3n-1}}$

Контрольные вопросы

1.Какие ряды называются функциональными?

2. Какие ряды называются степенными?

3.Что такое радиус и интервал сходимости степенного ряда?

Практическая работа № 27 по теме «Разложений функций в степенной ряд»

Цель:научиться раскладывать функции в степенной ряд

Время выполнения 90 минут

Материальное обеспечение
1.Теоретические сведения
2.Задание
3.Лист А 4
4.Калькуляторы

Порядок выполнения работы
1.Изучить задание
2. Изучить теоретические сведения
3. Выполнить и оформить работу
4.Показать результаты преподавателю

Домашнее задание
1.Подготовить ответы на контрольные вопросы

Теоретические сведения

Разложение функций в степенной ряд.
Ряд Маклорена

Если функция $f(x)$ в некотором интервале раскладывается в степенной ряд по степеням $(x-a)$, то это разложение единственно и задается формулой:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots$$

Данная формула носит фамилию англичанина Тейлора (ударение на первый слог).

На практике процентах в 95-ти приходится иметь дело с частным случаем формулы Тейлора, когда $a=0$:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots$$

Этот ряд получил известность благодаря шотландцу Маклорену (ударение на второй слог). Разложение Маклорена также называют *разложением Тейлора по степеням* x.

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots \qquad (1)$$

По формуле Маклорена:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots$$

Рассмотрим функцию $f(x)=e^x$, тогда:

$f(0)=e^0=1$

Теперь начинаем находить **<u>производные в точке</u>** ноль: первую производную, вторую производную, третью производную и т.д. Это просто, поскольку при дифференцировании экспонента превращается в саму себя:

$f'(x)=(e^x)'=e^x$

$f'(0)=e^0=1$

$f''(x)=(f'(x))'=(e^x)'=e^x$

$f''(0)=e^0=1$

$f'''(x)=(f''(x))'=(e^x)'=e^x$

$f'''(0)=e^0=1$

И так далее….

Совершенно очевидно, что $f(0)=f'(0)=f''(0)=f'''(0)=\ldots=f^{(n)}(0)=\ldots=1$

Подставляем единицы в формулу Маклорена и получаем наше табличное разложение!

Аналогично можно вывести некоторые другие разложения элементарных функций

Примеры разложения функций в ряд Маклорена

Рассмотрим типовую задачу на разложение функции в ряд Маклорена

Пример 1

Разложить функцию в ряд Маклорена.

$$f(x) = x\cos 3x$$

Конструируем наш ряд.

$$\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \frac{\alpha^6}{6!} + \ldots + \frac{(-1)^n \alpha^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

В данном случае $\alpha = 3x$:

$$\cos 3x = 1 - \frac{(3x)^2}{2!} + \frac{(3x)^4}{4!} - \frac{(3x)^6}{6!} + \ldots + \frac{(-1)^n (3x)^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

Раскрываем наверху скобки:

$$\cos 3x = 1 - \frac{3^2 x^2}{2!} + \frac{3^4 x^4}{4!} - \frac{3^6 x^6}{6!} + \ldots + \frac{(-1)^n 3^{2n} x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

Теперь умножаем обе части на «икс»:

$$x\cos 3x = x \cdot \left(1 - \frac{3^2 x^2}{2!} + \frac{3^4 x^4}{4!} - \frac{3^6 x^6}{6!} + \ldots + \frac{(-1)^n 3^{2n} x^{2n}}{(2n)!} + \ldots\right)$$

В итоге искомое разложение функции в ряд:

$$y = x\cos 3x = x - \frac{3^2 x^3}{2!} + \frac{3^4 x^5}{4!} - \frac{3^6 x^7}{6!} + \ldots + \frac{(-1)^n 3^{2n} x^{2n+1}}{(2n)!} + \ldots$$

Пример 2

Разложить функцию в ряд по степеням

$$\ln(1+\alpha) = \alpha - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^3}{3} - \frac{\alpha^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{\alpha^n}{n} + \ldots$$

$$f(x) = \ln(1 - x^2) = \ln(1 + (-x^2))$$

Таким образом, $\alpha = -x^2$ и:

$$\ln(1-x^2) = -x^2 - \frac{(-x^2)^2}{2} + \frac{(-x^2)^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\cdot\frac{(-x^2)^n}{n} + \ldots$$

Окончательно:

$$\ln(1-x^2) = -x^2 - \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{3} - \ldots - \frac{x^{2n}}{n} - \ldots$$

Примеры разложения функций в ряд Тейлора по степеням $(x-a)$, когда $a \neq 0$

Общую формулу Тейлора:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots$$

Пример

Разложить функцию $f(x) = x^3 + 4x^2 - 3x + 2$ в ряд Тейлора по степеням $(x-1)$

В данном случае $a = 1$, смотрим на формулу Тейлора, и становится уже всё понятнее.
Теперь предстоит ручная работа по конструированию разложения:

$$f(a) = f(1) = 1 + 4 - 3 + 2 = 4$$

$$f'(x) = (x^3 + 4x^2 - 3x + 2)' = 3x^2 + 8x - 3$$
$$f'(a) = f'(1) = 3 + 8 - 3 = 8$$

$$f''(x) = (3x^2 + 8x - 3)' = 6x + 8$$
$$f''(a) = f''(1) = 6 + 8 = 14$$

$$f'''(x) = (6x + 8)' = 6 = const$$
$$f'''(a) = f'''(1) = 6$$

$f^{(4)}(x) = (6)' = 0$, все производные, начиная с четвёртой производной, будут нулевыми.

Теперь подставляем в формулу Тейлора:

$$f(x) = x^3 + 4x^2 - 3x + 2 = 4 + \frac{8}{1!}(x-1) + \frac{14}{2!}(x-1)^2 + \frac{6}{3!}(x-1)^3 + 0 + 0 + 0 + \ldots =$$
$$= 4 + 8(x-1) + 7(x-1)^2 + (x-1)^3$$

Пример

Разложить функцию $f(x)=\frac{1}{x+3}$ в ряд Тейлора по степеням $(x+1)$.

Решение: Используем разложение функции в ряд Тейлора по степеням $(x-x_0)$

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots$$

В данном случае: $x_0=-1$

$$f(x_0)=f(-1)=\frac{1}{-1+3}=\frac{1}{2}$$

$$f'(x)=\left(\frac{1}{x+3}\right)'=-\frac{1}{(x+3)^2}$$

$$f'(x_0)=f'(-1)=-\frac{1}{2^2}$$

$$f''(x)=\left(-\frac{1}{(x+3)^2}\right)'=\frac{1\cdot 2}{(x+3)^3}$$

$$f''(x_0)=f''(-1)=\frac{1\cdot 2}{2^3}$$

Замечаем, что с такими раскладами производные можно находить до бесконечности. Поэтому необходимо уловить некоторую закономерность. Найдем ещё третью производную:

$$f'''(x)=\left(\frac{1\cdot 2}{(x+3)^3}\right)'=-\frac{1\cdot 2\cdot 3}{(x+3)^4}$$

$$f'''(x_0)=f'''(-1)=-\frac{1\cdot 2\cdot 3}{2^4}$$

А теперь проанализируем найденные производные:

$$f'(x)=-\frac{1}{(x+3)^2},\quad f''(x)=\frac{1\cdot 2}{(x+3)^3},\quad f'''(x)=-\frac{1\cdot 2\cdot 3}{(x+3)^4}.$$

Закономерность прослеживается: знаки чередуются, в числителе накручивается факториал, а в знаменателе растёт степень.

Теперь, исходя из выявленной закономерности, нужно **составить производную «энного» порядка**. В данном случае она выглядит так:

$$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n\cdot n!}{(x+3)^{n+1}}$$

Как проверить, правильно ли составлена энная производная? Подставьте в неё значения $n=1$, $n=2$, $n=3$ и у вас должны получиться в точности первая, вторая и третья производные. После того, как мы убедились в том, что энная производная составлена правильно, подставляем в неё наше значение:

$$f^{(n)}(x_0)=f^{(n)}(-1)=\frac{(-1)^n\cdot n!}{2^{n+1}}$$ Теперь осталось подставить в формулу Тейлора и аккуратно провести упрощения:

$$f(x)=\frac{1}{x+3}=\frac{1}{2}+\frac{-\frac{1}{2^2}}{1!}(x+1)+\frac{\frac{1\cdot 2}{2^3}}{2!}(x+1)^2+\frac{-\frac{1\cdot 2\cdot 3}{2^4}}{3!}(x+1)^3+\ldots+\frac{\frac{(-1)^n\cdot n!}{2^{n+1}}}{n!}(x+1)^n+\ldots=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}(x+1)+\frac{1}{2^3}(x+1)^2-\frac{1}{2^4}(x+1)^3+\ldots+\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(x+1)^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot(x+1)^n}{2^{n+1}}$$

Задания практической работы

1. Дан степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n x^n}{b^n\sqrt{n+1}}$

При заданных значениях a и b написать первые три члена ряда, найти интервал сходимости ряда.

1,11,21	*a =5, b=8*
2,12,22	*a=2, b=4*
3,13,23	*a=3, b=4*
4,14,24	*a=7, b=5*
5,15,25	*a=5, b=7*
6,16,26	*a=2, b=6*
7,17,27	*a=8, b=3*
8,18,28	*a=7, b=4*
9,19,29	*a=3, b=7*
10,11,20	*a=4, b=5*

2.Разложить функцию в ряд Маклорена

1,11,21. $f(x)=e^{6x}$

2,12,22. $f(x)=\cos\frac{x}{2}$

3,13,23. $f(x)=\ln(1+4x)$

4,14,24. $f(x)=\sqrt[3]{1+x}$

6,16,26. $f(x)=\sin 3x$

7,17,27. $f(x)=e^{-x^2}$

8,18,28. $f(x)=\sin\sqrt{x}$

9,19,29. $f(x)=\cos 5x^2$

5,15,25. $f(x)=\sqrt{1+x^2}$ 10,20,30. $f(x)=\sqrt{1-x}$

Контрольные вопросы

1. Определение степенного ряда.
2. Определение радиуса и области сходимости
3. Определение ряда Тейлора и Маклорена
4. Формулы разложения элементарных функций

Практическая работа № 28 по теме «Действия над комплексными числами в алгебраической форме»

Цель: научить выполнять действия с комплексными числами в алгебраической форме

Время выполнения 90 минут

Материальное обеспечение

1.Теоретические сведения

2.Задание

3.Лист А 4

4.Калькуляторы

Порядок выполнения работы

1.Изучить задание

2. Изучить теоретические сведения

3. Выполнить и оформить работу

4.Показать результаты преподавателю

Домашнее задание

1.Подготовить ответы на контрольные вопросы

Теоретические сведения

Определение. Комплексным числом *z* называется выражение $z=a+ib$, где a и b – действительные числа, i – мнимая единица, которая определяется соотношением: $i^2=-1;\qquad i=\sqrt{-1}.$

При этом число a называется **действительной частью** числа z ($a = Re\, z$), а b- **мнимой частью** ($b = Im\, z$).

Если $a = Re\, z = 0$, то число z будет чисто мнимым, если $b = Im\, z = 0$, то число z будет действительным.

Определение. Числа $z = a + ib$ и $\bar{z} = a - ib$ называются **комплексно – сопряженными.**

Определение. Два комплексных числа $z_1 = a_1 + ib_1$ и $z_2 = a_2 + ib_2$ называются равными, если соответственно равны их действительные и мнимые части:

$$a_1 = a_2; \qquad b_1 = b_2;$$

Определение. Комплексное число равно нулю, если соответственно равны нулю действительная и мнимая части.

$$a = b = 0.$$

Действия над комплексными числами в алгебраической форме.

Основные действия с комплексными числами вытекают из действий с многочленами.

Сложение и вычитание

Рассмотрим два комплексных числа, заданных в общем виде $z_1 = a_1+ib_1$;

$z_2=a_2+ib_2$, тогда

$$z = z_1 \pm z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = (a_1 \pm a_2) + i(b_1 \pm b_2) = a \pm ib$$

Можно сформулировать правило сложения и вычитания комплексных чисел: при сложении (вычитании) комплексных чисел соответственно складываются (вычитаются) их действительные и мнимые части.

Умножение

$z=z_1z_2=(a_1+ib_1)(a_2+ib_2) =a_1a_2+ia_1b_2+ib_1a_2+i^2b_1b_2=a+ib$

$z=z_1z_2=(a_1a_2-b_1b_2)+ i (a_1b_2+b_1a_2)$

(т.е. можно говорить, что перемножаются комплексные числа как многочлены, учитывая, что $i^2 = -1$). Значит, чтобы перемножить два комплексных числа необходимо перемножить их как многочлены, учитывая, что $i^2 = -1$.

Деление

При выполнении деления комплексных чисел пользуются искусственным приёмом: числитель и знаменатель дроби умножают на число, комплексно - сопряженное знаменателю дроби, и поступают далее так, как и при умножении комплексных чисел.

Пример.

$z_1= 5-i$;

$z_2=-2+3i$;

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{5-i}{-2+3i}=\frac{(5-i)*(-2-3i)}{(-2+3i)*(-2-3i)}=\frac{-10+2i-15i+3i^2}{4-9i^2}=\frac{-13-13i}{13}=-1-i$$

Задания практической работы

1.Даны комплексные числа вычислить y $z=z_1+z_2$; z_1-z_2; $z_1\cdot z_2$; $\frac{z_1}{z_2}$

1. $z_1=5-i$; $z_2=1+3i$
2. $z_1=3-4i$; $z_2=1+i$
3. $z_1=1-5i$; $z_2=1+4i$
4. $z_1=1+3i$; $z_2=7-i$
5. $z_1=1-i$; $z_2=7+3i$
6. $z_1=1-i$; $z_2=5-4i$
7. $z_1=3+4i$; $z_2=-2+i$
8. $z_1=-i$; $z_2=7+4i$
9. $z_1=6-5i$; $z_2=1+i$
10. $z_1=-1+5i$; $z_2=2-5i$
11. $z_1=5-7i$; $z_2=1-3i$
12. $z_1=-3-2i$; $z_2=-1+7i$
13. $z_1=5+2i$; $z_2=2-i$
14. $z_1=1+5i$; $z_2=2-3i$
15. $z_1=1-4i$; $z_2=1+2i$
16. $z_1=5+i$; $z_2=1-2i$
17. $z_1=3+i$; $z_2=5-2i$
18. $z_1=1-5i$; $z_2=1+3i$
19. $z_1=5-i$; $z_2=1+3i$
20. $z_1=1+3i$; $z_2=-2+5i$
21. $z_1=3+4i$; $z_2=-2+i$
22. $z_1=5-2i$; $z_2=-2+i$
23. $z_1=7-2i$; $z_2=5+3i$
24. $z_1=7-3i$; $z_2=-1+4i$
25. $z_1=-2+3i$; $z_2=5-4i$
26. $z_1=-3+2i$; $z_2=6+5i$
27. $z_1=-1+7i$; $z_2=4-5i$
28. $z_1=4+5i$; $z_2=1-2i$
29. $z_1=-1+3i$; $z_2=6-5i$
30. $z_1=-3-2i$; $z_2=4+3i$

2. Выполнить действия над комплексными числами в алгебраической форме

1)11)21) $\frac{1+i}{1-2i}-\left(\frac{4}{5}-\frac{2}{5}i\right)$;

2)12)22) $\frac{2(1-i\sqrt{3})}{1+i\sqrt{3}}$;

3)13)23) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{20}+i^{17}$;

4)14)24) $\frac{(1-2i)(1+2i)}{2+i}-i^{12}$;

5)15)25) $\frac{2(1+i\sqrt{3})}{1-i}-(1+i\sqrt{3})$;

6)16)26) $\frac{(-2+i)^2}{1+3i}-(0{,}1-0{,}3i)$;

7)17)27) $\frac{2(1-i\sqrt{3})}{i(\sqrt{3}-i)}$;

8)18)28) $\frac{(1-3i)(1+3i)}{-3-i}-2i^{19}$;

9) 19)29) $\frac{(1+i\sqrt{3})^2}{2i^5}$;

10)20)30) $\frac{(4-i)^2}{i^8}-8(2-i^{13})$;

Контрольные вопросы

1. Что такое комплексное число: действительная часть числа, мнимая часть числа?
2. Что такое мнимая единица?
3. Какие числа называются сопряженными?
4. Как представить комплексное число графически?
5. Что такое модуль числа?
6. Что такое аргумент числа?
7. Сколько может быть модулей и аргументов у комплексного числа?
8. Как найти аргумент числа?

Как найти сумму, разность, произведение, частное комплексных чисел

Практическая работа № 29 по теме «Действия над комплексными числами в тригонометрической и показательной формах»

Цель: научить выполнять действия с комплексными числами в тригонометрической и показательной формах

Время выполнения 90 минут

Материальное обеспечение

1.Теоретические сведения

2.Задание

3.Лист А 4

4.Калькуляторы

Порядок выполнения работы

1.Изучить задание

2. Изучить теоретические сведения

3. Выполнить и оформить работу

4.Показать результаты преподавателю

Домашнее задание

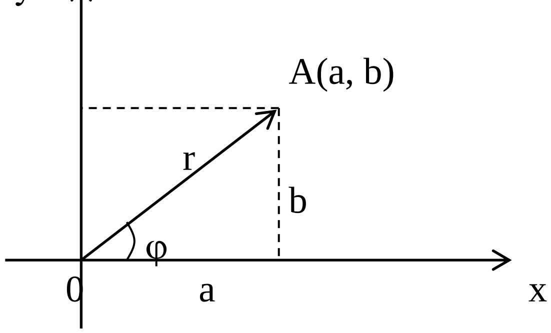
1.Подготовить ответы на контрольные вопросы

Теоретические сведения

Геометрическое изображение комплексных чисел.

Понятие комплексного числа имеет геометрическое истолкование. Множество комплексных чисел является расширением множества действительных чисел за счет включения множества мнимых чисел. Комплексные числа включают в себя все множества чисел, которые изучались ранее. Так натуральные, целые, рациональные, иррациональные, действительные числа являются, вообще говоря, частными случаями комплексных чисел.

Если любое действительное число может быть геометрически представлено в виде точки на числовой прямой, то комплексное число представляется точкой на плоскости, координатами которой будут соответственно действительная и мнимая части комплексного числа. При этом горизонтальная ось будет являться действительной числовой осью, а вертикальная - мнимой осью.



Таким образом, на оси OX располагаются действительные числа, а на оси OY – чисто мнимые.

С помощью подобного геометрического представления можно представлять числа в так называемой тригонометрической форме.

Тригонометрическая форма числа.

Из геометрических соображений видно, что $a = r\cos\varphi; \quad b = r\sin\varphi$. Тогда комплексное число можно представить в виде:

$$z = a + ib = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Такая форма записи называется **тригонометрической формой записи комплексного числа.**

При этом величина r называется **модулем** комплексного числа, а угол наклона φ **- аргументом** комплексного числа.

$$r = |z|; \qquad \varphi = Arg\, z.$$

Из геометрических соображений видно:

$$r = |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}; \quad \varphi = Arg\, z = arctg\frac{b}{a};$$

Очевидно, что комплексно – сопряженные числа имеют одинаковые модули и противоположные аргументы.

$$|z| = |\bar{z}|; \qquad Arg\, z = -Arg\, \bar{z}.$$

Действия с комплексными числами в тригонометрической форме.

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \; z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$$

Умножение $z = z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$

В случае комплексно – сопряженных чисел:

$$z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 = |z|^2 = |\bar{z}|^2.$$

Деление $z = \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$

Возведение в степень

Из операции умножения комплексных чисел следует, что

$$z^2 = zz = r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)$$

В общем случае получим:

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),$$

где n – целое положительное число.

Это выражение называется **формулой Муавра.** (Абрахам де Муавр (1667 – 1754) – английский математик).

Извлечение корня из комплексного числа

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$$

Возводя в степень, получим:

$$\rho^n(\cos n\psi + i\sin n\psi) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Отсюда: $\rho = \sqrt[n]{r}; \qquad n\psi = \varphi + 2\pi k; \qquad k \in Z.$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)$$

Таким образом, корень n –ой степени из комплексного числа имеет n различных значений.**Задания для практической работы**

Задание. Выполнить действия с данными комплексными :
1) Z1+Z2; Z1-Z2; Z1·Z2, Z1:Z2

1. $z_1 = 8(\cos 55^0 + \sin 55^0)$, $z_2 = 2(\cos 5^0 + \sin 5^0)$,
2. $z_1 = 5(\cos 48^0 + \sin 48^0)$, $z_2 = 2(\cos 12^0 + \sin 12^0)$,
3. $z_1 = 3(\cos 70^0 + \sin 70^0)$, $z_2 = 2(\cos 20^0 + \sin 20^0)$,
4. $z_1 = 10(\cos 105^0 + \sin 105^0)$, $z_2 = 2(\cos 15^0 + \sin 15^0)$,
5. $z_1 = 12(\cos 145^0 + \sin 145^0)$, $z_2 = 2(\cos 5^0 + \sin 5^0)$,
6. $z_1 = 7(\cos 255^0 + \sin 255^0)$, $z_2 = 2(\cos 15^0 + \sin 15^0)$,
7. $z_1 = 9(\cos 168^0 + \sin 168^0)$, $z_2 = 2(\cos 12^0 + \sin 12^0)$,
8. $z_1 = 6(\cos 40^0 + \sin 40^0)$, $z_2 = 2(\cos 20^0 + \sin 20^0)$,
9. $z_1 = 3(\cos 40^0 + \sin 40^0)$, $z_2 = 2(\cos 5^0 + \sin 5^0)$,
10. $z_1 = 10(\cos 75^0 + \sin 75^0)$, $z_2 = 2(\cos 15^0 + \sin 15^0)$,

11. $z_1 = 9(\cos 123^0 + \sin 123^0)$, $z_2 = 2(\cos 12^0 + \sin 12^0)$,
12. $z_1 = 5(\cos 160^0 + \sin 160^0)$, $z_2 = 2(\cos 20^0 + \sin 20^0)$,
13. $z_1 = 3(\cos 235^0 + \sin 235^0)$, $z_2 = 2(\cos 5^0 + \sin 5^0)$,
14. $z_1 = 4(\cos 30^0 + \sin 30^0)$, $z_2 = 2(\cos 1\ 5^0 + \sin 15^0)$,
15. $z_1 = 2(\cos 258^0 + \sin 258^0)$, $z_2 = 2(\cos 12^0 + \sin 12^0)$,
16. $z_1 = 7(\cos 115^0 + \sin 115^0)$, $z_2 = 2(\cos 20^0 + \sin 20^0)$,
17. $z_1 = 14(\cos 310^0 + \sin 310^0)$, $z_2 = 2(\cos 5^0 + \sin 5^0)$,
18. $z_1 = 8(\cos 45^0 + \sin 45^0)$, $z_2 = 2(\cos 15^0 + \sin 15^0)$,
19. $z_1 = 6(\cos 213^0 + \sin 213^0)$, $z_2 = 2(\cos 12^0 + \sin 12^0)$,
20. $z_1 = 9(\cos 70^0 + \sin 70^0)$, $z_2 = 2(\cos 20^0 + \sin 20^0)$,
21. $z_1 = 4(\cos 40^0 + \sin 40^0)$, $z_2 = 2(\cos 5^0 + \sin 5^0)$,
22. $z_1 = 6(\cos 300^0 + \sin 300^0)$, $z_2 = 2(\cos 1\ 5^0 + \sin 15^0)$,
23. $z_1 = 3(\cos 33^0 + \sin 33^0)$, $z_2 = 2(\cos 12^0 + \sin 12^0)$,
24. $z_1 = 5(\cos 250^0 + \sin 250^0)$, $z_2 = 2(\cos 20^0 + \sin 20^0)$,
25. $z_1 = 8(\cos 85^0 + \sin 85^0)$, $z_2 = 2(\cos 5^0 + \sin 5^0)$,
26. $z_1 = 10(\cos 165^0 + \sin 165^0)$, $z_2 = 2(\cos 15^0 + \sin 1\ 5^0)$,
27. $z_1 = 9(\cos 48^0 + \sin 48^0)$, $z_2 = 2(\cos 12^0 + \sin 12^0)$,
28. $z_1 = 5(\cos 100^0 + \sin 100^0)$, $z_2 = 2(\cos 20^0 + \sin 20^0)$,
29. $z_1 = 4(\cos 175^0 + \sin 175^0)$, $z_2 = 2(\cos 5^0 + \sin 5^0)$,
30. $z_1 = 16(\cos 120^0 + \sin 120^0)$, $z_2 = 2(\cos 15^0 + \sin 15^0)$,

2.Выполнить действия над комплексными числами в тригонометрической форме, результат записать в тригонометрической, алгебраической и показательной форме

1,11,21. $\dfrac{i-1}{1+i}$ 6,16,26. $\sqrt[3]{-1+i}$

2,12,22. $\left(\dfrac{1-i}{-2-2i}\right)^{-6}$ 7,17,27. $\left(\left(\sqrt{3}-i\right)\left(-1+i\right)\right)^4$

3,13.23. $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{1-i}\right)^6$ 8,18,28. $\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{12}$

4,14,24. $\left(\dfrac{0{,}5-0{,}5\sqrt{3}i}{0{,}5\sqrt{3}-0{,}5i}\right)^4$ 9,19,29. $\left(\dfrac{2\sqrt{3}-2i}{\sqrt{3}+i}\right)^3$

5,15,25. $\left(2+\sqrt{12}i\right)^5$ 10,20,30. $\left(-3-\sqrt{3}i\right)^3$

3.Записать комплексное число в тригонометрической и алгебраической форме

1. $1\,4e^{2\pi i/3}$; **6.** $4e^{-\pi i/4}$;

2. $2e^{\pi i/6}$; **7.** $5e^{-7\pi i/6}$;

3. $(2/3)e^{-5\pi i/3}$;

4. $3e^{\pi i/3}$;

5. $e^{-5\pi i/6}$;

8. $(2/5)e^{5\pi i/4}$;

9. $8e^{7\pi i/6}$;

10. $2{,}2e^{-3\pi i/4}$;

4.Выполнить действия. Результат записать во всех формах.

1. $\dfrac{(5+3i)(5+3i^{15})}{\sqrt{2}(\cos 225^\circ + i\sin 225^\circ)}$;

2. $\dfrac{(3+2i)^2(2-3i^0)}{1+2i^{31}}$;

3. $\dfrac{(2+i)^3}{2i(\cos(3\pi/4)+i\sin(3\pi/4))}$;

4. $((1-i\sqrt{3})/2)^6$;

5. $\sqrt{-1+i\sqrt{3}}$;

6. $((-\sqrt{3}+i)/2)^{60}$;

7. $(2/(1-i\sqrt{3}))$;

8. $((\sqrt{3}+i)/2)^{24}$;

9. $\sqrt{-8-8\sqrt{3}i}$;

10. $\sqrt{7-4i\sqrt{2}}$;

5.. Выполнить действия, используя тригонометрическую форму:

1. $\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}i\right)\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{6}+\dfrac{i\sqrt{6}}{6}\right)$;

2. $(1+i\sqrt{3})(-2-2i\sqrt{3})$;

3. $(1+i)(3+3i\sqrt{3})$;

4. $(6+2i\sqrt{3})(-3-3i)$;

5. $(5+5i)(\cos 15^\circ + i\sin 15^\circ)$;

6. $3\left[\cos(-\dfrac{\pi}{8})+i\sin(-\dfrac{\pi}{8})\right]+(3+\sqrt{3}i)$;

7. $\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$;

8. $\dfrac{i^6+i^5}{\sqrt{2}e^{\pi i/3}}$;

9. $\dfrac{\dfrac{-3}{2}-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}i}{4-4\sqrt{3}i}$;

10. $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}-i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)e^{-3\pi i/4}$

6.Выполнить действия над комплексными числами в тригонометрической форме:

1) $\sqrt[3]{z_1}$; 2) z_2^5;

1. $z_1 = 1+i,\ z_2 = -\sqrt{3}+i$;

6. $z_1 = 1-\sqrt{3}i,\ z_2 = 2+2i$;

2. $z_1 = 1 - i,\ z_2 = -\sqrt{3} - i;$

3. $z_1 = -1 + i,\ z_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i;$

4. $z_1 = -1 - i,\ z_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i;$

5. $z_1 = 1 + \sqrt{3}i,\ z_2 = 2 - 2i;$

7. $z_1 = -1 + \sqrt{3}i,\ z_2 = -2 - 2i;$

8 . $z_1 = -1 - \sqrt{3}i,\ z_2 = -2 + 2i;$

9. $z_1 = \sqrt{3} + i,\ z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i;$

10. $z_1 = \sqrt{3} - i,\ z_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i;$

Контрольные вопросы

1. Что такое тригонометрическая форма записи комплексного числа?
2. Как перевести число в тригонометрическую форму?
3. Как найти произведение, частное чисел в тригонометрической форме?
4. Как найти возвести число в тригонометрической форме в целую степень?
5. Как найти корень n-ной степени из числа в тригонометрической форме?
6. Формула Эйлера
7. Как представить комплексное число в показательной форме?
8. Как связаны тригонометрическая и показательная формы записи комплексных чисел?
9. Как найти произведение, частное чисел в показательной форме?
10. Как найти возвести число в показательной форме в целую степень?
11. Как найти корень n-ной степени из числа в показательной форме?

Практическая работа № 30 по теме «Решение уравнений на множестве комплексных чисел»

Цель: научить решать уравнения на множестве комплексных чисел

Время выполнения 90 минут

Материальное обеспечение

1.Теоретические сведения

2.Задание

3.Лист А 4

4.Калькуляторы

Порядок выполнения работы

1.Изучить задание

2. Изучить теоретические сведения

3. Выполнить и оформить работу

4.Показать результаты преподавателю

Домашнее задание

1.Подготовить ответы на контрольные вопросы

Теоретические сведения

Квадратное уравнение с комплексными корнями

$$z = \sqrt{-4}$$

Нельзя извлечь корень? Если речь идет о действительных числах, то действительно нельзя. В комплексных числах извлечь корень – можно! А точнее, два корня:

$$z_1 = \sqrt{-4} = -2i$$
$$z_2 = \sqrt{-4} = 2i$$

Действительно ли найденные корни являются решением уравнения $z^2 = -4$? Выполним проверку:

$$(-2i)^2 = (-2)^2 \cdot i^2 = 4 \cdot (-1) = -4$$
$$(2i)^2 = 2^2 \cdot i^2 = 4 \cdot (-1) = -4$$

Что и требовалось проверить.

Часто используется сокращенная запись, оба корня записывают в одну строчку под $z_{1,2} = \pm 2i$.

Такие корни также называют *сопряженными комплексными корнями*.

Как извлекать квадратные корни из отрицательных чисел, думаю, всем понятно: $\sqrt{-1} = \pm i$, $\sqrt{-9} = \pm 3i$, $\sqrt{-36} = \pm 6i$, $\sqrt{-3} = \pm\sqrt{3}i$, $\sqrt{-5} = \pm\sqrt{5}i$ и т.д. Во всех случаях получается два сопряженных комплексных корня.

Пример

Решить квадратное уравнение $z^2 - 6z + 34 = 0$

Вычислим дискриминант:
$$D = 36 - 136 = -100$$

Дискриминант отрицателен, и в действительных числах уравнение решения не имеет. Но корень можно извлечь в комплексных числах!
$$\sqrt{D} = \pm 10i$$

По известным формулам получаем два корня:

$$z_{1,2} = \frac{6 \pm 10i}{2}$$

$z_{1,2} = 3 \pm 5i$ – сопряженные комплексные корни

Таким образом, уравнение $z^2 - 6z + 34 = 0$ имеет два сопряженных комплексных корня: $z_1 = 3 - 5i$, $z_2 = 3 + 5i$

Нетрудно понять,что в *поле* комплексных чисел «школьное» квадратное уравнение всегда при двух корнях! И вообще, любое уравнение вида $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0$ имеет ровно n комплексных корней, часть которых (или все) могут быть действительными.

Задания практической работы

Решить квадратное уравнение:

I. $x^2 -2x + 17 = O$
2.$2x^2 + 2x+ 1 = 0$
3.$4x^2-4x + 17 = 0$
4.$x^2 +6x + 25 = 0$
5.$4x^2 -20x + 29 = O$
6.$9x^2 - 6x + 2 = O$
7.$x^2 -4x+ 29 = O$
8.$2x^2 -2x + 5 = O$
9.$4x^2 + 4x + 5 = O$
10.$x^2 -4x + 13 = O$
II. $9x^2 -6x + 17 = O$
12.$4x^2 - 12x + 25 = O$
13.$x^2 + 4x + 5 = O$
14.$2x^2$ — 1 Ox + 17 = O
15. $x^2 - 6x + 13 = O$
16. $x^2 +6x + 18 = O$
17. $x^2 -4x + 40 = O$
18.$4x^2 -12x + 13 = O$
19.$2x^2 + 6x + 5 = O$
20.$x^2 -2x + 5 = O$
21.$9x^2-6x + 10 = 0$
22.$2x^2+ 6x + 5 = O$
23.$x^2 +6x + 13 = O$
24.$2x^2- 6x +17 = O$
25.$9x^2-6x + 2 = O$
26. $x^2 -6x + 10 = O$

27. $x^2 + 2x + 26 = 0$
28. $2x^2 + 6x + 9 = 0$
29. $2x^2 + 10x + 13 = 0$
30. $x^2 - 6x + 34 = 0$

Контрольные вопросы

1.Какие числа называются комплексно сопряженными?

2.Какие комплексные числа называются равными?

3.Как извлечь квадратный корень из комплексного числа?

Перечень рекомендуемых учебных изданий, Интернет-ресурсов, дополнительной литературы

Основные источники:

1) Григорьев В.П. «Элементы высшей математики», 2016 ОНЦ «Академия».
2) Григорьев В.П. «Сборник задач по высшей математике», 2016 ОНЦ «Академия».
3)Омельченко В. П., Математика: учебное пособие / Омельченко В. П., Курбатова Э. В. -Ростов н/Д.: Феникс, 2005.
4)Богомолов Н.В. Практические занятия по высшей математике. - М.: Высшая школа, 2006.
5)Подольский В.А. и др. Сборник задач по математике для техникумов. - М.: Высшая школа, 2007.
6)Валуцэ И.И. и др. Математика для техникумов на базе средней школы: учеб. пособ. - М.: Наука, 2007.
7)Дадаян А.А. Математика: учеб. - М.: ФОРУМ: ИНФРА-М, 2005
Математика для техникумов. Алгебра и начала анализа: В 2-х частях, учеб. /Каченовский М.И. и др. под ред. Г.Н. Яковлева. - М.: Наука, 2007.

Дополнительные источники:

1)Высшая математика для экономистов. Под ред. Н. Ш. Кремера. - М.: ЮНИТИ, 2007
2)Спирина М.С. Дискретная математика: учеб. - М.: Академия, 2006.
3)Гончарова Г.А., Мочалин А.А. Элементы дискретной математики: учеб. пособ.- М.: Форум: ИНФРА-М, 2005.

Интернет-ресурсы

1)www.fcior.edu.ru (Информационные, тренировочные и контрольные материалы)

www.school-collection.edu.ru (Единая коллекции цифровых образовательных ресурсов).
2)http://www.mathnet.spb.ru/
3)http://www.exponenta.ru/educat/class/class.asp
4)http://www.bymath.net/studyguide/tri/tri_topics.html
5)http://www.mathem.h1.ru/index.html

6)ttp://www.mathnet.spb.ru/
7)http://www.exponenta.ru/educat/class/class.asp
8)http://www.bymath.net/studyguide/tri/tri_topics.html
9)http://www.mathem.h1.ru/index.html
10)http://festival.1september.ru/