МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
ФГБОУ ВО «Брянский государственный технический университет»
(БГТУ)

Политехнический колледж (ПК БГТУ)

УТВЕРЖДАЮ
Ректор ФГБОУ ВО БГТУ

___________ О.Н. Федонин

«_30_»___август____ 2020 г.

Методические рекомендации
для организации самостоятельной работы студентов 1 курса
по дисциплине ПД. 01 Математика

Специальности 09.02.03 «Программирование в компьютерных системах»

Разработал(и):

– преподаватель ПК БГТУ Е.Г.Бедина

Материалы рассмотрены и одобрены на заседании предметно-цикловой комиссии «Математика и общие естественно научные дисциплины » ПК БГТУ (далее — ПЦК)

Председатель ПЦК Л.А.Лазарева

от «30.08» 2020 г., протокол № 1

Методические рекомендации предназначены для освоения дисциплины «Математика». Разработаны в соответствии с учебным планом и программой курса ПД. 01 «Математика». Данные рекомендации содержат краткое изложение теоретического материала, контрольные вопросы по темам, дифференцированные практические задания для самопроверки, а также тренажеры для отработки умений по темам.

Содержание

Введение
Раздел 1. Развитие понятия о числе
1.1. Действительные числа и величины. Приближение действительных чисел. Погрешности
Задания для самостоятельной работы
1.2. Вычисления с приближенными данными
Задания для самостоятельной работы
Раздел 2. Уравнения и неравенства
1.3. Комплексные числа
2.1. Линейные неравенства с одной переменной
Задания для самостоятельной работы
2.2. Квадратные неравенства
Задания для самостоятельной работы
2.3. Системы линейных уравнений и методы их решения
Задания для самостоятельной работы
2.4. Системы линейных неравенств
Задания для самостоятельной работы
Раздел 3. Функции, их свойства и графики
3.1. Числовая функция
Задания для самостоятельной работы
3.2. Графики функций. Простейшие преобразования графиков функций
Задания для самостоятельной работы
3.3. Монотонность, ограниченность, четность и нечетность, периодичность функций
Задания для самостоятельной работы
Раздел 4. Корни, степени и логарифмы
4.1. Корни и степени
Задания для самостоятельной работы
4.2. Степени с рациональными показателями их свойства
Задания для самостоятельной работы
4.3. Степени с действительными показателями их свойства
Задания для самостоятельной работы
4.4. Иррациональные уравнения
Задания для самостоятельной работы
4.5. Логарифмы
Задания для самостоятельной работы
Раздел 5. Показательная, логарифмическая и степенная функции
5.1. Показательная, логарифмическая и степенная функции, их свойства и графики
Задания для самостоятельной работы
5.2. Решение простейших показательных уравнений
Задания для самостоятельной работы
5.3. Решение простейших показательных неравенств

Задания для самостоятельной работы
5.4. Решение простейших логарифмических уравнений
Задания для самостоятельной работы
5.5. Решение простейших логарифмических неравенств
Задания для самостоятельной работы
Раздел 6. Основы тригонометрии.
6.1. Радианное измерение углов и дуг. Тригонометрические функции числового аргумента, знаки их значений
Задания для самостоятельной работы
6.2. Соотношения между тригонометрическими функциями одного аргумента.
Задания для самостоятельной работы
6.3. Преобразование сумм тригонометрических функций в произведение. Преобразование произведений тригонометрических функций в суммы. Периодичность тригонометрических функций
Задания для самостоятельной работы
6.4. Свойства и графики тригонометрических функций. Обратные тригонометрические функции
Задания для самостоятельной работ
6.5. Простейшие тригонометрические уравнения и неравенства
Задания для самостоятельной работы
Раздел 7. Прямые и плоскости в пространстве
7.1. Аксиомы стереометрии и простейшие следствия их них. Взаимное расположение двух прямых в пространстве
Задания для самостоятельной работы
7.2. Угол между прямыми. Признак параллельности прямой и плоскости. Признак параллельности плоскостей
Задания для самостоятельной работы
7.3. Параллельное проектирование и его свойства. Перпендикулярность прямой и плоскости. Ортогональное проектирование
Задания для самостоятельной работы
7.4. Перпендикуляр и наклонная. Угол между прямой и плоскостью. Двугранный угол. Угол между плоскостями. Перпендикулярность двух плоскостей
Задания для самостоятельной работы
Раздел 8. Векторы и координаты
8.1. Векторы на плоскости и в пространстве. Действия над векторами с заданными координаты
Задания для самостоятельной работы
8.2. Прямоугольные координаты на плоскости ив пространстве
Задания для самостоятельной работы
8.3. Длина вектора. Угол между векторами. Расстояние между точками. Уравнение прямой. Уравнение окружности
Задания для самостоятельной работы

Раздел 9. Начала математического анализа
9.1. Производная. Свойства производной
Задания для самостоятельной работы
9.2. Производная суммы, произведения и частного двух функций
Задания для самостоятельной работы
9.3.Производная сложной функции. Производная степенной, логарифмической и показательной функций1
Задания для самостоятельной работы
9.4. Вторая производная, ее геометрический и физический смысл
Задания для самостоятельной работы
9.5. Возрастание и убывание функции. Экстремумы функции.
Задания для самостоятельной работы
9.6. Применение производной к построению графиков функции.
Задания для самостоятельной работы
9.7. Первообразная
Задания для самостоятельной работы
9.8. Неопределенный интеграл и его свойства.
Задания для самостоятельной работы
9.9. Определенный интеграл и его свойства
Задания для самостоятельной работы
9.10. Вычисление площадей плоских фигур с помощью определенного интеграла
Задания для самостоятельной работы
9.11. Дифференциальные уравнения первого порядка
Задания для самостоятельной работы
Раздел 10. Многогранники.
10.1. Геометрическое тело, его поверхность. Многогранники. Призма
Задания для самостоятельной работы
10.2. Параллелепипед. Призма.
Задания для самостоятельной работы
Раздел 11. Тела и поверхности вращения
11.1. Поверхность вращения. Тело вращения. Цилиндр Конус
Задания для самостоятельной работы
11.2. Сфера и шар
Задания для самостоятельной работы…
Раздел 12. Измерения в геометрии.
12.1. Объем геометрического тела. Объем призмы, параллелепипеда
Задания для самостоятельной работы
12.2. Объем пирамиды, цилиндра
Задания для самостоятельной работы
12.3.Объем конуса, шара
Задания для самостоятельной работы
12.4. Площадь поверхности геометрических тел. Площадь поверхности призмы, пирамиды

Задания для самостоятельной работы
12.5. Площадь поверхности цилиндра, конуса, шара
Задания для самостоятельной работы
Раздел 13. Элементы комбинаторики
Задания для самостоятельной работы
Раздел 14. Элементы теории вероятностей. Элементы математической статистики.
14.1. Случайный опыт случайное событие.
Задания для самостоятельной работы
14.2. Вероятность события. Операции над событиями
Задания для самостоятельной работы
14.3. Теоремы сложения и умножения вероятностей. Формула Бернулли
Задания для самостоятельной работы
14.4. Дискретная случайная величина, закон ее распределения.
Задания для самостоятельной работы
14.5. Числовые характеристики дискретной случайной величины.
Задания для самостоятельной работы
Список использованной литературы

Введение

Овладение практически любой современной профессией требует определенных математических знаний. Представление о роли математики в современном мире, математические знания стали необходимым компонентом общей культуры. Для самореализации, возможности успешной деятельности в информационном мире требуется прочная математическая подготовка. Математическое образование включает в себя овладение системой математических знаний, умений и навыков, дающих представление о предмете математики, о математической символике, специальных математических приемах, методах мышления.

В методические рекомендации включены такие разделы как развитие понятия о числе; уравнения и неравенства; функции, их свойства и графики; показательная, логарифмическая и степенная функции; корни, степени и логарифмы; основы тригонометрии; прямые и плоскости в пространстве; векторы и координаты; начала математического анализа; многогранники; тела и поверхности вращения; измерения в геометрии; элементы комбинаторики; элементы теории вероятностей, элементы математической статистики.

Учебно-методическое пособие составлено в соответствии с ФГОС для ССУЗов, примерной программой, с рабочей программой .

Тематический план разделов и тем

Примерный тематический план учебной дисциплины

Наименование разделов и тем	**Содержание учебного материала, самостоятельная работа обучающихся**	**Объем часов**	**Уровень освоения**
Тема 1. Введение. Математика в науке и практической деятельности. Цели и задачи изучения математики в учреждениях СПО		**1**	
Тема 2.Развитие понятия о числе		**9**	
	1)Целые и рациональные числа.	**1**	**2**

	2) Действительные числа. Действия над действительными числами. 3)Приближенные вычисления. Погрешности приближенных вычислений. Действия над приближенными числами. 4)Комплексные числа. Алгебраическая форма комплексного числа. 5)Действия с комплексными числами в алгебраической форме. **Самостоятельная работа по теме «Развитие понятия о числе».**	**2** **2** **2** **2** **6**	
Тема 3. Основы тригонометрии		**40**	
	1)Синус, косинус, тангенс, котангенс. Градусная и радианная мера угла. 2)Основные тригонометрические тождества. 3)Формулы приведения. 4)Синус, косинус, тангенс суммы и разности двух углов. 5)Формулы двойного угла. Формулы половинного угла. 6)Формулы суммы и разности одноименных тригонометрических функций. 7)Формулы преобразования произведения в сумму. Формулы понижения степени. 8)Преобразование простейших	**2** **2** **2** **2** **2** **2** **2** **2**	**2**

	тригонометрических выражений. 9)Тождественные преобразования тригонометрических выражений **Самостоятельная работа по теме «Преобразование тригонометрических выражений».** 10)Тригонометрические функции, их графики и свойства (синус, косинус). 11)Тригонометрические функции, их графики и свойства (тангенс, котангенс). 12) Обратные тригонометрические функции, их графики и свойства (арксинус, арккосинус, арктангенс, арккотангенс). 13)Простейшие тригонометрические уравнения. 14)Решение простейших тригонометрических уравнений. 15)Решение тригонометрических уравнений различными методами. 16)Решение систем тригонометрических уравнений. 17)Решение тригонометрических неравенств. 18)Решение тригонометрических уравнений, систем тригонометрических	**2** **9** **2** **2** **2** **2** **2** **2** **2** **2** **2**	

	уравнений, тригонометрических неравенств. 19)Тригонометрическая форма комплексного числа. 20)Действия с комплексными числами в тригонометрической форме. **Самостоятельная работа по теме «Тригонометрические функции. Решение тригонометрических уравнений».**	**2** **2** **11**	
Тема 4. Корни, степени		**14**	
	1)Степени с рациональным показателем и их свойства. 2)Преобразование выражений содержащих степени с рациональным показателем. 3)Корни натуральной степени из числа и их свойства. Преобразование выражений содержащих корни натуральной степени. 4)Преобразование выражений содержащих корни и степени. 5)Решение иррациональных уравнений. 6)Решение иррациональных неравенств. 7)Решение иррациональных уравнений и неравенств. **Самостоятельная работа по теме «Степени и корни»**	**2** **2** **2** **2** **2** **2** **2** **7**	**2**
Тема 5. Показательная и логарифмическая функции.		**18**	

	1)Показательная функция. Ее свойства и графики. 2)Логарифм числа, свойства логарифмов. 3)Преобразование логарифмических выражений. 4)Логарифмическая функция, ее свойства и график. 5)Решение показательных уравнений. 6)Решение логарифмических уравнений. 7)Решение систем показательных и логарифмических уравнений. 8)Решение показательных неравенств. 9)Решение логарифмических неравенств. **Самостоятельная работа по теме «Показательная и логарифмическая функции»**	**2** **2** **2** **2** **2** **2** **2** **2** **2** **9**	**2**
Тема 6. Производная		**40**	
	1)Функции, их свойства и графики (повторение). 2)Сложная функция. 3)Построение графиков функций с помощью преобразований. 4)Последовательность. Предел последовательности. 5)Предел функции. Вычисление пределов функций. 6)Первый и второй замечательные пределы. 7)Непрерывность функции.	**2** **2** **2** **2** **2** **2**	**2**

	Виды точек разрыва. 8)Задачи, приводящие к понятию производной. Понятие производной. Основные правила дифференцирования. 9)Вычисление производных. 10)Производная сложной функции. 11)Производная тригонометрических и обратных тригонометрических функций. 12)Производная логарифмической и показательной функций. 13) Геометрический смысл производной. Касательная к графику функции. 14) Механический смысл производной. 15) Вторая производная, ее геометрический и физический смысл. 16) Производная в физике и технике. 17) Дифференциал функции. 18)Признак возрастания (убывания) функции. Экстремум функции. Выпуклость (вогнутость), точки перегиба. 19) Применение производной к исследованию функции. Построение графика функции по результатам исследования. 20) Наибольшее и наименьшее значения функции.	**2** **2** **2** **2** **2** **2** **2** **2** **2** **2** **2** **2** **2**	

	Самостоятельная работа по теме «Производная»	**20**	
Тема 7. Прямые и плоскости в пространстве		**20**	
	1)Аксиомы стереометрии. Следствия из аксиом. 2)Взаимное расположение прямых в пространстве. 3)Параллельность прямых и плоскостей. Параллельность плоскостей. 4)Перпендикулярность прямых. Перпендикулярность прямых и плоскостей. 5)Перпендикуляр и наклонная. Теорема о трех перпендикулярах 6)Угол между прямой и плоскостью. Угол между плоскостями. 7)Перпендикулярность плоскостей. 8)Решение задач на взаимно расположение прямых, прямых и плоскостей, плоскостей в пространстве. 9)Параллелепипед, тетраэдр. 10)Решение задач на параллелепипед и тетраэдр. **Самостоятельная работа по теме «Прямые и плоскости в пространстве»**	**2** **2** **2** **2** **2** **2** **2** **2** **2** **2** **10**	**2**
Тема 8. Координаты и векторы		**6**	
	1)Декартова система координат. Расстояние между точками.	**2**	**2**

	Координаты середины отрезка. 2)Векторы. Действия над векторами. 3)Использование координат и векторов при решении математических и прикладных задач. **Самостоятельная работа по теме «Координаты и векторы»**	 **2** **2** **3**	
Тема 9. Многогранники		**20**	
	1)Многогранники. 2)Призма. 3)Сечение. Построение сечений призмы. 4)Решение задач по теме призма. 5)Пирамида. Правильная пирамида. 6)Решение задач по теме «Пирамида». 7)Усеченная пирамида. Решение задач по теме «Усеченная пирамида». 8) Построение сечений пирамиды. 9)Правильные многогранники. 10)Решение задач по теме «Правильные многогранники» **Самостоятельная работа по теме «Многогранники»**	**2** **2** **2** **2** **2** **2** **2** **2** **2** **2** **10**	**2**
Тема 10.Тела вращения и поверхности тел вращения		**8**	
	1)Цилиндр. 2)Конус. 3) Решение задач 4)Шар и сфера. 5)Решение задач по теме «Тела вращения». **Самостоятельная работа**	**2** **2** **2** **2** **2** **4**	**2**

	по теме «Тела вращения и поверхности тел вращения»		
Тема 11. Элементы комбинаторики, теории вероятности		**12**	
	1)Основные понятия комбинаторики 2)Задачи на подсчет числа перестановок, размещений, сочетаний. 3)Свойства биноминальных коэффициентов. Треугольник Паскаля. Формула бинома Ньютона. 4)Случайное событие и его вероятность. 5)Сложение и умножение вероятностей 6)Решение задач **Самостоятельная работа по теме «Элементы комбинаторики, теории вероятности и математической статистики»**	**2** **2** **2** **2** **2** **2** **6**	**2**
Тема 12.Первообразная и интеграл.		**18**	
	1)Первообразная. 2)Неопределенный интеграл и его свойства. Вычисление неопределенных интегралов. 3)Интегрирование подстановкой. 4)Интегрирование по частям. 5)Нахождение неопределенных интегралов различными способами. 6)Задачи, приводящие к понятию определенного	**2** **2** **2** **2** **2** **2**	**2**

	интеграла. Свойства определенных интегралов и их вычисление. 7)Вычисление определенных интегралов. 8)Вычисление площадей фигур с помощью определенного интеграла. 9)Решение задач физики с помощью определенного интеграла. **Самостоятельная работа по теме «Первообразная и интеграл»**	**2** **2** **2** **9**	
Тема 13. Измерения в геометрии		**18**	
	1)Объем и его измерение. Интегральная формула Объема. 2)Формула объема куба, прямоугольного параллелепипеда. Решение задач. 3)Формула объема призмы. Решение задач 4)Формула объема цилиндра. Решение задач. 5)Формула объема пирамиды. Решение задач. 6)Формула объема конуса. Решение задач. 7)Формулы объема шара и площади сферы. Решение задач. 8)Решение задач на комбинации многогранников, фигур	**2** **2** **2** **2** **2** **2** **2**	**2**

	вращения, сферы. 9)Решение задач на нахождение объемов повышенного уровня сложности. **Самостоятельная работа по теме: «Измерения в геометрии»**	**2** **2** **9**	
Тема 14. Элементы теории вероятностей и математической статистики (продолжение)		**8**	
	1)Дискретная случайная величина, закон ее распределения. 2)Числовые характеристики дискретной случайной величины. 3)Представление данных (таблицы, диаграммы, графики). Генеральная совокупность, выборка, среднее арифметическое, медиана, мода. 4)Решение практических задач с применением вероятностных методов. **Самостоятельная работа по теме «Элементы теории вероятностей и математической статистики»**	**2** **2** **2** **2** **4**	**2**

Всего 351 часов

Аудиторной нагрузки 234 часов

Самостоятельной работы 117 часов

Промежуточный контроль в форме экзамена

Раздел 1. Развитие понятия о числе

Введение. 1.1. Действительные числа и величины. Приближени действительных чисел. Погрешности.

В результате изучения темы студент должен:
уметь:
- определять границы приближенных значений;
- представлять числа в стандартном виде;
- оценивать абсолютную погрешность приближенных значений;
- оценивать относительную погрешность приближенных значений:

знать:
- значение математики в науке, экономике и практической деятельности;
- цели и задачи изучения математики в учреждениях среднего профессионального образования;
- понятие действительных чисел;
- понятие абсолютной и относительной погрешности;
- определение стандартного вида числа.

Математика в науке и практической деятельности

Математика – наука о количественных отношениях и пространственных формах действительного мира.

Роль математики в современной науке постоянно возрастает. Это связанно с тем, что без разработки и использования математических наук было бы, например, невозможно ни освоение космоса, ни создание электронно-вычислительных машин, нашедших применение в самых различных областях человеческой деятельности.

Математика представляет собой основу фундаментальных исследований в естественных и гуманитарных науках. Математические идеи и методы проникают в управление весьма сложными и большими системами разной природы: полетами космических кораблей, отраслями промышленности, работой обширных транспортных систем и других видов деятельности. В математике возникают новые теории в ответ на запросы практики и внутреннего развития самой математики. Приложения различных областей математики стали неотъемлемой частью науки, в том числе: физики, химии, геологии, биологии, медицины, лингвистики, экономики, социологии и др.

Математика играет важную роль в естественнонаучных, инженерно-технических и гуманитарных исследованиях. Она стала для многих отраслей знаний не только орудием количественного расчета, но также методом точного исследования и средством предельно четкой формулировки понятий и проблем. Без современной математики с ее развитым логическим и вычислительным аппаратом был бы невозможен прогресс в различных областях человеческой деятельности.

Математика является не только мощным средством решения прикладных задач и универсальным языком науки, но также и элементом общей культуры.

Действительно, математика проникает во все сферы человеческой деятельности. Трудно назвать хотя бы один раздел науки или какую-либо профессиональную область, где не присутствовала бы математика или её методы. Поэтому необходимость математического образования для успешного формирования личности не вызывает сомнений.

Цели и задачи изучения математики в учреждениях среднего профессионального образования:

- формирование представлений о математике как универсальном языке науки, средстве моделирования явлений и процессов, об идеях и методах математики;
- развитие логического мышления, пространственного воображения, алгоритмической культуры, критичности мышления на уровне, необходимом для будущей профессиональной деятельности, для продолжения образования и самообразования;
- овладение математическими знаниями и умениями, необходимыми в повседневной жизни, для изучения смежных естественнонаучных дисциплин на базовом уровне и дисциплин профессионального цикла, для получения образования в областях, не требующих углублённой математической подготовки;
- воспитание средствами математики культуры личности, понимания значимости математики для научно-технического прогресса, отношения к математике как к части общечеловеческой культуры через знакомство с историей развития математики, эволюцией математических идей.

Действительные числа

В курсе математики встречаются различные числа.

1,2,3, …9 – натуральные числа (N).

Z – целые числа (N, -N, 0)

Q – рациональные (целые и дробные)

Є – знак принадлежности (-2 Є N)

7/4 = 0,7500   П = 3,141592…. –иррациональные числа

Иррациональные и рациональные числа составляют множество действительных чисел.

Приближение действительных чисел конечными десятичными дробями

На практике при определении значений величин можно встретить их приближенные значения. Приближенное значение величины называется приближенным числом, а первоначальное значение величины - точным числом. Приближенные значения обычно записываются так, чтобы по записи можно было определить точность приближения.

Например, на рулоне обоев написано, что его длина равна 18 ±0,3 м. эта запись означает, что длина рулона равна 18 м. с точностью до 0,3 м., т. е. точное значение длины рулона может отличаться от приближенного значения, равного 18 м., не более, чем на 0,3 м.

$$18 - 0{,}3 \leq l \leq 18+0{,}3$$

$$17{,}7 \leq L \leq 18{,}3$$

Погрешности приближенных вычислений

Погрешность бывает абсолютная и относительная.

Абсолютной погрешностью приближенного значения называется модуль разности точного и приближенного значений.

$2{,}25 \approx 2{,}3$

$|2{,}25 - 2{,}3| = |-0{,}5| = 0{,}5$

Относительной погрешностью приближенного значения называется отношение абсолютной погрешности к модулю приближенного значения. Ее выражают в %.

Пример. Округлим дробь 14,7 до целых и найдем относительную погрешность приближенного значения.

$14{,}7 \approx 15$

$$\frac{|14{,}7-15|}{15} = \frac{|-0{,}5|}{15} = \frac{0{,}3}{15} = 0{,}02 = 2\%$$

Стандартный вид числа

Стандартный вид имеет число, у которого в целой части одно число, отличное от нуля.

Например, 2,3; 1,256.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯЛЬНОЙ РАБОТЫ

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Охарактеризуйте значение математики в науке, экономике и практической деятельности.
2. Охарактеризуйте цели и задачи изучения математики в учреждении среднего профессионального образования.
3. Какие числа называются натуральными?
4. Какие числа называются рациональными?
5. Какие числа называются иррациональными?
6. Какие числа называются действительными?
7. Какие бывают погрешности?
8. Что такое абсолютная погрешность?
9. Что такое относительная погрешность?
10. Что такое стандартный вид числа?

Практические задания:

Задание на «3»: Оцените абсолютную погрешность приближенного значения следующих чисел:

1) 5,56 с точностью до десятых;
2) 125,9 с точностью до целых

Задание на «4»: Оцените относительную погрешность приближенного значения следующих чисел:

1) 0,145 с точностью до сотых;
2) 2465,9 с точностью до целых

Задание на «5»:

1.Оцените абсолютную и относительную погрешность приближенного значения следующих чисел:

1) 0,145 с точностью до сотых;
2) 2465,9 с точностью до целых

1. Представьте числа в стандартном виде:
   1) 58,2;
   2) 0,0025;
   3) 1,2;

4) 12578,25;
5) 105,2789.

1.2. Вычисления с приближенными данными.

В результате изучения темы студент должен:
уметь:
- вычислять приближенное значение суммы приближенных значений;
- вычислять приближенное значение разности приближенных значений;
- вычислять приближенное значение произведения приближенных значений;
- вычислять приближенное значение частного приближенных значений;

знать:
- методику вычисления приближенного значения суммы приближенных значений;
- методику вычисления приближенного значения разности приближенных значений;
- методику вычисления приближенного значения произведения приближенных значений;
- методику вычисления приближенного значения частного приближенных значений.

Вычисления с приближенными данными.

Вычисления с приближенными данными постоянно используются в практических задачах, при этом результат вычислений обычно округляют. Рассмотрим, как производятся эти округления при сложении, вычитании, умножении и делении приближенных значений.

1. Найдем приближенное значение суммы $x + y$:
   $x \approx 7{,}63$ с точностью до 0,01

   $y \approx 9{,}2$ с точностью до 0,1

   $x + y \approx 7{,}63 + 9{,}2 \approx 16{,}83 \approx 16{,}8$

2. Найдем приближенное значение разности $x - y$:

   $x \approx 6{,}784$

   $y \approx 4{,}91$

   $x - y \approx 1{,}874 \approx 1{,}87$

2. Найдем приближенное значение произведения $x * y$:
   $x \approx 0{,}86$

   $y \approx 27{,}1$

   $x * y \approx 23{,}306$

$0,86 = 8,6*10^{-1}$ $27,1 = 2,7*10$ $23,306 = 2,3306 * 10^{-1}$

$x * y \approx 2,3 * 10 \approx 23$

4. Найдем приближенное значение частного x / y:

$x \approx 563,2$

$y \approx 32$

$x / y \approx 17,6$

$563,2 \approx 5,632*10^{2}$ $32 \approx 3,2*10^{-1}$ $17,6 \approx 1,76*10$

$x / y \approx 1,8*10 = 18$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯЛЬНОЙ РАБОТЫ

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Как найти приближенной значение суммы приближенных значений?
2. Как найти приближенной значение разности приближенных значений?
3. Как найти приближенной значение произведения приближенных значений?
4. Как найти приближенной значение частного приближенных значений?

Практические задания:

Задание на «3»: Найдите сумму и разность приближенных значений:

1) A=45,651, B=13,12
2) A=48,4, B=20,47

Задание на «4»: Найдите сумму, разность, произведение и частное приближенных значений:

1) A=7,41, B=5,146
2) A=78,1, B=45,458

Задание на «5»:

1) Вычислить $X = \frac{a+в}{c}$, если известно, что а = 7,15; в = 1,651; с= 3,3.

2) Вычислить $A = \frac{a*в*c}{к*p}$, где а = 31,25; в = 12; с = 7,81; к = 158; р = 43, 05.

1.3. Комплексные числа.

В результате изучения темы студент должен:
уметь:
- выполнять действия над комплексными числами.
знать:
- понятие комплексных чисел;
- формулы действий над комплексными числами.

Комплексным числом называется выражение вида а + в і, где а и в – действительные числа, і – некоторый символ.

Примеры: 2 + 3 і,   2 + (-4) і,   0 + 5 і,   2 + 0 і.

Действия над комплексными числами:

1) Сумма комплексных чисел

Суммой двух комплексных чисел $а_1 + в_1і$ и $а_2 + в_2і$ называется комплексное число
$(а_1 + а_2) + (в_1 + в_2)і$, т. е.

$$(а_1 + в_1і)+(а_2 + в_2і) = (а_1 + а_2) + (в_1 + в_2)і$$

2) Произведение комплексных чисел

Произведением двух комплексных чисел $а_1 + в_1і$ и $а_2 + в_2і$ называется комплексное число $(а_1а_2 – в_1в_2) + (а_1в_2 + а_2 в_1)$ і, т. е.

$$(а_1 + в_1і)+(и_2 + в_2і) = (а_1а_2 – в_1в_2) + (а_1в_2 + а_2 в_1)$$

3) Равенство комплексных чисел

Два комплексных числа $а_1 + в_1і$ и $а_2 + в_2і$ называются равными, если $а_1 = а_2$ и $в_1= в_2$.

4) Вычитание комплексных чисел

Разностью комплексных чисел а + вi и с + di называется число х + уi, которое удовлетворяет равенству

$$(с + di) + (х + уi) = а + вi$$

5) Деление комплексных чисел

Частным комплексных чисел а + вi и с + di называется комплексное число х + уi, которое удовлетворяет равенству

$$(с + di)*(х + уi) = а + вi$$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Написание рефератов по комплексным числам.

Раздел 2. Неравенства. Системы уравнений (повторение)

2.1. Линейные неравенства с одной переменной (повторение)

В результате изучения темы студент должен:
уметь:
- решать линейные неравенства с одной переменной.
знать:
- понятие линейного неравенства с одной переменной.
- свойства линейных неравенств с одной переменной.

Линейные неравенства с одной переменной

Неравенства вида ах ≤в, ах ≥в, где х – независимая переменная, а и в – некоторые числа, называют линейным неравенством с одной переменной.

Решением неравенства с одной переменной называется значение переменной, которое обращает его в верное числовое неравенство.

Решить неравенство – значит найти все его решения или доказать, что решений нет.

<u>Свойства:</u>

1) Если из одной части неравенства перенести в другую слагаемое с противоположным знаком, то получится неравенство, равносильное данному;
2) Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же положительное число, то получится равносильное ему неравенство; Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же отрицательное число, изменив при этом знак неравенства на противоположный, то получится равносильное ему неравенство.

Пример 1.

$15x – 23(x + 1) > 2x + 11$

$15x-23x-23>2x+11$

$15x-23x-2x>11+23$

$-10x>34$

$x<-3,4$

Ответ: $(-\infty;-3,4)$

Пример 2.

$$x-\frac{2x+3}{2}\le\frac{x-1}{4}$$

$4x-2(2x+3)\le x-1$

$4x-4x-6\le x-1$

$-x\le -1+6$

$-x\le 5$

$x\ge -5$

Ответ: $[-5;+\infty)$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Что называют линейным неравенством с одной переменной?
2. Что называют решением линейного неравенства с одной переменной?
3. Что значит решить линейное неравенство с одной переменной?
4. Какими свойствами обладают линейные неравенства с одной переменной?

Практические задания:

Решить неравенства:

Задание на «3»:

1) $3-2x<12-5x$

2) 2x-3>7(1+x)
3) 2(1-x)>5-3x

Задание на «4»:

1) $\frac{2x-5}{x-2} \geq 0$

2) $\frac{x+3}{7-x} \leq 0$

3) $0{,}2x^2 - 0{,}2(x-6)(x+6) > 3{,}6x;$

Задание на «5»:

1) $\frac{3-0{,}5x}{4-\frac{2}{3}x} \geq 0;$

2) $\frac{x-1}{2} - 1 + \frac{2x-1}{6} \geq x;$

3) $\frac{3x+5}{4} - 1 \leq \frac{x-2}{3} + x$

Тренажер по решению линейных неравенств

Задание:

1. Решить неравенства:

   1. x + 4 ›2 – 3x;
   2. $\frac{4-3x}{3} < \frac{2x-1}{4} - \frac{5x-2}{6}$
   3. $(x-3)^2 - 11 \geq (x+2)^2$
   4. $(2x-1)^2 - 8x < (3-2x)^2$
   5. $3(x-2) \geq 4x - 9$
   6. $\frac{3x}{2} - \frac{3}{5} < 4x - 3$
   7. $\frac{37-2x}{3} + x \leq \frac{3x-8}{4} - 9$
   8. $\frac{7-6x}{2} + 10x < \frac{20x+1}{3} + 2$
   9. $\frac{5-x}{8} + \frac{3-2x}{4} \geq 0$
   10. $(x-1)^2 - 5 \leq (x+4)^2$
   11. $4(x-1) \leq 2 + 7x$

2. Решите неравенства:

1) $4(2-3x) - (5-x) > 11 - x;$

2) $2(3-x) - 3(2+x) \leq x;$

3) $1 > 1{,}5(4-2x)+0{,}5(2-6x);$

4) $2{,}5(2-x)-1{,}5(x-4) \le 3-x;$

5) $x-2 \ge 4{,}7(x-2)-2{,}7(x-1);$

6) $3{,}2(x-6)-1{,}2x \le 3(x-8)$

7) $x(x-4)-x^2 > 12-6x;$

8) $(2x-1)2x-5x \le 4x^2-x;$

9) $5x^2-5x(x+4) \ge 100;$

10) $6x(x-1)-2x(3x-2) \le 6;$

11) $0{,}2x^2-0{,}2(x-6)(x+6) > 3{,}6x;$

12) $(2x-5)^2-0{,}5x \le (2x-1)(2x+1)-15;$

13) $(12x-1)(3x+1) \le 1+(6x+2)^2;$

14) $(4x-1)^2 \ge (2x+3)(8x-1);$

15) $4x(1-3x)-(x-12x^2) \le 43;$

16) $3x^2-2x-3x(x-6) \ge -2;$

17) $2x(5x+2)-x(10x+3) \le 14;$

18) $x(x-1)-(x^2+x) \le 34;$

19) $\frac{2x}{5} \ge 1;$ 20) $\frac{6x}{7} \ge 0;$ 21) $\frac{3x-1}{4} \ge 2;$ 22) $\frac{12-7x}{42} \ge 0;$

23) $\frac{1}{3}(x+15) \ge 4;$ 24) $6 \le \frac{2}{57}(x+4);$ 25) $\frac{x}{2}+\frac{x}{3} < 15;$ 26) $\frac{3x}{2}-\frac{x}{3} \ge 2;$

27) $\frac{x}{4}-\frac{x}{2} > -3;$ 28) $x+\frac{x}{2} \ge 3;$ 29) $\frac{2x}{5}-x \le 1;$

30) $\frac{3x}{4}-2x < 0;$

31) $\frac{13x-1}{2} \le 4x;$ 32) $\frac{5-2x}{4} \ge 2x;$ 33) $\frac{x}{4}-\frac{x}{5} \le 2;$ 34) $\frac{2x}{5}-\frac{x}{2} \ge 1;$

35) $\frac{3+x}{4}+\frac{2-x}{3} \le 0;$ 36) $\frac{4-x}{5}-5x \ge 0;$ 37) $x-\frac{2x-1}{4} \ge 1;$

38) $x-\frac{x-3}{5}+\frac{2x-1}{10} \le 4;$ 39) $\frac{x-1}{2}-1+\frac{2x-1}{6} \ge x;$ 40) $x-\frac{x-1}{2}-\frac{x+3}{4} \ge 2;$

41) $\dfrac{2x-1}{2}-\dfrac{3x-3}{5}>x;$ 42) $x-\dfrac{2x+3}{2}\le\dfrac{x-1}{4};$ 43) $\dfrac{5x-1}{5}+\dfrac{x+1}{2}\le x;$

3. Решите неравенства:

1) $\dfrac{x-1}{4}-1\ge\dfrac{x+1}{3}+8;$

2) $\dfrac{3x-1}{2}-\dfrac{x+1}{4}>0;$

3) $\dfrac{1-2x}{4}-2\le\dfrac{1-5x}{8};$

4) $\dfrac{5x}{6}-\dfrac{3x-1}{3}+\dfrac{2x-1}{2}\le 1;$

5) $\dfrac{x-0{,}5}{4}+\dfrac{x-0{,}25}{4}+\dfrac{x-0{,}125}{8}\le 0;$

6) $\dfrac{5-x}{3}-\dfrac{1-x}{2}\ge 1;$

7) $(x+1)(x-1)-(x^2-3x)\le 14;$

8) $\dfrac{2}{3}(6x+4)-\dfrac{1}{6}(12x-5)\le 4-6x;$

9) $(3x+1)(x-1)-3x^2\ge 6x+7;$

10) $15x^2-(5x-2)(3x+1)\le 7x-8;$

2.2. Квадратные неравенства (повторение)

Неравенство вида ах^2 + вх + с >0, где а>0, называется квадратным.

Методы решения квадратных неравенств**:**

1)Графический: а) найти дискриминант;
б) изобразить графически параболу

а>0 а<0

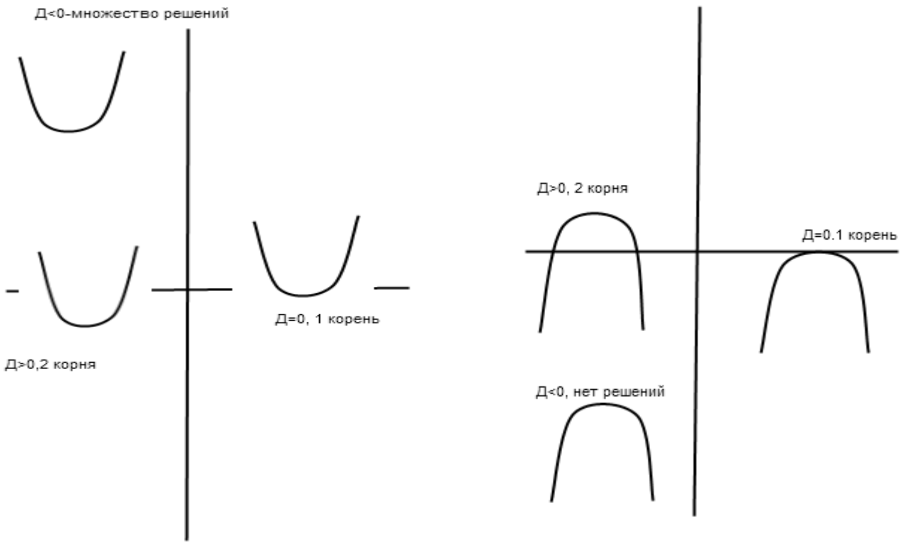


Рис. 1.

2)Метод интервалов
Пример.

$2x^2 + x - 3 > 0$

$2x^2 + x - 3 = 0$

Д=1+24=25, Д>0,2 корня

$x_1=1$, $x_2=-1{,}5$

Ответ: (-∞;-1,5)U(1; ∞)

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Что называют квадратным неравенством?
2. Методы решения квадратных неравенств?
3. Охарактеризуйте графический метод решения квадратных неравенств.

4. Охарактеризуйте метод интервалов.

Практические задания:

Задание на «3». Решить квадратные неравенства:

1) $2x^2+4x+3<0$
2) $2x^2+4x-6>0$

Задание на «4». Решить квадратные неравенства:

1) $-3x^2+2x+5\le 0$

2) $25x^2-30x+9>0$

3) $x^2+(x+1)^2>0$

Задание на «5»: 1. Решить квадратные неравенства методом интервалов:

1) $\frac{(x-1)(x^2-4x+3)}{4-x^2}\ge 0$

2) $-2x^2-3x+5\ge 0$

2. Решить квадратное неравенство графическим методом: $\frac{x^2+2x-15}{x+1}<0$

Тренажер по решению квадратных неравенств

Задание:

1.Решить квадратные неравенства графическим методом:

1) $2x^2+3x-2>0$
2) $2x^2-x-3\le 0$
3) $-2x^2+11x-14>0$
4) $-3x^2+5x-12>0$
5) $9x^2+6x+1>0$
6) $x^4-5x^2+4<0$

2. Решить квадратные неравенства методом интервалов:

1) $-x^2+6x-9>0$
2) $x^2+8x+16<0$
3) $-x^2+10x-25<0$
4) $2x^2-5x+7>0$
5) $-3x^2+2x-2>0$

3. Решить квадратные неравенства.

1) $(x + 1)(x - 2) > 0$;
2) $x(3 - x) > 0$;
3) $(x - 4)(1 - 3x) < 0$;
4) $(1 - x)(6 - x) < 0$.

5) $(x - 1)(x + 2) > x + 2$;
6) $(x + 4)(x + 6) < 6(x + 6)$;

4. Решить квадратные неравенства:

1) $17x - 6x^2 < 12$;

2) $0{,}5x^2 - 12 \le 0$;

3) $4x^2 + 1 \le -4x$;

4) $3x^2 - 4x < 7$.

5) $20 < -4x^2$;

6) $20x - 25x^2 < 4$;

7) $x - 3x^2 \ge -24$;

8) $-3x^2 \ge 4x$.

9) $-7x^2 - 12x - 5 > 0$

10) $x^2 + 3x + 2 \ge 0$

11) $x^2 - 100 \le 0$

2.3. Системы линейных уравнений и методы их решения (повторение)

Понятие системы линейных уравнений

Даны два уравнения

x + y = 12   x – y = 2

Чтобы найти общие решения этих уравнений, требуется решить систему уравнений. Систему уравнений принято записывать с помощью фигурной скобки.

$$\begin{cases} x + y = 12 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

Пара значений переменных x = 7, y = 5 служит решением каждого уравнения системы, так как оба равенства 7+5=12 и 7-5=2 являются верными.

Такую пару чисел называют решением системы.

Решением системы называется пара значений переменных, обращающих каждое уравнение системы в верное равенство.

Решить систему неравенств – научит найти все е решения или доказать, что решений нет.

Решение систем линейных уравнений способом подстановки

При решении систем линейных уравнений способом подстановки, в каком – либо из уравнений системы одно из неизвестных выражается через другое. Полученное выражение подставляется в оставшееся уравнение, после решения которого находится одно неизвестное. Второе неизвестное может быть найдено из любого уравнения системы.

Пример 1. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x + y = 7 \\ -5x + 2y = 3 \end{cases}$$

y = 7 – 3x

-5x + 2 (7 – 3x) = 3

x = 1

y = 4

Ответ: x = 1 y = 4   (1;4)

Пример 2. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x + 2y = -1 \\ 3x - 4y = 17 \end{cases}$$

x = -1 – 2y

3 (-1 – 2y) – 4y = 17

y = -2

x = 3

Ответ: (3;-2)

Решение систем линейных уравнений способом сложения

При решении систем способом сложения переходим от данной системы к другой, равносильной ей системе, в которой оно из уравнений содержит только одну переменную.

<u>Пример 3.</u> Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x + 3y = -5 \\ x - 3y = 38 \end{cases}$$

3x = 33

x = 11

11- 3y = 38

-3y = 27

y = -9

Ответ: (11;-9)

<u>*Пример 4.*</u> Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 2\tilde{o} + \acute{o} = 6 /* 2 \\ 3\tilde{o} - 2\acute{o} = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x + 2y = 12 \\ 3x - 2y = -5 \end{cases}$$

7x = 7

x = 1

2*1+y = 6

2 + y = 6

y = 4

Ответ: (1;4)

Решение систем линейных уравнений графическим способом

Для того, чтобы решить систему линейных уравнений с двумя переменными, можно использовать графики уравнений.

$$\begin{cases} 2x+2y=5 \\ 3x-y=-9 \end{cases}$$

2x + 2y = 5

y = 2,5 – x

если x = 0, то y = 2,5 (0; 2,5)

если x = 1, то y = 1,5 (1; 1,5)

3x – y = -9

y = 9 + 3x

если x = -1, то y = 6 (-1; 6)

если x = -2, то y = 3 (-2; 3)

Ответ: А (-1,5;4) – решение системы

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Что называют системой линейных уравнений?
2. Как решить систему линейных уравнений способом подстановки?
3. Как решить систему линейных уравнений способом сложения?
4. Как решить систему линейных уравнений графическим способом?

Практические задания:

Задание на «3». Решить системы линейных уравнений:

1) $\begin{cases} x-y=7 \\ x+y=3 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y-2x=4 \\ 7x-y=1 \end{cases}$

Задание на «4».

а)Решить систему линейных уравнений способом подстановки: $\begin{cases} x+2y=4 \\ -2x+5y=10 \end{cases}$

б)Решить систему линейных уравнений способом сложения: $\begin{cases} 2x+y=12 \\ 7x-2y=31 \end{cases}$

Задание на «5»:

а)Решить систему линейных уравнений способом подстановки: $\begin{cases} x-2y+9=0 \\ 3x-2y-25=0 \end{cases}$

б)Решить систему линейных уравнений способом сложения: $\begin{cases} y-x=12 \\ 11x+5y=156 \end{cases}$

в)Решить систему линейных уравнений графическим способом: $\begin{cases} y-2x+4=0 \\ 2x-y-4=0 \end{cases}$

Тренажер по решению систем линейных уравнений

<u>**Задание**</u>:

1. Решить системы уравнений методом подстановки.

1) $\begin{cases} 3x+y=7 \\ -5x+2y=3 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x+y=12 \\ 7x-2y=31 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y-2x=4 \\ 7x-y=1 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 8y-x=7 \\ 2x-21y=2 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 2x=y+0{,}5 \\ 3x-5y=13 \end{cases}$

6) $\begin{cases} 2x+5y=0 \\ -8x+15y=7 \end{cases}$

7) $\begin{cases} 5x-3y=0 \\ 3x+4y=29 \end{cases}$ 8) $\begin{cases} 4x+3y=14 \\ 5x-3y=25 \end{cases}$

9) $\begin{cases} 10x+7y=-2 \\ 2x-22=5y \end{cases}$

10) $\begin{cases} 3x+4y=0 \\ 2x+3y=1 \end{cases}$ 11) $\begin{cases} 7x+2y=0 \\ 4y+9x=10 \end{cases}$

12) $\begin{cases} 5x+6y=-20 \\ 9y+2x=25 \end{cases}$

13) $\begin{cases} 3x+1=8y \\ 11y-3x=-11 \end{cases}$ 14) $\begin{cases} 7x+6y=6 \\ 3x+4y=9 \end{cases}$

15) $\begin{cases} 5x-4y=16 \\ x-2y=6 \end{cases}$

16) $\begin{cases} 6(x+y)-y=-1 \\ 7(y+4)-(y+2)=0 \end{cases}$ 17) $\begin{cases} 3(x-5)-1=6-2x \\ 3(x-y)-7y=-4 \end{cases}$

18) $\begin{cases} 2(3x-2y)+1=7x \\ 12(x+y)-15=7x+12y \end{cases}$ 19) $\begin{cases} 3(x+y)-7=12x+y \\ 6(y-2x)-1=-45x \end{cases}$

20) $\begin{cases} 5(x+2y)-3=3x+5 \\ 4(x-3y)-50=-33y \end{cases}$ 21) $\begin{cases} 4x+1=5(x-3y)-6 \\ 3(x+6y)+4=9y+19 \end{cases}$

22) $\begin{cases} 5y+8(x-3y)=7x-12 \\ 9x+3(x-9y)=11y+46 \end{cases}$ 23) $\begin{cases} -2(x-y)+16=3(y+7 \\ 6x-(x-5)=-8-(y+1) \end{cases}$

24) $\begin{cases} \frac{x}{3}-\frac{y}{2}=-4 \\ \frac{x}{2}+\frac{y}{4}=-2 \end{cases}$ 25) $\begin{cases} \frac{x}{6}-2y=6 \\ -3x+\frac{y}{2}=-37 \end{cases}$ 26) $\begin{cases} \frac{2x}{5}+\frac{y}{3}=1 \\ \frac{x}{10}-\frac{7y}{6}=4 \end{cases}$

27) $\begin{cases} 7x-\frac{3y}{5}=-4 \\ x+\frac{2y}{5}=-3 \end{cases}$ 28) $\begin{cases} \frac{y}{4}-\frac{x}{5}=6 \\ \frac{x}{15}+\frac{y}{12}=0 \end{cases}$ 29) $\begin{cases} \frac{6x}{5}+\frac{y}{15}=2{,}3 \\ \frac{x}{10}-\frac{2y}{3}=1{,}2 \end{cases}$

2. Решить системы уравнений методом сложения.

1) $\begin{cases} 40x+3y=10 \\ 20x-7y=5 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5x-2y=12 \\ 15x-3y=-3 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 33x+42y=10 \\ 9x+14y=4 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 13x-12y=14 \\ 11x-4=18y \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 10x-9y=8 \\ 21y+15x=0{,}5 \end{cases}$

6) $\begin{cases} 9y+8x=-2 \\ 5y=-4x-11 \end{cases}$

7) $\begin{cases} 12x-7y=2 \\ 4x-5y=6 \end{cases}$ 8) $\begin{cases} 7x+2y=1 \\ 17x+6y=-9 \end{cases}$

9) $\begin{cases} 6x=25y+1 \\ 5x-16y=-4 \end{cases}$

10) $\begin{cases} 4x+7y=90 \\ 5x-6y=20 \end{cases}$ 11) $\begin{cases} 0{,}75x+20y=95 \\ 0{,}32x-25y=7 \end{cases}$

12) $\begin{cases} 0{,}5x-0{,}6y=0 \\ 0{,}4x+1{,}7y=10{,}9 \end{cases}$

13) $\begin{cases} 10x=4{,}6+3y \\ 4y+3{,}2=6x \end{cases}$ 14) $\begin{cases} -3x+10y-0{,}1=0 \\ 15y+4x-2{,}7=0 \end{cases}$

15) $\begin{cases} 5(x+2y)-3=x+5 \\ y+4(x-3y)=50 \end{cases}$

16) $\begin{cases} \frac{1}{3}x+\frac{1}{4}y-2=0 \\ 5x-y=11 \end{cases}$ 17) $\begin{cases} 0{,}5x+0{,}2y=7 \\ \frac{1}{3}x-\frac{1}{10}y=0 \end{cases}$

18) $\begin{cases} \frac{1}{5}x-\frac{1}{6}y=0 \\ 5x-4y=2 \end{cases}$

19) $\begin{cases} \frac{1}{6}x - \frac{1}{3}y = -3 \\ 0{,}2x + 0{,}1y = 3{,}9 \end{cases}$ 20) $\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{4} - 5 = 0 \\ 2x - y = 10 \end{cases}$

21) $\begin{cases} \frac{2x}{3} - \frac{y}{2} = 0 \\ 3(x-1) - 9 = 1 - y \end{cases}$

22) $\begin{cases} 2x - 7y = 4 \\ \frac{x}{6} - \frac{y}{6} = 0 \end{cases}$ 23) $\begin{cases} \frac{5x}{6} - y = -\frac{5}{6} \\ \frac{2x}{3} + 3y = -\frac{2}{3} \end{cases}$

24) $\begin{cases} \frac{1}{3}x - \frac{1}{12}y = 4 \\ 6x + 5y = 150 \end{cases}$

25) $\begin{cases} \frac{1}{3}x - \frac{1}{8}y = 3 \\ 7y + 9x = -2 \end{cases}$ 26) $\begin{cases} \frac{x}{4} + \frac{y}{6} = 1 \\ 2x + 3y = -12 \end{cases}$

27) $\begin{cases} 4x - 5y - 10 = 0 \\ \frac{x}{5} - \frac{y}{3} + \frac{1}{3} = 0 \end{cases}$

3. Решить системы уравнений графическим методом:

1) $\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + 3y = 9 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ -2x + 5y = 10 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + y = 0 \\ -3x + 4y = 14 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ 3x + 10y = -12 \end{cases}$

5) $\begin{cases} x - 2y = 6 \\ 3x + 2y = -6 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x + 3y = -5 \end{cases}$ 7) $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 3x - y = -9 \end{cases}$

8) $\begin{cases} y + 3x = 0 \\ x - y = 4 \\ x + y = -2 \end{cases}$

9) $\begin{cases} x + y = 1 \\ y - x = 3 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$

Раздел 3. Функции, их свойства и графики (повторение)

3.1. Числовая функция (повторение)

Числовая функция.

Числовой функцией с областью определения D называется соответствие, при котором каждому значению x из множества D сопоставляется по некоторому признаку число y, зависящее от x.

Число y, соответствующее числу x, называется значением функции в точке x и обозначают

$$y = f(x)$$

Область определения функции f обозначают D (f)

Найдем область определения функций:

1) $f(x) = \frac{1}{x}$ D (f)=(-∞;0)U(0;+∞)

2) $f(x) = \frac{1}{2x-6}$ D (f)=(-∞;3)U(3;+∞)

Функции могут быть заданы различными способами:

1) Аналитический – функция задается с помощью некоторой формулы.

Например, $y = x^2 + 3x - 5$

$y = 2\sin x$

2) Графический – построение графика.

3) Алгоритмический (машинный) – дается алгоритм или программа, по которой для каждого значения x вычисляется значение функции y = f(x)
4) Табличный – таблицей задается несколько значений аргумента и соответствующие значения функции

$y = x^2$

x				
y				

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Что называют числовой функцией?
2. Какими способами могут быть заданы функции?

Практические задания:

Задание на «3».

1.Дана функция $f(x) = x^4 + 2x - 3$. Найти f(0), f(-1), f(2).

2. Найти область определения функции $y = \frac{1}{3x}$

Задание на «4».

Найти область определения функций:1) $y = \sqrt{4x+8}$;2) $y = \frac{1}{x^2 - 6x + 8}$;3) $y = \frac{1}{-5x-1}$

Задание на «5»:

Найти область определения функций:1) $y = \sqrt{x^2 + x - 12}$;2) $y = \frac{x+10}{x^2+3x-4}$;3) $y = \sqrt{\frac{-6x-2}{-6x+12}}$

Тренажер

Задание:

1. Найти область определения функций:

1) $y=\sqrt{x}$
2) $y=\sqrt{2x-4}$
3) $y=\sqrt{2x+6}$
4) $y=\dfrac{1}{4x-1}$
5) $y=\dfrac{1}{x^2-x-12}$
6) $y=\sqrt{1-x}$
7) $y=\sqrt{18-6x}$
8) $y=\sqrt{x^2-2x-8}$
9) $y=\sqrt{x^2+8x+15}$
10) $y=\sqrt{x}+\sqrt{x-1}$
11) $y=\sqrt{\dfrac{3x-2}{2x+6}}$
12) $y=\dfrac{4x-1}{3x^2-5x-2}$
13) $y=\dfrac{x-1}{x^2-9x+20}$
14) $y=\sqrt{\dfrac{4x-8}{3-6x}}$
15) $y=\sqrt{(2-x)(5+x)}$

2. а) Дана функция $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$. Найти f(0), f(-1), f(2).

б) Дана функция $f(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 + 4$. Найти f(0),f(-1), f(2).

3.2. Графики функций. Простейшие преобразования графиков функций (повторение)

Графики функций

Графиком функции называется множество всех точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты – соответствующим значениям функции.

1. <u>$y = x^2$</u> Графиком является парабола. График неограниченно продолжается вверх справа и слева от оси x.

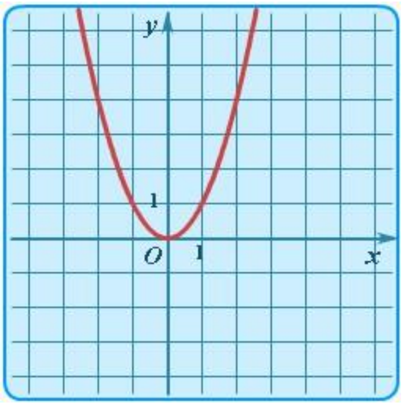


Рис. 2

<u>Свойства:</u>

1)если x = 0, то y = 0. Значит, график проходит через начало координат

2) если x ≠0, то y = 0. значит, все точки графика находятся выше оси ОХ.

3) противоположным значениям x соответствует одно и то же значение y.

<u>2. $y = x^3$.</u> Графиком является парабола. График неограниченно продолжается справа от оси ОУ вверх и слева от оси ОУ вниз.

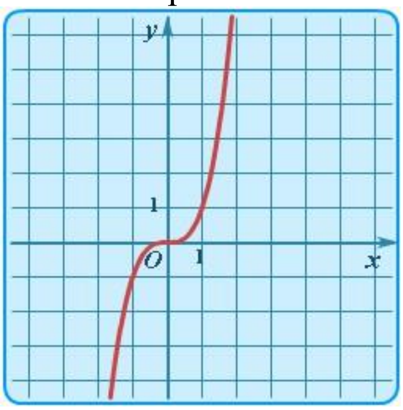


Рис.3.

<u>Свойства:</u>

1) если x = 0, то y = 0. Значит, график проходит через начало координат.

2) если x > 0, то y > 0; если x <0, то y < 0. Значит, график расположен в 1 и 3 координатных четвертях.

3) противоположным значениям x соответствует противоположные значения y.

3. <u>$y = \sqrt{x}$</u> Функция имеет смысл при x > 0, D – множество неотрицательных чисел. Графиком является ветвь параболы.

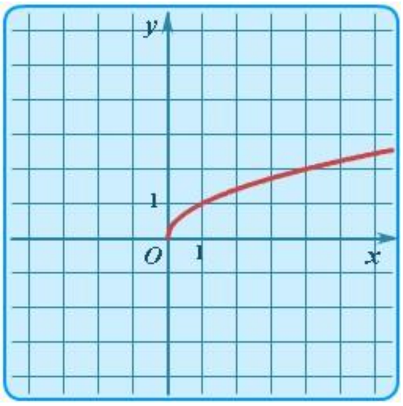


Рис. 4.

Свойства:

1) если $x = 0$, то $y = 0$. Значит, график проходит через начало координат

2) если $x > 0$, то $y > 0$. Значит, график расположен в 1 координатной четверти.

3) большему значению аргумента соответствует большее значение функции; график функции идет вверх.

4.$y = kx + в$ Графиком является прямая. Для построения графика необходимо найти координаты двух точек.

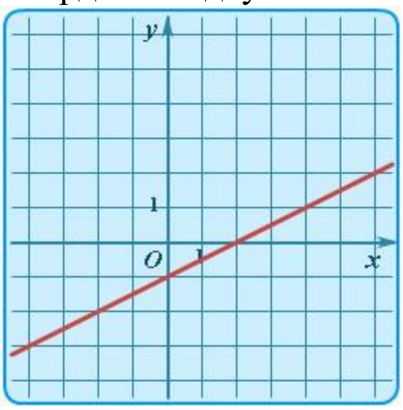


Рис. 5.

5.$y = kx$ – прямая пропорциональность.

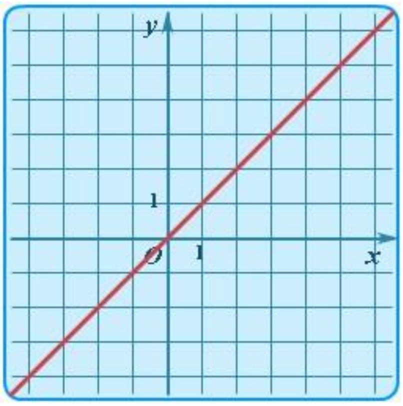


Рис. 6.

6. $y = \frac{k}{x}$ - обратная пропорциональность. Графиком является гипербола, состоящая из двух ветвей.

D = (-∞; 0)U(0;+∞)

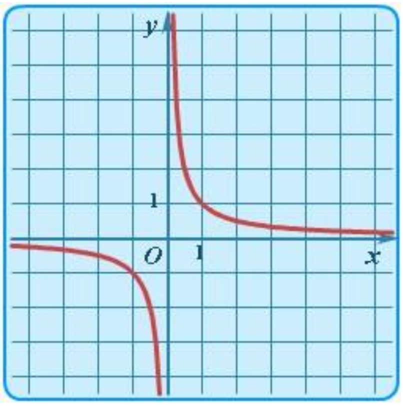


Рис. 7.

7.y = kx^2 + вх + с – квадратичная функция. Графиком является парабола, вершиной которой является точка (m;n), где

$m = -\frac{в}{2a}$; $n = \frac{4ac - в^2}{4a}$

При а > 0 ветви направлены вверх, при а <0 – вниз.

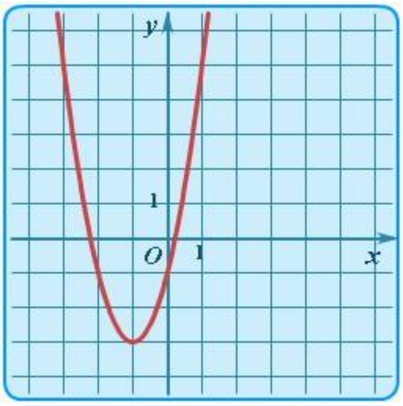


Рис. 8.

Алгоритм построения квадратичной функции:

1) найти координаты вершины параболы, отметить их на координатной плоскости;
2) построить несколько точек, принадлежащих параболе;
3) соединить полученные точки плавной линией.

Способы преобразования графиков функций

1. параллельный перенос вдоль осей координат:

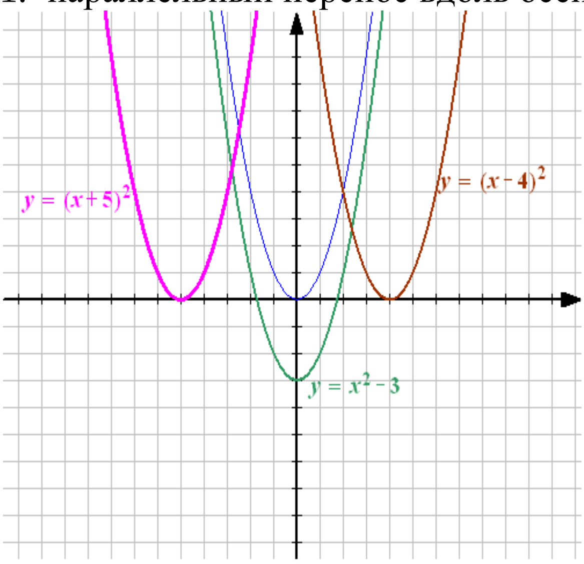


Рис. 9.

2. растяжение и сжатие вдоль оси ОУ

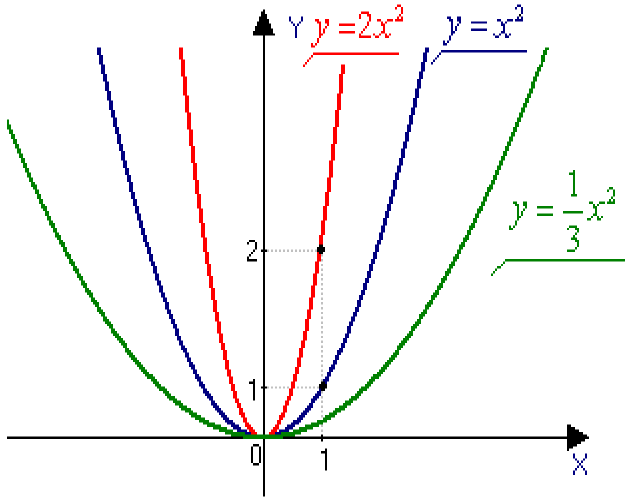


Рис. 10.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Что называют графиком функции?
2. Какими свойствами обладает функция $y=x^2$? Изобразите схематично график.
3. Какими свойствами обладает функция $y=x^3$? Изобразите схематично график.
4. Какими свойствами обладает функция $y=\sqrt{x}$? Изобразите схематично график.
5. Опишите принцип построения графика функции у=кх+в. Изобразите схематично график.
6. Опишите принцип построения графика функции у=кх. Изобразите схематично график.
7. Опишите принцип построения графика функции $y=\frac{к}{x}$. Изобразите схематично график.
8. Опишите алгоритм построения графика функции $y = kx^2 + вx + c$.
9. Какие вы знаете способы преобразования графиков функций?

Практические задания:

Задание на «3». Постройте графики функций: 1) $y=3x+1$; 2)$y=-2x$.

Задание на «4». Постройте графики функций: 1) $y=-3x^2$; 2) $y=\sqrt{-4x}$; 3) $y=-2x^3$

Задание на «5»: Постройте графики функций: 1) $y=\frac{1}{2}x^2$; 2) $y=\frac{-6}{x}$; 3) $y = x^2 - 6x + 8$

3.3. Монотонность, ограниченность, четность и нечетность

Функция f называется *четной*, если для любых x из ее области определения

$$f(-x) = f(x)$$

Пример1. $f(x) = x^4 \quad f(-x) = (-x)^4 = x^4$

Функция f называется *нечетной*, если для любых x из ее области определения

$$f(-x) = -f(x)$$

Пример2. $f(x) = x^3 \quad f(-x) = (-x)^3 = -x^3$

Функция $y = f(x)$ называется *периодической*, если выполняется условие

$$f(x + T) = f(x)$$

Функция $y = f(x)$ называется *ограниченной*, если существует такое число $C > 0$, что

$|f(x)| \le C$ для любого x из области определения функции.

Функция $y = f(x)$ называется *убывающей* на интервале (а;в), если для любых x_1 и x_2, принадлежащих интервалу

$$f(x_1) > f(x_2)$$

Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей* на интервале (а;в), если для любых x_1 и x_2, принадлежащих интервалу

$$f(x_1) \le f(x_2)$$

Интервалы, на которых функция либо возрастает, либо убывает, называют интервалами *монотонности.*

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Какая функция называется четной?
2. Какая функция называется нечетной?
3. Какая функция называется периодической?
4. Какая функция называется ограниченной?
5. Какая функция называется убывающей?
6. Какая функция называется возрастающей?
7. Какие интервалы называют интервалами монотонности?

Практические задания:

Задание на «3». Проверьте функции на четность и нечетность:1) f(x) =6x; 2)f(x) = 4- x; 3) f(x) = $-6x^2 + 2$

Задание на «4»; Проверьте функции на четность и нечетность:1) f(x) =$5x^3$ - 1; 2)f(x) = $0,5x^2 +3x + 5$; 3) f(x) = $-\frac{3}{x}$

Задание на «5»: Проверьте функции на четность и нечетность:1) $f(x)=\frac{2x}{x+1}$; 2) $f(x)=\frac{-2+x}{6x-10}$ 3) f(x)$=-6x^2-|x|$

Тренажер по построению графиков и свойствам функций

Задание:

1. Постройте графики следующих функций:

1) y = $-6x^2 + 2$
2) y = -6x
3) y = $5x^3$ -1
4) $y=-\frac{3}{x}$
5) y = $x^2 - 6x + 5$
6) y = $0,5x^2 +3x + 5$
7) y = $x^2 - 2x - 8$
8) $y = \frac{4}{x}$
9) y = $-3x^2 - 1$
10) y = $x^2 - 4x - 5$
11) y = $-3x^3 - 2$

12) $y=\sqrt{-4x}$

13) $y = x^2 - 8x + 15$

2<u>. Определить четность и нечетность функций:</u>

1) $f(x) = 1 - x$
2) $f(x) = x^3$
3) $f(x) = 4x$
4) $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$
5) $f(x)=\dfrac{3}{x}$
6) $f(x)=\dfrac{2}{x-1}$
7) $f(x)=x^2+|x|$
8) $f(x) = x^2 - x$
9) $f(x)=x*|x|$

3. <u>Начертить эскизы графиков функций:</u>

1) Функция возрастает на интервале (-∞;2] и убывает на интервале [2; +∞);

2) Функция возрастает на интервалах (-∞;2] и [0;3] и убывает на интервалах [-2;0]и [3;∞);
3) Функция убывает на интервале (-∞;1] и [4; ∞) и возрастает на интервале [1;4]

Раздел 4. Корни, степени и логарифмы

4.1. Корни и степени.

В результате изучения темы студент должен:
уметь:
- вычислять корни натуральной степени из числа.
знать:
- понятие корня n-степени из числа;
- основные свойства корней.

Корень n-степени и его свойства.

Корнем n-ой степени из числа а называется такое число, n-ая степень которого равна а и обозначают $\sqrt[n]{a}$. Число n называют показателем корня, а число а – подкоренным выражением. Знак корня называют также радикалом.

Например.

$\sqrt[3]{27} = 3$, т.к. $3^3 = 27$

$\sqrt[3]{8} = 2$, т.к. $2^3 = 8$

$\sqrt[4]{\frac{81}{16}} = \frac{3}{2}$,

Основные свойства корней:

1) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$

2) $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n\cdot k]{a^{m\cdot k}}$

3) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$

4) $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

5) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$

6) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n\cdot m]{a}$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Что называют корнем n-степени из числа?
2. Перечислите основные свойства корней.

Практические задания:

Задание на «3». Вычислить:1) $0{,}5\sqrt{81}$; 2)$-2{,}5\sqrt{36}$; 3)$\sqrt{0{,}16}$+$\sqrt{0{,}9}$; 4)$\sqrt{0{,}121}$-$\sqrt{0{,}09}$; 5)$\sqrt{0{,}0049}$+$\sqrt{0{,}0025}$; 6)$\sqrt{0{,}36}$-$\sqrt{0{,}01}$; 7)$\frac{1}{7}\sqrt{0{,}49}$+12; 8) 15-10$\sqrt{0{,}01}$.

Задание на «4: Вынести множитель из-под знака корня:

1) $\sqrt{20}$; 2) $\sqrt{27}$; 3) $\sqrt{96}$; 4) $\sqrt{48}$; 5) $\sqrt{50}$; 6) $\sqrt{108}$
7) $\sqrt{28}$; 8) $\sqrt{366}$; 9) $\frac{1}{3}\sqrt{18}$; 10) $\frac{2}{5}\sqrt{50}$; 11) -$\frac{1}{7}\sqrt{98}$; 12) -$\frac{2}{5}\sqrt{275}$;

Задание на «5»: Упростить:1) $\left(2\sqrt{5}+1\right)\left(2\sqrt{5}-1\right)$; 2) $\left(5\sqrt{7}-\sqrt{13}\right)\left(\sqrt{13}+5\sqrt{7}\right)$

3) $\left(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)\left(2\sqrt{3}+3\sqrt{2}\right)$; 4) $\left(0.5\sqrt{14}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}-0.5\sqrt{14}\right)$

5) $\left(1+2\sqrt{3}\right)^2$; 6) $\left(3\sqrt{2}-3\right)^2$

Тренажер по корням

1. Упростить выражения:

   1) $\sqrt[5]{7\frac{19}{32}}$; 2) $\left(\sqrt[5]{a^2}\right)^3$; 3) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{a}}$; 4) $\sqrt[6]{a^4}$

2. Вычислить:

   1) $\sqrt[3]{-27}$; 2) $\sqrt[4]{81}$; 3) $\sqrt[5]{-32}$; 4) $\sqrt[3]{64}$; 5) $\sqrt[5]{\frac{1}{32}}$; 6) $\sqrt[4]{\frac{81}{625}}$; 7) $\sqrt[3]{\frac{-27}{8}}$; 8) $\sqrt[4]{\frac{81}{256}}$; 9) $\sqrt[4]{16*625}$;

   10) $\sqrt[5]{32*243}$; 11) $\sqrt[3]{8*343}$; 12) $\sqrt[4]{0{,}0001*16}$; 13) $\sqrt[5]{160*625}$; 14) $\sqrt[3]{24*9}$;

   15) $\sqrt[4]{48*27}$; 16) $\sqrt[3]{75*45}$; 17) $\sqrt[3]{9}*\sqrt[6]{9}$; 18) $\sqrt[7]{16}*\sqrt[7]{-8}$; 19) $\sqrt[5]{27}*\sqrt[5]{9}$;

   20) $\sqrt[3]{-25}*\sqrt[6]{25}$; 21) $\frac{\sqrt[3]{-625}}{\sqrt[3]{-5}}$; 22) $\frac{\sqrt[4]{128}}{\sqrt[4]{8}}$; 23) $\frac{\sqrt[3]{243}}{\sqrt[3]{-9}}$; 24) $\frac{\sqrt[6]{128}}{\sqrt[6]{2}}$;

3. Вычислить:

1) $0{,}6\sqrt{36}$; 2)$-2{,}5\sqrt{25}$; 3)$\sqrt{0{,}49}+\sqrt{0{,}16}$; 4)$\sqrt{0{,}64}-\sqrt{0{,}04}$; 5)$-\sqrt{0{,}0036}+\sqrt{0{,}0025}$; 6)$\sqrt{0{,}01}-\sqrt{0{,}0001}$;
7)$\frac{1}{3}\sqrt{0{,}81}-1$; 8) $4-10\sqrt{0{,}01}$;

9) $\left(\sqrt{8}\right)^2$; 10) $\left(-\sqrt{26}\right)^2$; 11) $0{,}49+2\left(\sqrt{0{,}4}\right)^2$; 12) $3\left(\sqrt{11}\right)^2-\sqrt{6400}$;

13) $\left(2\sqrt{6}\right)^2+\left(-3\sqrt{2}\right)^2$; 14) $-0{,}1\left(\sqrt{120}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\sqrt{20}\right)^2$;

15) $2\sqrt{6}*\left(-\sqrt{6}\right)$;

16) $-\left(3\sqrt{5}\right)^2$; 17) $\sqrt{1{,}44}-2\left(\sqrt{0{,}6}\right)^2$; 18) $\left(0{,}1\sqrt{70}\right)^2+\sqrt{1{,}69}$;
19)$3\sqrt{0{,}16}-0{,}1\sqrt{225}$;

20)$0{,}2\sqrt{900}+1{,}8\sqrt{\frac{1}{9}}$; 21) $0{,}3\sqrt{1{,}21}*\sqrt{400}$; 22) $5:\sqrt{0{,}25}*\sqrt{0{,}81}$;

23) $10\sqrt{0{,}01}+\left(-\sqrt{2}\right)^2$; 24) $0{,}3\sqrt{25}-\frac{1}{3}\left(\sqrt{2}\right)^2$; 25) $0{,}5\sqrt{121}+3\left(\sqrt{0{,}81}\right)$;

26) $\sqrt{144} * \sqrt{900} \quad * \sqrt{0{,}01}$; 27) $\sqrt{400} - \left(4\sqrt{0{,}5}\right)^2$; 28) $\left(-3\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2 - 10\sqrt{0{,}64}$

4. Решить уравнения**:**

1) $x^2 - 0{,}01 = 0{,}03$ 2) $80 + x^2 = 81$ 3) $19 + x^2 = 10$

4) $20 - x^2 = -5$ 5) $3x^2 = 1{,}47$ 6) $\frac{1}{4}x^2 = 10$

7) $\frac{1}{2}x^2 = 32$ 8) $-5x^2 = 1{,}8$ 9) $(x-3)^2 = 25$

10) $(x+4)^2 = 9$ 11) $(x-6)^2 = 7$ 12) $(x+2)^2 = 6$

5. Вынести множитель из-под знака корня:

2) $\sqrt{12;}$ 2) $\sqrt{18;}$ 3) $\sqrt{80;}$ 4) $\sqrt{48;}$ 5) $\sqrt{125}$; 6) $\sqrt{108}$

7) $\sqrt{12;}$ 8) $\sqrt{366;}$ 9) $\frac{1}{2}\sqrt{24;}$ 10) $\frac{2}{3}\sqrt{45;}$ 11) -$\frac{1}{7}\sqrt{147}$; 12) -$\frac{1}{5}\sqrt{275;}$

13) $0{,}1\sqrt{20000;}$ 14) $-0{,}05\sqrt{28800;}$ 15) $\sqrt{20;}$ 16) $\sqrt{98;}$ 17) $\sqrt{200}$; 18) $\sqrt{160;}$ 19) $0{,}2\sqrt{75;}$ 20) $0{,}7\sqrt{300;}$ 21) $-0{,}125\sqrt{192;}$ 22) -$\frac{1}{3}\sqrt{450}$;

6. Упростить:

1) $\left(\sqrt{12} + \sqrt{15}\right) * \sqrt{3}$ 2) $\sqrt{5}\left(3\sqrt{5} + 5\sqrt{8}\right)$

3) $\left(4\sqrt{3} - 2\sqrt{6}\right) * 2\sqrt{3}$ 4) $\left(3\sqrt{5} - 2\sqrt{3}\right)*\sqrt{5} + \sqrt{60}$

5) $\left(\sqrt{328} - 2\sqrt{3} + \sqrt{37}\right) * \sqrt{7} + \sqrt{84}$ 6) $\left(\sqrt{12} + 2\sqrt{18}\right)*\sqrt{2} - \sqrt{96}$

7) $\sqrt{3}\left(\sqrt{12} - 2\sqrt{27}\right)$ 8) $\left(5\sqrt{2} - 7\sqrt{3}\right) * \sqrt{6}$

9) $\sqrt{8}-(\sqrt{10}-\sqrt{5})*\sqrt{5}$ 10) $\sqrt{48}-2\sqrt{3}(2-5\sqrt{12})$

11) $(1+3\sqrt{2})(1-2\sqrt{2})$ 12) $(3+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})$

13) $(2\sqrt{2}-\sqrt{3})(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})$ 14) $(\sqrt{5}-\sqrt{8})(\sqrt{5}-3\sqrt{2})$

15) $(2\sqrt{5}+\sqrt{12})(\sqrt{12}-\sqrt{5})-\sqrt{135}$ 16) $(3\sqrt{2}-\sqrt{27})(\sqrt{27}-\sqrt{2})-\sqrt{54}$

17) $(2\sqrt{5}+1)(2\sqrt{5}-1)$ 18) $(5\sqrt{7}-\sqrt{13})(\sqrt{13}+5\sqrt{7})$

19) $(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})$ 20) $(0.5\sqrt{14}+\sqrt{3})(\sqrt{3}-0.5\sqrt{14})$

21) $(1+3\sqrt{5})^2$ 22) $(2\sqrt{3}-7)^2$

23) $(2\sqrt{10}-\sqrt{2})^2$ 24) $(3\sqrt{6}-2\sqrt{3})^2$

25) $(\sqrt{6}+\sqrt{5})^2-\ \sqrt{120}$ 26) $\sqrt{60}+(\sqrt{3}-\sqrt{5})^2$

27) $(\sqrt{14}-3\sqrt{2})^2+6\ \sqrt{28}$ 28) $(3\sqrt{5}+\sqrt{15})^2-10\sqrt{27}$

7. Являются ли данные равенства тождествами?

1)5-(3$\sqrt{\frac{4}{9}}+\frac{1}{3}$) $=25$

2)11(0,15$\sqrt{1600}$-0,29$\sqrt{400}$=55

3)($\sqrt{225}+3\sqrt{121}$) ($\frac{2}{3}\sqrt{0{,}09}+0{,}78\sqrt{100}$)=6

4) (-6$\sqrt{\frac{1}{4}}+\frac{\sqrt{324}}{2}*\frac{\sqrt{0{,}16}}{0{,}2}$): $\sqrt{25}$=3

4.2. Степени с рациональными показателями и их свойства

В результате изучения темы студент должен:
уметь:
- вычислять степени с рациональными показателями.
знать:
- понятие степени с рациональным показателем;
- свойство степени с рациональным показателем.

Степени с рациональными показателями

Степенью числа a>0 с рациональным показателем m/n , где m- целое число, а n – натуральное число (больше 1), называется число $\sqrt[n]{a^m}$.

Свойство степени с рациональным показателем:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{n}{m}}$$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Что называют степенью с рациональным показателем?
2. Каким свойством обладает степень с рациональным показателем?

Практические задания:

Задание на «3». Представьте выражение в виде степени с рациональным показателем:

1) $\sqrt[3]{a^7}$; 2) $\sqrt[4]{d}$; 3) $\sqrt[9]{a^{-4}}$; 4) $\sqrt[14]{4}$

Задание на «4: Представьте выражение в виде корня:

1) $2^{\frac{3}{5}}$; 2) $a^{-\frac{3}{4}}$; 3) $-6b^{-\frac{2}{5}}$; 4) $b^{\frac{2}{3}} * c^{\frac{2}{7}}$

Задание на «5»: Вычислите: $0.001^{-\frac{1}{3}} - (-2)^{-2} 64^{\frac{2}{3}} - 8^{-1\frac{1}{3}} + (9^0)^2$

Тренажер по степени

Задание:

1. Представьте в виде корня из числа выражение:

1) $3^{1.2}$; 2) $5^{-\frac{2}{3}}$; 3) $4^{1.25}$; 4) $6^{-1\frac{1}{2}}$

2. Представьте выражение в виде степени с рациональным показателем:

1) $\sqrt[3]{a^{-2}}$; 2) $\sqrt[7]{3d}$; 3) $\sqrt[13]{a^{-7}}$; 4) $\sqrt[38]{4^5}$

3. Найдите значение числового выражения:

1) $243^{0.4}$; 2) $\left(\frac{64^4}{3^8}\right)^{-\frac{1}{8}}$; 3) $16^{\frac{5}{4}}$; 4) $\left(\frac{27^3}{125^6}\right)^{\frac{2}{9}}$ 5) $81^{\frac{6}{4}}$

6) $\sqrt[3]{100}*\left(\sqrt{2}\right)^{\frac{8}{3}}*\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{5}{3}}$; 7) $8^{2\frac{1}{3}}:81^{0.75}$; 8) $81^{-0.75}+\left(\frac{1}{125}\right)^{-\frac{1}{3}}-\left(\frac{1}{32}\right)^{-\frac{3}{5}}$;

9) $0.001^{-\frac{1}{3}}-(-2)^{-2}64^{\frac{2}{3}}-8^{-1\frac{1}{3}}+\left(9^0\right)^2$; 10) $27^{\frac{2}{3}}+(16)^{-0.75}-25^{0.5}$;

11) $(-0.5)^{-4}-625^{0.25}-\left(2\frac{1}{4}\right)^{-1\frac{1}{2}}+19(-3)^{-3}$

4. Представьте выражение в виде степени с рациональным показателем:

1) $\frac{1}{8}\sqrt[7]{2^5*ax^3}$; 2) $\sqrt[7]{b^3}*\sqrt[4]{b}$; 3) $\sqrt[3]{a^2\sqrt[4]{a}}$; 4) $\frac{1}{3}\sqrt[4]{27\sqrt[3]{x}}$

5. Представьте выражение в виде корня:

1) $3*2^{-\frac{3}{5}}$; 2) $a^{\frac{3}{4}}:b^{\frac{2}{5}}$; 3) $2b^{-\frac{2}{3}}$; 4) $b^{\frac{1}{3}}*c^{\frac{2}{7}}$

4.3. Степени с действительными показателями и их свойства

В результате изучения темы студент должен:
уметь:
- вычислять степени с действительными показателями.

знать:
- понятие степени с действительным показателем;
- понятие основания степени;
- понятие показателя степени;
- свойства степени с действительным показателем.

Степени с действительными показателями и их свойства.

Произведение нескольких одинаковых множителей можно записать в виде выражения, которое называется степенью.

$$x*x*x*x*x=x^5$$

Повторяющийся множитель называется основанием степени, а число повторяющихся множителей – показателем степени**.**

Степенью числа а с действительным показателем n называется произведение n множителей, каждый из которых равен а: a^n.

Свойства:

1. $a^m * a^n = a^{m+n}$ $(x^2 * x^5)$
2. $a^m / a^n = a^{m/n}$ (x^{10}/x^6)
3. $(a^m)^n = a^{m*n}$ $(x^2)^6$
4. $(ав)^n = a^n в^n$ $(x^2 y^3)^6$
5. $\left(\frac{a}{в}\right)^n = \frac{a^n}{в^n}$ $(\frac{2}{x^2})^3$
6. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $(x^{-2}y^{-3})$
7. $a^0 = 1$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Что называют степенью с действительным показателем?
2. Что называют основанием степени?
3. Что называют показателем степени?
4. Перечислите свойства степеней с действительным показателем.

Практические задания:

Задание на «3». Найти значение выражения:

1) $5^{-4} * 5^6$; 3) $7^{10} : 7^{12}$; 5) $(3^{-4})^{-1}$;

2) $4^4 * 4^{-3}$; 4) $65^{-3} : 65^{-3}$; 6) $(8^2)^{-2} * 8^3$

Задание на «4: 1.Вычислить: 1) $81 * 3^{-4}$; 2) $9^{-6} * 9^5$; 3) $(3^{-1})^5 * 27^2$; 4) $6^0 : 6^{-3}$;

5) $9^{-2} : 3^{-6}$; 6) $125^{-4} : 25^{-5}$

2. Упростить выражение: 1) $0{,}5ав^{-5} * 10а^{-2}в$; 2) $2{,}4x^{-3}y^{-6} * \frac{7}{8}xy$;

3) $\frac{5}{4}m^{-3}n^5 * 16m^3n^{-2}$; 4) $6p^{-2}q^{-3} * \frac{1}{6}p^2q^{-4}$

Задание на «5»: Вычислить:

1) $0.5^{-2}-(\frac{1}{4})^{-1}$ 2) $5^{-1}+2^{-2}$ 3) $0.3^{0}+0.1^{-2}$ 4) $4{,}3^{0}-1{,}4^{-1}$ 5) $(-5{,}9)^{0}-(-0.2)^{-2}$ 6) $10-(\frac{1}{8})^{-1}$ 7) $7*49^{-1}$ 8) $43+0{,}1^{-3}$
9) $-4*4^{-2}$ 10) $81*3^{-4}$

Тренажер по степени

Задание:

1. Найти значение выражения:

а) $3^{-4}*3^{6}$; г) $2^{10}:2^{12}$; ж) $(2^{-4})^{-1}$;

б) $2^{4}*2^{-3}$; д) $5^{-3}:5^{-3}$; з) $(5^{2})^{-2}*5^{3}$;

в) $10^{8}*10^{-5}*10^{-6}$; е) $3^{-4}:3$; и) $3^{-4}*(3^{-2})^{-4}$

2. Вычислить:

а) $5^{-15}*15^{16}$; к) $81^{3}:(9^{-2})^{-3}$;

б) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-4}*\left(\frac{1}{3}\right)^{3}$; л) $\frac{1}{16}*2^{10}$;

в) $4^{-8}:4^{-9}$; м) $32*(2^{-4})^{2}$;

г) $\left(\frac{1}{5}\right)^{2}:\left(\frac{1}{5}\right)^{4}$; н) $8^{-1}*4^{3}$;

д) $(2^{-3})^{-3}$; о) $4^{5}*16^{-2}$;

е) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$; п) $8^{-2}*4^{3}$;

ж) $27*3^{-4}$; р) $9^{-6}*27^{5}$;

з) $(3^{-1})^{5}*81^{2}$; с) $10^{0}:10^{-3}$;

и) $9^{-2}:3^{-6}$; т) $125^{-4}:25^{-5}$;

3. Упростить выражение:

а) 1,5ав$^{-3}$ * 6а$^{-2}$в;

б) $\frac{3}{4}m^{-2}n^4*8m^3n^{-2}$;

в) $0{,}6c^2d^4*\frac{1}{3}c^{-2}d^{-2}$;

г) $3{,}2x^{-1}y^{-5}*\frac{5}{8}xy$;

д) $\frac{1}{2}p^{-1}q^{-3}*\frac{1}{6}p^2q^{-5}$;

е) $3\frac{1}{3}a^5b^{-18}*0{,}6a^{-1}b^{20}$.

4. Упростите выражение:

а) $\frac{13x^{-2}}{y}=\frac{y^{12}}{39x^{-3}}$;

б) $\frac{5a^5}{b^{-7}}=\frac{7b^{-3}}{25a}$;

в) $\frac{p}{3c^{-2}}=\frac{15c}{p^{-2}}$;

г) $\frac{26x^{17}}{y^{-8}}=\frac{y}{13x^{25}}$;

д) $\frac{12x^{-5}}{y^{-6}}=\frac{y}{36x^{-9}}$;

е) $\frac{63a^2}{2b^{-5}}=\frac{18b^2}{7a}$;

ж) $(0{,}25x^{-4}y^{-3})^2*\left(\frac{x^{-3}}{4y^2}\right)^{-3}$;

з) $(\frac{7}{8}p^{-6}q)^{-1}$;

к) $\left(\frac{3}{4}a^{-1}b^{-3}\right)^{-2}$;

л) $\left(-2m^5n^{-3}\right)^2$;

м) $4a^7b^{-1}*(\frac{ab}{5})^{-1}$;

н) $\left(\frac{2x^2}{y^3}\right)^{-1}*\left(x^{-1}y\right)^3$.

5. Вычислите:

а) $-1^3+(-2)^3$

б) $-6^2-(-1)^4$

в) $-8^3+(-3)^3$

г) $10-5*2^4$

д) $2*3^4-3*2^4$

е) $2*5^3+5*2^3$

ж) $3^4-(\frac{2}{5})^2*6\frac{1}{4}$

з) $0{,}2*3^3-0.4*2^4$

и) $8*0{,}5^3+25*0{,}2^2$

6. Упростить:

а) $(xy)^3*(-3x^4y^2)$

б) $0{,}5a^2b^3*(-2b)^6$

в) $(0{,}2m^2n)^3*1000m^4n^7$

и) $(-a^2b)^3*\left(-a^4b^2\right)$

к) $0.2a^2b^3*(-5a^3b)^2$

л) $(\frac{1}{4}a^2b)^3*(-32a^2b)$

г) $-7c^8*(-0{,}4c^3)^2$

д) $(-0{,}2b^6)^3 5b$

е) $-0.01a^4*(-10a^5)^3$

ж) $\frac{9}{16}a^7*(-1\frac{1}{3}a^4)^2$

з) $(3\frac{1}{3}a^2)*81a^5$

н) $(-\frac{2}{3}ab^4)*(-27a^5b)$

о) $(2ab)^4*(-7a^7b)$

п) $10a^4b^4*(0.1ab)^3$

р) $-0.6a^7b^7*(0.5ab^5)^3$

с) $(-3a^7b^2)^4*(\frac{1}{27}ab)$

7.Вычислить:

а) $0.5^{-2}+(\frac{1}{3})^{-1}$

б) $0.3^0+0.1^{-4}$

в) $(-2.1)^0-(-0.2)^{-3}$

г) $6*12^{-1}$

д) $-4*8^{-2}$

е) $6^{-1}-3^{-2}$

ж) $1.3^0-1.3^{-1}$

з) $12-(\frac{1}{6})^{-1}$

и) $25+0.1^{-2}$

к) $27*3^{-4}$

8._Упростить выражение:

а) $(0.25a-4b^{-3})^2*(\frac{a^{-3}}{4b^2})^{-3}$

б) $(\frac{a^{-3}b^4}{9})*(\frac{3}{a^{-2}b^3})^{-3}$

в) $(\frac{a^{-4}}{10a^5b^2})^{-2}*(5a^4bc^2)^{-2}$

г) $(\frac{a^2b^{-3}}{6c})^{-4}*(\frac{a^2b^{-2}}{9c})^2$

4.3. Иррациональные уравнения.

В результате изучения темы студент должен:

уметь:

- решать иррациональные уравнения.

знать:

- понятие иррациональных уравнений;
- методику решения иррациональных уравнений.

Иррациональные уравнения.

Уравнения, содержащие переменную под знаком корня, называются *иррациональными.*

Пример 1.

$\sqrt{x^2 - 7} = 3$

$(\sqrt{x^2 - 7})^2 = 3^2$

$x^2 - 7 = 9$

$x^2 = 16$

$x_{1,2} = \pm 4$

Пример 2.

$\sqrt[3]{x - 4} = 2$

$(\sqrt{x - 4})^3 = 2^3$

$x \ - 4 = 8$

$x = 12$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯЛЬНОЙ РАБОТЫ

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Что называют иррациональным уравнением?

Практические задания:

Решить уравнения:

Задание на «3»:

1) $\sqrt{x+5} = -4$
2) $\sqrt{2x-2} = \sqrt{2}$

Задание на «4»:

1) $\sqrt[3]{2x-2} = 1$

2) $\sqrt{x-3}=x-9$

Задание на «5»:

1) $\sqrt{x^2-12}=\sqrt{x}$;

2) $\sqrt[3]{x(x+6)}=x$

Тренажер

Задание:

1. Решить иррациональные уравнения:

1) $\sqrt{x}=x-6$; 2) $\sqrt{x^2-12}=\sqrt{x}$;

3) $\sqrt{x-5}=\sqrt{3-x}$; 4) $\sqrt{x-3}=x-9$

2. Решить иррациональные уравнения:

1) $\sqrt{x-3}=x+1$

2) $\sqrt[3]{x-4}=2$

3) $\sqrt[5]{2x+2}=2$

4) $\sqrt[4]{6x-4}=2$

3. Решите иррациональные уравнения:

а) $\sqrt{4x-3}=4$; б) $\sqrt{x}=x-2$ в) $\sqrt[3]{x(x+6)}=x$

г) $\sqrt{x+2}=x-4$ д) $\sqrt{x^2+9}=2x-3$ е) $\sqrt{x^2-9}=3x-11$

ж) $\sqrt{x^2-9}=x-21$ з) $\sqrt{x^2+5x+1}=2x-1$ и) $\sqrt{x^2-1}=\sqrt{3}$

4.5. Логарифмы и их свойства.

В результате изучения темы студент должен:

уметь:

- вычислять логарифмы.

знать:

- понятие логарифма;
- свойства логарифмов.

Логарифмы и их свойства.

Логарифмом числа в по основанию а называется показатель степени с, в которую надо возвести основание а, чтобы получить в.

$$\log_a в = c$$

Примеры. $\log_2 32=5$ $\log_2 8=3$ $\log_3 27=3$

Свойства логарифмов:

1. $\log_a 1 = 0$ $\qquad$ $\log_3 1 = 0$
2. $\log_a a = 1$ $\qquad$ $\log_3 3 = 1$
3. $\log_a вс = \log_a в + \log_a с$ $\qquad$ $\log_{10} 8 + \log_{10} 125 = \log_{10} 1000 = 3$
4. $\log_a \frac{в}{с} = \log_a в - \log_a с$ $\qquad$ $\log_2 7 - \log_2 \frac{7}{16} = \log_2 16 = 4$
5. $\log_a (в)^n = n \log_a в$

Примечание: $\log_{10} в = \lg в$ (десятичный логарифм)

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Что называют логарифмом?
2. Перечислите свойства логарифмов.

Практические задания:

Задание на «3». Вычислить: а) $\log_2 16$; б) $\log_5 25$; в) $\log_7 49$; г) $\log_3 27$; д) $\log_5 125$

Задание на «4: Вычислить: а) $\log_{\frac{1}{3}} 9$; б) $\log_{-5} \frac{1}{25}$; в) $\log_{-2} \frac{1}{8}$; г) $\log_{12} 1$; д) $\lg 100000$

е) $\log_{\frac{1}{8}} 64$; ж) $\log_3 \frac{1}{81}$; з) $\log_{\frac{1}{5}} 625$

Задание на «5»: Вычислить: 1) $\log_2 2 - \log_2 16$; 2) $\log_3 \frac{1}{8} + \log_3 8$; 3) $\log_5 7 - \log_5 \frac{7}{25}$;

4) $\lg 14 - \lg 140$; 5) $\log_4 32 - \log_4 2$; 6) $\log_{0,3} 9 - 2\log_{0,3} 10$; 7) $\log_2 11 - \log_2 22$

Тренажер

Задание:

1. Вычислить:

а) $\log_4 16$; б) $\log_5 125$; в) $\log_8 64$; г) $\log_3 81$; д) $\log_5 625$;

е) $\log_3 9$; ж) $\log_5 \frac{1}{25}$; з) $\log_2 \frac{1}{8}$; и) $\log_7 1$; к) $\lg 1000$.

2. Вычислить:

а) $\log_{12} 4 + \log_{12} 36$;

б) $\lg 13 - \lg 130$;

в) $\log_4 2 + \log_4 8$;

г) $\log_2 3 - \log_2 6$;

д) $\log_5 10 + \log_5 \frac{1}{2}$;

е) $\log_8 128 - \log_8 2$;

ж) $\log_{0,3} 9 - 2\log_{0,3} 10$;

з) $\log_2 3 - \log_2 24$;

и) $\log_3 \frac{1}{6} + \log_3 6$;

к) $\log_4 5 + \log_4 \frac{1}{5}$;

л) $\log_2 11 - \log_2 44$;

м) $\log_{12} 4 + \log_{12} 36$;

н) $\log_6 9 - \log_6 \frac{9}{36}$;

о) $\log_{\frac{1}{2}} 6 - \log_{\frac{1}{2}} 3$;

п) $\log_2 8 - 3\log_2 2$;

р) $\log_{0,2} 4 - 2\log_{0,2} 10$;

с) $\log_3 4 + \log_3 \frac{1}{4}$;

т) $\log_4 \frac{4}{5} - \log_4 \frac{16}{5}$.

Раздел 5. Показательная и логарифмичесая функции

5.1. Показательная, логарифмическая их свойства и графики

В результате изучения темы студент должен:
знать:
- понятие и свойства показательной функции;
- понятие и свойства логарифмической функции;
- понятие и свойства степенной функции.

Показательная, логарифмическая функции, их свойства и графики.

Функция, заданная формулой y = a ^{x} ,где a>0, a ≠0, называется показательной функцией.

Свойства:

1. D= множество действительных чисел.
2. Область значений – множество всех положительных действительных чисел.
3. При a>1 функция возрастает, при 0 < a <1 функция убывает.

При a>0: При a<0:

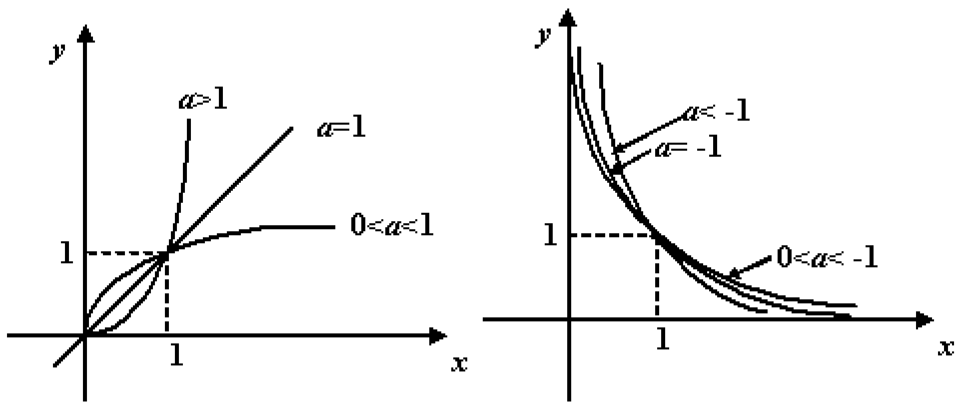


Рис. 11

Функция, заданная формулой y =log$_{a}$ называется логарифмической функцией.

Свойства:

1. D= множество положительных чисел.
2. Область значений – множество всех действительных чисел.
3. При a>1 функция возрастает, при 0 < a <1 функция убывает.

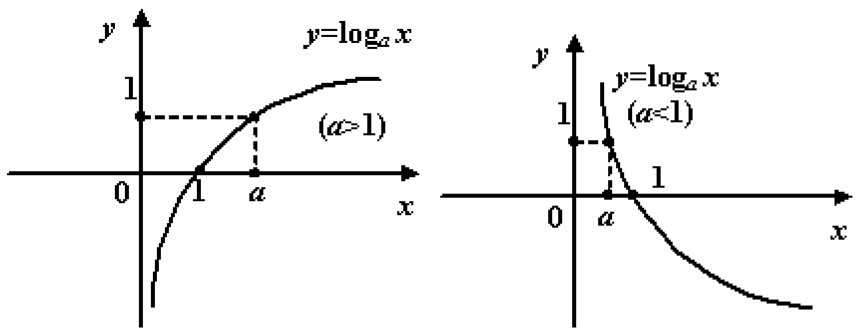


Рис. 12

Функция, заданная формулой f(x) = x ^{a}, называется степенной функцией.

<u>Свойства:</u>

1. Если a – четное, то функция – четная; a – нечетное, функция – нечетная.
2. Если a < 0, x>0, то функция убывает на промежутке (0; ∞); если функция a > 0, x>0, то функция возрастает.

При a>0:

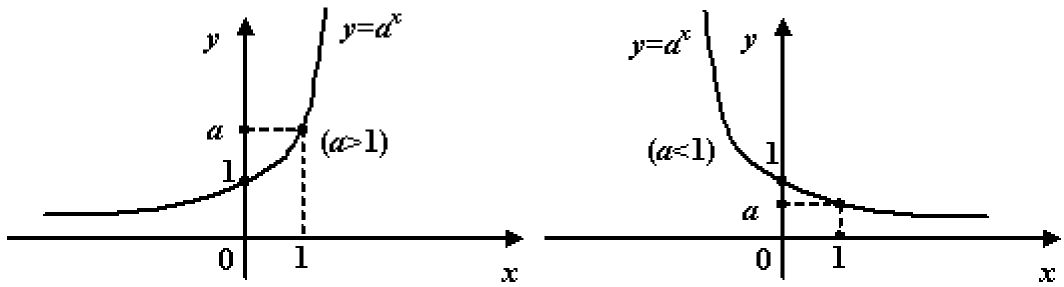


Рис. 13

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Какую функцию называют показательной?
2. Перечислите свойства показательной функции и схематично изобразите график.
3. Какую функцию называют логарифмической?
4. Перечислите свойства логарифмической функции и схематично изобразите график.
5. Какую функцию называют степенной?

6. Перечислите свойства степенной функции и схематично изобразите график.

5.2. Решение простейших показательных уравнений.

В результате изучения темы студент должен:
уметь:
- решать простейшие показательные уравнения.
знать:
- понятие показательных уравнений;
- методику решения показательных уравнений.

Решение простейших показательных уравнений.

Простейшие показательные уравнения имеют вид $a^x = в$.

Примеры. Решить уравнения:

1. $7^{x-2} = \sqrt[3]{49}$

$7^{x-2}=7^{2/3}$

$x - 2 = \frac{2}{3}$

$x = 2\frac{2}{3}$

2. $5^{x^2-2x-1} = 25$

$x^2 - 2x - 1 = 2$

$x = 3; -1$

3. $4^x - 5*2^x + 4 = 0$

$y = 2^x$

$y^2 - 5y + 4 = 0$

$2^x = 1; x = 0$

$2^x=4; x = 2$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Что называют простейшим показательным уравнением?
2. Охарактеризуйте методику решения показательных уравнений.

Практические задания:

Решить простейшие показательные уравнения:

<u>Задание на «3».</u>

1) $3^{x-3} = 27$

2) $10^{4-2x} = 10$

3) $2^{x} = 32$

4) $4^{-2x+4} = 4^{2-3x}$

<u>Задание на «4:</u>

1) $7^{x^2-8x+15} = 1$

2) $\left(\frac{1}{4}\right)^{x} = 64$

3) $7^{2x-4} = 49^{5-4x}$

4) $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-2} = 8^{3x+4}$

<u>Задание на «5»:</u>

1) $\sqrt{2^{x}} = 4$

2) $10^{\frac{1}{9}x^2-\frac{4}{3}x+3} = 1$

3) $3^{x^2} * 3^{9x} = 3^{-20}$

4) $9^{x} - 8*3^{x} + 15 = 0$

Тренажер

<u>Задание</u>: Решить уравнения:

1) $3^{x-5} = 81$;

2) $9^{\frac{x-1}{2}} = 27^{x^2-1}$;

11) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x} = \frac{1}{64}$;

12) $9^{x} - 8*3^{x} - 9 = 0$;

3) $3^{6-x} = 3^{3x-2}$;

4) $\sqrt{3^x} = 9$;

5) $36^x – 4*6^x - 12 = 0$;

6) $5^{x^2-8x+12} = 1$;

7) $2^{x^2} : 4^x = 8$;

8) $4^x = 64$;

9) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 27$;

10) $3^x = 81$;

13) $100^x - 11*10^x - 10 = 0$

14) $49^x - 8*7^x + 7 = 0$;

15) $2^{x^2-7x+12} = 1$;

16) $3^{x-2} = 8^{2x}$;

17) $9^{2x} = 3^{2x-6}$;

18) $4^{3x-4} = 64^{5-2x}$;

19) $\left(\frac{1}{5}\right)^{3x-2} = 25^{3x}$;

20) $6^{2x-4} = 36^{5-4x}$.

5.3. Решение простейших показательных неравенств.

В результате изучения темы студент должен:
уметь:
- решать простейшие показательные неравенства.

знать:
- понятие показательных неравенств;
- методику решения показательных неравенств.

Решение простейших показательных неравенств.

Неравенства вида $a^x > c$, $a^x < c$ называются простейшими показательными неравенствами.

Пример1. Решить неравенство $3^{2x} > 3^{x-2}$

$2x > x-2$

$x > -2$ Ответ: $(-2; \infty)$

Пример 2. $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-1} > \frac{1}{16}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-1} > \left(\frac{1}{2}\right)^{4}$

x > 2,5 Ответ: (2,5; ∞)

Пример 3. $6^{x^2-7x+12} > 1$

x^2-7x+12>0

x^2-7x+12 = 0

x =3; 4

Ответ: (-∞; 3) U(3; ∞)

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1.Что называют простейшим показательным неравенством?
2.Охарактеризуйте методику решения показательных неравенств.

Практические задания:

Решить простейшие показательные неравенства:

Задание на «3».

1) $6^x > 6$

2) $4^x \leq 16$

3) $5^{2x-4} > 25$

4) $0{,}3^{5-3x} < 0{,}09^{-2}$

Задание на «4:

1) $3^{2x^2+7x+15} < 3^9$

2) $(2+x)^{x^2-4x+4} \geq 1$

3) $1000^{2x-2} \leq \left(\frac{1}{10}\right)^{x}$

4) $(5)^{4x^2-63x+84} > 125$

Задание на «5»:

1) $2^x \geq \sqrt[6]{8}$

2) $3^{x^2} > \left(\frac{1}{3}\right)^{-39x-40}$

3) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x^2+x} \leq \frac{1}{8}$

4) $\left(\sqrt{7}\right)^x < \frac{1}{49}$

Тренажер

Задание:

Решить неравенства:

1) $3^x>27$;
2) $6^{x^2+2x} > 6^3$;
3) $3^{2-x}>27$;
4) $4^x \geq 64$;
5) $2^{x^2} \geq 2^{2x-3}$;
6) $3^{7+4x}>27$;
7) $4^{5-2x}<16$;
8) $\left(\frac{1}{4}\right)^{10x} \geq 64^{2\frac{2}{3}-x^2}$;
9) $\left(\frac{1}{3}\right)^x \geq 27$;
10) $\left(\sqrt{6}\right)^x \leq \frac{1}{36}$;
11) $0,4^{2x+1}<0,16$;
12) $0,3^{7+4x}< 0,027$;
13) $2^{x^2} > \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-3}$;
14) $3^{4x+3} \leq \left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{x^2}{2}}$;
15) $\left(\frac{1}{4}\right)^{10x} \geq 64^{2\frac{2}{3}-x^2}$;
16) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-5x+8} \leq \frac{1}{9}$;
17) $2^{x^2-8x+18} \geq 8$;
18) $(3+x)^{x^2-5x+6} > 1$;
19) $\left(x^2-8x+16\right)^{x-6} \geq 1$
20) $(x-1)^{x^2-6x+8} \geq 1$

5.4. Решение простейших логарифмических уравнений.

В результате изучения темы студент должен:
уметь:
- решать простейшие логарифмические уравнения.

знать:
- понятие логарифмических уравнений;
- методику решения логарифмических уравнений.

Уравнение, содержащее переменную под знаком логарифма или в основании логарифма, называется логарифмическим.

Рассмотрим простейшее логарифмическое уравнение $\log_a x = в$

Пример 1. Решить уравнение:

$$\log_2 (x^2 + 4x + 3) = 3$$

$$x^2 + 4x + 3 = 2^3$$

$$x^2 + 4x - 5 = 0$$

$$x = 1; -5$$

Пример 2. $\log_x 16 - \log_x 2 = \frac{1}{2}$

$$\log_x \frac{16}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\log_x 8 = \frac{1}{2}$$

$$x^{\frac{1}{2}} = 8$$

$$x = 64$$

Пример 3. $\log_5 (2x+3) = \log_5 (12x-4)$

$$2x+3 = x+1$$

$$x = -2$$

Пример 4. $\lg 2x + \lg (x+3) = \lg (12x-4)$

$$\lg 2x (x + 3) = \lg (12x-4)$$

$$2x^2 + 6x = 12x - 4$$

$2x^2 - 6x + 4 = 0$

$x = 2; 1$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Что называют простейшим логарифмическим уравнением?
2. Охарактеризуйте методику решения логарифмических уравнений.

Практические задания:

Решить простейшие логарифмические уравнения:

Задание на «3».

1) $\log_2 x = 2$;

2) $\log_3 (x+10) = 2$;

3) $\log_5 (x-1) = 0$;

4) $\log_{-2} (2x+3) = 3$

Задание на «4:

1) $\log_{\frac{1}{3}}(x+4) = -2$

2) $\lg x = 3$;

3) $\log_{\frac{1}{4}}(x-5) = -1$

4) $\log_{\frac{1}{2}}(x-1) = -2$

Задание на «5»:

1) $\log_{0,5} x = -1$;

2) $\log_{16} x = -\frac{1}{2}$;

3) $\log_x 4 - \log_x 2 = \frac{1}{3}$;

4) $\log_x 8 + \log_x 2 = 2$

Тренажер

Задание: Решить уравнения:

Решить уравнения:

1) $\log_3(x-12) = 2$;
2) $\log_5(x + 10) = 2$;
3) $\log_x 2 + \log_x 3 = \frac{1}{2}$;
4) $\log_2(3 - x) = 0$;
5) $\log_4(2x-10) = 2$;
6) $\log_{0,3}(5+2x) = 1$;
7) $\log_{\frac{1}{2}}(2x-4) = -2$;
8) $\log_x 16 - \log_x 2 = \frac{1}{2}$;
9) $\log_{0,4} x = -1$;
10) $\log_9 x = -\frac{1}{2}$;
11) $\lg x = 2$;
12) $\log_{\frac{1}{2}}(2x-6) = 2$;
13) $\log_5(x-6) = 1$;
14) $\log_{-3}(4x+7) = 3$;
15) $\log_5(8x + 5) = -1$;
16) $\log_x 5 + \log_x 1 = -2$;
17) $\log_{10}(3 - 4x) = 0$
18) $\log_{-6}(4x+8) = 2$;
19) $\log_{0,5}(3-2x) = 1$;
20) $\log_{\frac{1}{3}}(x+6) = -1$
21) $\log_x 8 + \log_x 2 = \frac{1}{2}$;
22) $\log_{0,5} x = -1$;
23) $\log_{-8} x = \frac{1}{2}$;
24) $\lg x = -3$;
25) $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) = -3$;
26) $\log_7(x-10) = 2$.

5.5. Решение простейших логарифмических неравенств

В результате изучения темы студент должен:
уметь:
- решать простейшие логарифмические неравенства.

знать:
- понятие логарифмических неравенств;
- методику решения логарифмических неравенств.

Неравенства вида $\log_a x > c$, $\log_a x < c$, где $a > 0$, $a \neq 1$ называются простейшими логарифмическими неравенствами.

Пример 1. Решить неравенство:

$\log_3(5-2x) > 2$

$5-2x > 3^2$

5-2x > 9

x < -2

Ответ: (-∞; -2)

Пример 2.

$\log^2_{\frac{1}{2}} x > 36$

$\log^2_{\frac{1}{2}} x > 6^2 \quad \log^2_{\frac{1}{2}} x > (-6)^2$

$\log_{\frac{1}{2}} x > 6 \quad \log_{\frac{1}{2}} x > -6$

x > $\frac{1}{64}$ x > 64

Ответ: ($\frac{1}{64}$;∝) или (64;∝)

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Что называют простейшим логарифмическим неравенством?
2. Охарактеризуйте методику решения логарифмических неравенств.

Практические задания:

Решить простейшие логарифмические неравенства:

Задание на «3».

1) $\log_5 (3x + 1) > 2$

2) $\log_{-4} (x - 8) > 2$

3) $\log_{5,6} x \le 1$

4) $\log_{x+3} x \ge 1$

Задание на «4:

1) $\log_{\frac{1}{4}}(7+5x) \ge -1$

2) $\log_{15} (2x^2 - 5x + 17) < 1$

3) $\log_2 (4x + 3) < -2$

4) $\log_{x+5} x^2 < 2$

Задание на «5»:

1) $\log_3 \frac{x-1}{2x+3} \le 2$

2) $\log_{-2} 2x \le -5$

3) $\log_{0,5} x < -1$

4) $\log_{\frac{1}{8}}(x-8) \ge \log_{\frac{1}{8}}(x+3) + \log_{\frac{1}{8}} 2$

Тренажер

Задание: Решить неравенства:

1) $\log_7 (4x + 1) < 2$;
2) $\log_{\frac{1}{3}}(3-2x) \ge -1$;
3) $\log_{2,5} x < 2$;
4) $\log_{0,7} x \le 1$;
5) $\log_{\frac{1}{2}}(x+8) \ge \log_{\frac{1}{2}}(x-3) + \log_{\frac{1}{2}} 3x$;
6) $\log_2 \frac{4x-1}{x+3} \le 1$;
7) $\log_{x+7} 25 > 2$;
8) $\log_{15} (x^2 - 4x + 3) < 1$;
9) $\log_{x+1} 9 < 2$;
10) $\log_{3x-3} x > 1$;
11) $\log_{3x+3} x < 1$;
12) $\log_{0,5} x < -2$;
13) $\log_{\frac{1}{5}}(5+2x) \ge -1$;
14) $\log_3 (7x + 1) < 3$;
15) $\log_{\frac{1}{2}}(3x-2) \ge -2$;
16) $\log_2 3x < 4$;
17) $\log_{0,5} x \le 2$;
18) $\log_{-3} 2x \le -6$;
19) $\log_{-4} \frac{x-6}{2x+5} \le 2$;
20) $\log_{x-2} 3 > 1$;
21) $\log_6 (4x + 3) < -2$;
22) $\log_{x+5} 4 < 2$;
23) $\log_{3x-1} x > 1$;
24) $\log_{-9} (3x + 1) <$
25) $\log_{1,5} x < -2$;
26) $\log_{\frac{1}{3}}(x-7) \ge -2$.

Раздел 6. Основы тригонометрии

6.1. Радианное измерение углов и дуг.Тригонометрические функции числового аргумента, знаки их значений

В результате изучения темы студент должен:
уметь:
- переходить от градусной меры угла к радианной и от радианной меры угла к градусной;

- определять знаки значений тригонометрических функций.
знать:
- понятие радианной меры угла;
- понятие синуса, косинуса, тангенса и котангенса числа;
- формулу перехода от градусной меры угла к радианной;
- формулу перехода от радианной меры угла к градусной;
- знаки значений тригонометрических функций.

Радианное измерение углов и дуг. Соотношения между градусной и радианной мерой угла

Радианной мерой угла называется отношение длины соответствующей дуги к радиусу окружности. Единицей радианной меры углов является радиан.

Угол в 1 радиан – это такой угол, у которого длина дуги равна радиусу окружности.

Градусная мера угла в один радиан равна 180^0 / п ≈ 57^0.

Формула перехода от градусной меры угла к радианной:

$$a = \frac{\pi}{180^0} * L$$

a – радианная мера угла

L – градусная мера угла

<u>Пример 1</u>. $L = 240^0$; a = ?

$$a = \frac{\pi}{180^0} * 240^0 = \frac{\pi}{18^0} * 24^0 = \frac{4\pi}{3}$$

Формула перехода от радианной меры угла к градусной:

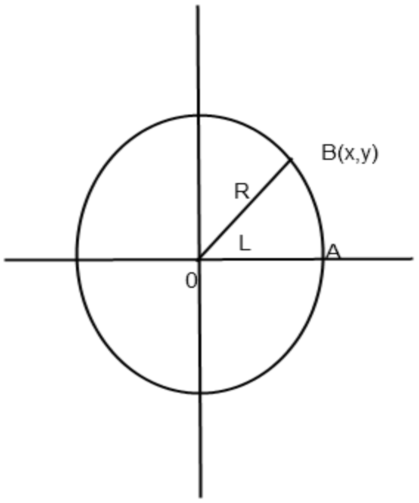
$$L = \frac{180^0}{\pi} * a$$

<u>Пример 2</u>. $a = \frac{7\pi}{6}$; L = ?

$$L = \frac{180^0}{\pi} * \frac{7\pi}{6} = 210^0$$

Синус, косинус, тангенс и котангенс числа. Тригонометрические функции числового аргумента, знаки их значений

Начертим окружность с центром в начале координат.



Отношение ординаты точки B к длине радиуса R

называется синусом t

$$\sin t = \frac{ó}{R}$$

Отношение абсциссы точки B к длине радиуса R

называется косинусом t.

$$\cos t = \frac{õ}{R}$$

Тангенсом числа t называется отношение синуса этого числа к косинусу, котангенсом – отношение косинуса к синусу.

$$tgt = \frac{\sin L}{\cos L} \qquad ñtgt = \frac{\cos t}{\sin t}$$

Sin t, cos t, tg t, ctg t называются тригонометрическими функциями.

<u>Знаки синуса, косинуса, тангенса и котангенса по четвертям:</u>

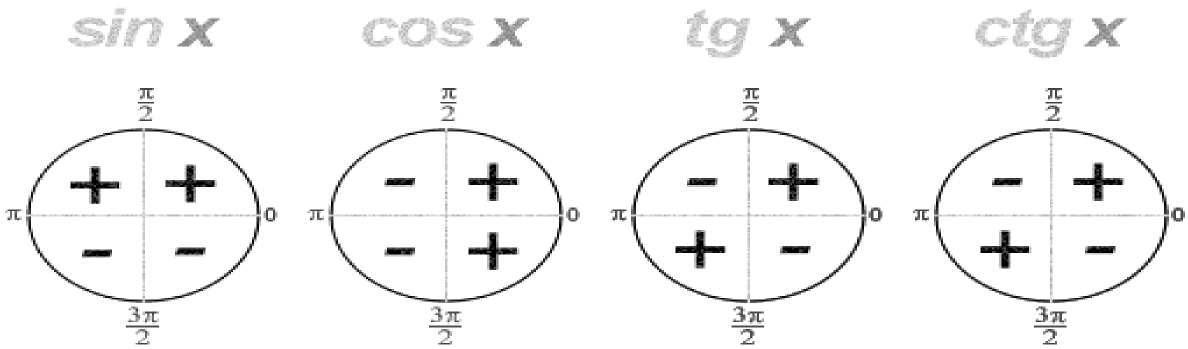


Рис.15

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Что называют радианной мерой угла?
2. Что является единицей радианной меры угла?
3. Формула перехода от градусной меры угла к радианной?
4. Формула перехода от радианной меры угла к градусной?
5. Что такое синус числа?
6. Что такое косинус числа?
7. Что такое тангенс числа?
8. Что такое котангенс числа?
9. Какие функции называются тригонометрическими?
10. Какие знаки имеют синус, косинус, тангенс и котангенс по четвертям?

Практические задания:

1. Найти радианную меру углов: 36^0; 72; 310^0
2. Найти градусную меру угла: $\frac{\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{5}$; $\frac{3\pi}{4}$
3. Какие знаки имеют:
   $\cos 160^0$; $\sin 300^0$; $\mathrm{tg}\ 320^0$; $\mathrm{ctg}\ 500^0$; $\sin 70^0$; $\cos(-200)^0$; $\mathrm{tg}\ (-45^0)$

Тренажер

<u>Задание</u>:

1. Найти радианную меру углов:

   30^0; 45^0; 60^0; 90^0; 120^0; 135^0; 150^0; 180^0; 210^0; 240^0; 270^0; 315^0; 36^0;

   72; 310^0; 315^0; 360^0; 216^0; 330^0.

2. Найти градусную меру угла:
   $\frac{5\pi}{36}$; $\frac{5\pi}{9}$; $\frac{11\pi}{18}$; $\frac{13\pi}{30}$; $\frac{4\pi}{3}$; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{6}$; $\frac{3\pi}{5}$; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{5}$; $\frac{3\pi}{4}$; $\frac{\pi}{9}$; $\frac{5\pi}{4}$; $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{7\pi}{12}$; $\frac{11\pi}{6}$;

   $\frac{11\pi}{20}$; $\frac{13\pi}{30}$.

3. Какие знаки имеют:
   $\cos 150^0$; $\sin 320^0$; $\mathrm{tg}\ 220^0$; $\mathrm{ctg}\ 400^0$; $\sin 60^0$; $\cos 200^0$; $\mathrm{tg}\ 45^0$;

   $\mathrm{ctg}\ 100^0$; $\sin 170^0$; $\cos 300^0$; $\mathrm{tg}\ 160^0$; $\mathrm{ctg}\ 315^0$; $\mathrm{tg}\ 450^0$; $\sin 400^0$; $\sin 50^0$;

$\mathrm{tg}\ 200^0$;

c

os 129^0; ctg 560^0; sin 350^0; tg 401^0; cos 29^0; ctg 237^0; sin 210^0; tg 654^0.

6.2.Соотношения между тригонометрическими функциями одного аргумента.

В результате изучения темы студент должен:
уметь:
- применять на практике тригонометрические тождества.
знать:
- тригонометрические тождества.

1. Сумма квадратов синуса и косинуса одного и того аргумента равна единице.
   $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$
2. $tgt = \dfrac{\sin t}{\cos t}$
3. $ctgt = \dfrac{\cos t}{\sin t}$
4. tg t ctg t = 1
5. $1 + tg^2 t = \dfrac{1}{\cos^2 t}$
6. $1 + ctg^2 t = \dfrac{1}{\sin^2 t}$

<u>Пример 1.</u> Найти cost, tg t, ctg t, если sin t = 0,8

$$\cos t = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{1-0{,}64} = 0{,}6$$

$$tgt = \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{0{,}8}{0{,}6} = 1\frac{1}{3}$$

$$ctgt = \frac{3}{4}$$

<u>Пример 2.</u> Упростить выражение:

$$\frac{\cos t}{1+\sin t} + tgt = \frac{\cos t}{1+\sin t} + \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{\cos^2 t + \sin t + \sin^2 t}{\cos t(1+\sin t)} = \frac{1}{\cos t}$$

Пример 3. Доказать тождество:

$$\frac{\sin t}{1+\cos t}+\frac{1+\cos t}{\sin t}=\frac{2}{\sin t}$$

$$\frac{\sin t}{1+\cos t}+\frac{1+\cos t}{\sin t}=\frac{\sin^2 t+1+2\cos t+\cos^2 t}{\sin t(1+\cos t)}=\frac{2+2\cos t}{\sin t(1+\cos t)}=\frac{2(1+\cos t)}{\sin t(1+\cos t)}=\frac{2}{\sin t}$$

$$\frac{2}{\sin t}=\frac{2}{\sin t}$$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Сформулируйте тригонометрические тождества.

Практические задания:

Задание на «3». Найти $\sin t$, tg t и ctg t, если cos t=0,3.
Задание на «4:

1. Найти tg t, если ctg t=0,2.
2. Упростить выражения:1) $1-\cos^2 t$; 2) $\sin^2 t+2+\cos^2 t$

Задание на «5»: Упростить выражения:

1) $\cos t-\cos t*\sin^2 t$;

2) $ctg^2\alpha\cos^2\alpha-ctg^2\alpha$;

3) $(1+ctg^2 t+\frac{1}{\cos^2 t})*3\sin^2 t\cos^2 t$

Тренажер

Задание:

1. Найти cos t, tg t, ctg t, если $\sin t=\frac{3}{5}$.
2. Найти sin t, tg t, ctg t, если $\cos t=\frac{5}{13}$.
3. Найти sin t, tg t, ctg t, если $\cos t=\frac{5}{17}$.
4. Найти cos t, tg t, ctg t, если $\sin t=\frac{40}{41}$.
5. Найти sin t, tg t, ctg t если $\cos t=-\frac{12}{13}$.
6. Упростите выражения:

1. $1 - \sin^2 t$;
2. $(1 - \cos t)(1 + \cos t)$;
3. $1 + \sin^2 t + \cos^2 t$;
4. $\sin t - \sin t \cos^2 t$;
5. $\sin^4 t + \cos^4 t + 2\sin^2 t \cos L$;
6. $tg^2 t - \sin^2 t \quad tg^2 t$;
7. $\cos^2 t + tg^2 t \cos^2 t$;
8. $tg^2 t\,(2\cos^2 t + \sin^2 t - 1)$;
9. $\frac{1 - tg^2 t + tg^4 t}{\cos^2 t}$;
10. $\frac{\sin t}{1+\cos t} + \frac{\sin t}{1-\cos t}$;

7. Докажите тождества:

1) $1 + \sin t + \cos t + tg t = (1 + \cos t)(1 + tg\, t)$;
2) $\frac{\sin t}{1-\cos t} = \frac{1+\cos t}{\sin t}$
3) $(ctg\, t + 1)^2 + (ctg\, t - 1)^2 = \frac{2}{\sin^2 t}$

6.3. Преобразования сумм тригонометрических функций в произведение. Преобразование произведений тригонометрических функций в суммы. Периодичность тригонометрических функций

В результате изучения темы студент должен:
уметь:
- преобразовывать суммы тригонометрических функций в произведение;
- преобразовывать произведения тригонометрических функций в суммы;
- находить период функций;
- применять формулы сложения;
- применять формулы двойного и половинного аргумента.

знать:
- формулы преобразования сумм тригонометрических функций в произведение;
- формулы преобразования произведений тригонометрических функций в суммы;
- понятие периодической функции;
- свойства периодичности тригонометрических функций;
- формулы сложения;
- формулы двойного и половинного аргумента.

Преобразования сумм тригонометрических функций в произведение

1. $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$
2. $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$
3. $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$
4. $\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}$
5. $tg\alpha + tg\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$
6. $tg\alpha - tg\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$

<u>Пример 1</u>. Вычислить:

$$\sin 75^0 + \sin 15^0 = 2\sin\frac{75^0+15^0}{2}\cos\frac{75^0-15^0}{2} = 2\sin 45^0\cos 30^0 = 2\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

<u>Пример 2</u>. Вычислить:

$$\sin\frac{5\pi}{12} - \sin\frac{\pi}{12} = 2\sin\frac{\frac{5\pi}{12}-\frac{\pi}{12}}{2}\cos\frac{\frac{5\pi}{12}+\frac{\pi}{12}}{2} = 2\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4} = 2\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Преобразование произведений тригонометрических функций в суммы

1. $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta))$
2. $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta))$
3. $\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$

<u>Пример 3</u>. Вычислить:

$$\sin 75^0\cos 15^0 = \frac{1}{2}\left(\sin\left(75^0+15^0\right)+\sin\left(75^0-15^0\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\sin 90^0 + \sin 60^0\right) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$$

Периодичность тригонометрических функций

Функцию f называют *периодической* с периодом T≠0, если для любого x из области определения значения этой функции в точках x, x-T, x+T равны, т. е.

$$f(x + T) = f(x) = f(x - T)$$

Все тригонометрические функции y = sin x, y = cos x, y = tg x, y = ctg x называются ***периодическими.***

Свойства периодичности тригонометрических функций можно выразить тождествами:

$$\sin\alpha = \sin(\alpha + 2\pi k)$$

$$\cos\alpha = \cos(\alpha + 2\pi k)$$

$$tg\alpha = tg(\alpha + \pi k)$$

$$ctg\alpha = ctg(\alpha + \pi k)$$

Наименьший положительный период для синуса и косинуса равен 2π, для тангенса и котангенса π.

Пример 4. Вычислить:

$$\cos 3660^0 = \cos(360^0 * 10 + 60^0) = \cos 60^0 = \frac{1}{2}$$

Пример 5. Вычислить:

$$\sin(-300^0) - tg(-150^0) = \sin(-300^0 + 360^0) - tg(-150^0 + 180^0) = \sin 60^0 - tg30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

Пример 6. Найти период функции:

y= sin3x

пусть T – искомый период

sin 3x = sin 3 (x + T) = sin (3x + 3T)

3T = 2π

T=$\frac{2\pi}{3}$

Пример 7. Найти период функции:

$$y=\cos\frac{x}{2}$$

пусть Т – искомый период

$$\cos\frac{x}{2}=\cos\left(\frac{x+T}{2}\right)=\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{T}{2}\right)$$

$$\frac{T}{2}=2\pi$$

Т = 4 π

Формулы сложения

1. $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$
2. $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$
3. $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$
4. $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$
5. $tg(\alpha+\beta)=\dfrac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha tg\beta}$

<u>Пример 8</u>. Найти $\sin(\alpha+\beta)$, если $\sin\alpha=\frac{3}{5}$; $\cos\beta=-\frac{5}{13}$.

$$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=-\frac{4}{5}$$

$$\sin\beta=-\sqrt{1-\left(-\frac{5}{13}\right)^2}=-\frac{12}{13}.$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{5}{13}\right)+\left(-\frac{4}{5}\right)\cdot\left(-\frac{12}{13}\right)=\frac{33}{65}$$

<u>Пример 9</u>. Найти $tg(\alpha-\beta)$, если $tg\alpha=\frac{1}{2}$, $tg\beta=\frac{1}{3}$.

$$tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha tg\beta}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{7}{6}}=\frac{1}{7}$$

Формулы двойного и половинного аргумента

1) $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$
2) $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$

3) $tg2\alpha=\dfrac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$

4) $\sin^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{2}$ $\qquad \sin\dfrac{\alpha}{2}=\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$

5) $\cos^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1+\cos\alpha}{2}$ $\qquad \cos\dfrac{\alpha}{2}=\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$

6) $tg\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$

<u>Пример 10</u>. Найти $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$, если $\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$

$$\cos\alpha=-\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=-\frac{3}{5}$$

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=-\frac{24}{25}$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\left(-\frac{3}{5}\right)^2-\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{9}{25}=\frac{16}{25}=-\frac{7}{25}.$$

<u>Пример 11</u>. Найти $tg\dfrac{\alpha}{2}$, если $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

$$\cos\alpha=-\sqrt{1-\frac{5}{9}}=-\frac{2}{3}$$

$$tg\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{\frac{\sqrt{5}}{3}}{1-\frac{2}{3}}=\sqrt{5}$$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1.Запишите формулы преобразования сумм тригонометрических функций в произведение.
2. Запишите формулы преобразования произведений тригонометрических функций в суммы.
3. Какую функцию называют периодической?
4. Перечислите тригонометрические функции.
5. Запишите формулы свойств периодичности тригонометрических функций.
6. Запишите формулы сложения.
7. Запишите формулы двойного и половинного аргумента.

Практические задания:

Упростить выражения:

Задание на «3».

1) $\sin 20^0 \cos 40^0 + \cos 20^0 \sin 40^0$

2) $\sin 45^0 \cos 15^0 - \cos 45^0 \sin 15^0$

Задание на «4:

1) $\cos 12^0 \cos 18^0 - \sin 12^0 \sin 18^0$

2) $\cos 98^0 \cos 8^0 + \sin 98^0 \sin 8^0$

3) $\dfrac{tg22^0 + tg23^0}{1 - tg22^0 tg23^0}$

4) $\dfrac{tg45^0 - tg15^0}{1 + tg15^0 tg45^0}$

Задание на «5»:

$$\frac{\sin^3 19^0 - \cos^3 19^0}{\sin 19^0 - \cos 19^0} - \frac{\sin^2 57^0 + \sin^2 33^0}{tg19^0 + ctg19^0}$$

Тренажер

Задание:

1. Найти $\sin(\alpha - \beta)$, если $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$, $\sin\beta = -\frac{24}{25}$.
2. Найти $\sin(\alpha + \beta)$, если $\cos\alpha = -\frac{8}{17}$, $\cos\beta = \frac{4}{5}$.
3. Найти $tg(\alpha + \beta)$, если $tg\alpha = \frac{3}{4}$, $\mathrm{tg}\beta = \frac{3}{5}$.
4. Найти $tg(\alpha + \beta)$, если $tg\alpha = \frac{1}{5}$, $\sin\beta = \frac{2}{3}$.
5. Найти $\sin(\alpha + \beta)$ и $\sin(\alpha - \beta)$, если $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$.
6. Найти $\cos(\alpha + \beta)$ и $\cos(\alpha - \beta)$, если $\sin\alpha = \frac{8}{17}$, $\cos\beta = \frac{3}{5}$.
7. Найти $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$, $tg\frac{\alpha}{2}$, если $\cos\alpha = -\frac{7}{25}$.
8. Найти $\sin 2\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{4}{5}$.
9. Найти $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$ и $tg2\alpha$, если $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$.
10. Найти $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $tg2\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{5}{13}$.

11. Найти $\sin 2\alpha$, $\cos 2\beta$, $\sin(\alpha-\beta)$, $\cos(\alpha+\beta)$, если $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, $\cos\beta = -\frac{5}{13}$.

12. Представить произведение тригонометрических функций в виде суммы:

1) $\sin 10^0 \cdot \sin 20^0$;

2) $\sin 45^0 \cdot \cos 30^0$.

13. Представить сумму тригонометрических функций в виде произведения:

1) $\sin 105^0 + \sin 75^0$;

2) $\cos 105^0 - \cos 75^0$;

3) $\sin 105^0 - \sin 75^0$;

4) $\sin\frac{11\pi}{12} + \sin\frac{5\pi}{12}$;

5) $\sin\frac{11\pi}{12} - \sin\frac{5\pi}{12}$;

6) $\cos\frac{\pi}{12} + \sin\frac{7\pi}{12}$;

7) $\sin 40^0 + \sin 20^0$.

14. Вычислить:

1) tg 405^0; 2sin 750^0; sin 1843^0; cos 7230^0; sin 900^0; tg 585^0; ctg 750^0;

2) tg(-135^0) - tg 225^0;

3) 2sin 750^0 – 3cos900^0 + tg405^0;

4) sin(-330^0) + sin (-690^0)

15. Найти период функции:

1) y = tg 2x;

2) y = ctg $\frac{x}{5}$;

3) y =cos 3x;

4) y = cos $\frac{x}{4}$;

5) y = cos $\frac{x}{5}$.

6.4. Свойства и графики тригонометрических функций. Обратные тригонометрические функции

В результате изучения темы студент должен:
уметь:
- строить графики тригонометрических функций.

знать:
- свойства функции y = sin x;
- свойства функции y = cos x;
- свойства функции y = tg x;
- свойства функции y = ctg x;
- свойства функции y = arcsin x;
- свойства функции y = arccos x;
- свойства функции y = arctg x;
- свойства функции y = arcctg x.

Свойства и графики тригонометрических функций. Обратные тригонометрические функции.

1. y = sin x

Свойства:

1. Область определения R: x – любое число.
2. Область значений: [-1;1].
3. Функция нечетная, периодическая с периодом 2π; ограниченная, пересекает ось ОУ в точке y = 0, ось ОХ в точках x = πn, n ±0, ±1, ±2, …
4. Функция возрастает на каждом из отрезков $\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi n; \frac{\pi}{2}+2\pi n\right]$ и убывает на каждом из отрезков $\left[\frac{\pi}{2}+2\pi n; \frac{3\pi}{2}+2\pi n\right]$.
5. В точках x = $\frac{\pi}{2}+2\pi n$ имеет максимумы (y = 1), в точках x = -$\frac{\pi}{2}+2\pi n$ минимумы (y = -1).

График называется *синусоидой.*

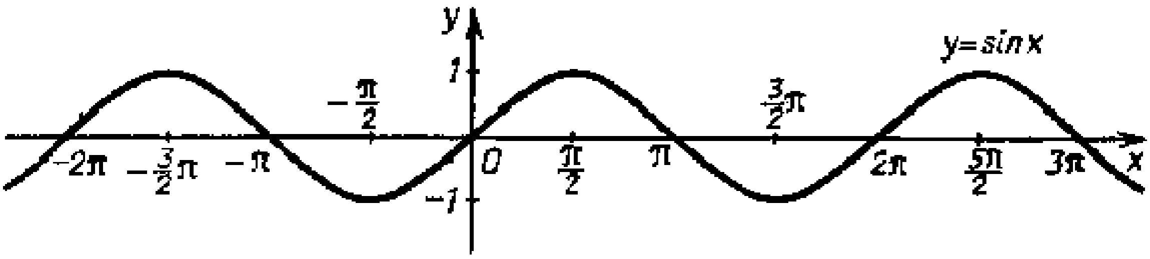


Рис.16

2.<u>y = cos x</u>

<u>Свойства:</u>

1. Область определения R: х – любое число.
2. Область значений: [-1;1].
3. Функция четная, периодическая с периодом 2π; ограниченная, пересекает ось ОУ в точке у = 1, ось ОХ в точках х = $\frac{\pi}{2}+\pi n$
4. Функция возрастает на каждом из отрезков $[-\pi+2\pi n; 2\pi n]$ и убывает $[2\pi n; \pi+2\pi n]$, n ±0, ±1, ±2, …
5. В точках х = $2\pi n$ имеет максимумы (у = 1), в точках х = $\pi+2\pi n$ минимумы (у = -1).

График называется *косинусоидой.*

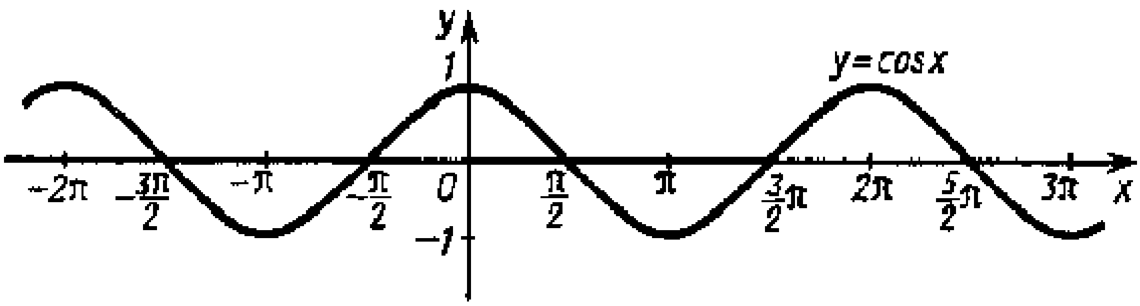


Рис. 17

3.<u>y = tg x</u>

<u>Свойства:</u>

1. Область определения R: х – любое число, не равное $\frac{\pi}{2}+\pi n$.
2. Область значений: у- любое число.

3. Функция четная, периодическая с периодом π; неограниченная, пересекает ось ОУ в точке у = 0, ось ОХ в точках х = πn.

4. Функция возрастает на каждом из интервалов $\left[-\frac{\pi}{2}+\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi n\right]$, экстремумов не имеет.

График называется *тангенсоидой.*

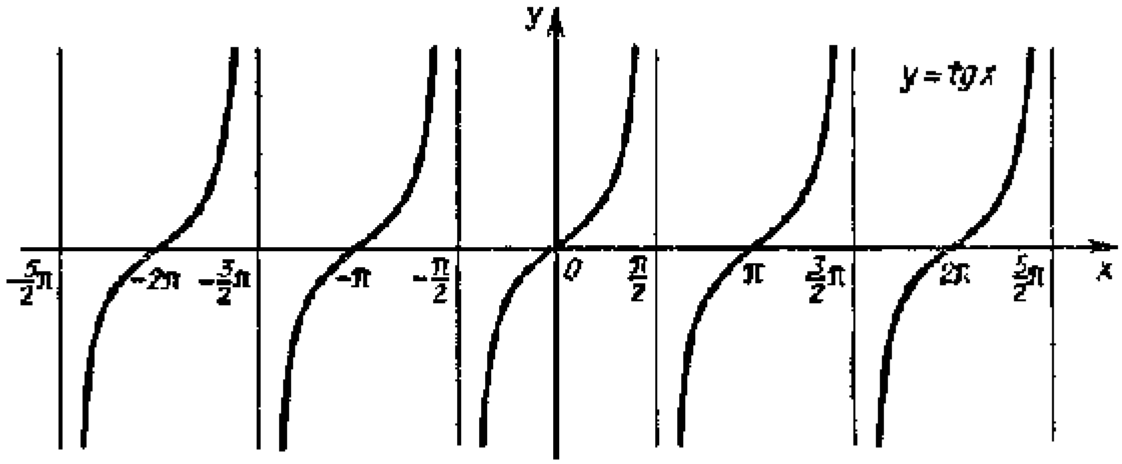


Рис.18

<u>4.у = ctg x</u>

<u>Свойства:</u>

1. Область определения R: х – любое число, не равное πn, n ±0, ±1, ±2, …
2. Область значений: у- любое число.
3. Функция четная, периодическая с периодом π; неограниченная, ось ОУ не пересекает, ось ОХ пересекает в точках х = $\frac{\pi}{2}+\pi n$.

4. Функция убывает на каждом из интервалов $[\pi n; \pi+\pi n]$, экстремумов не имеет.

График называется *котангенсоидой.*

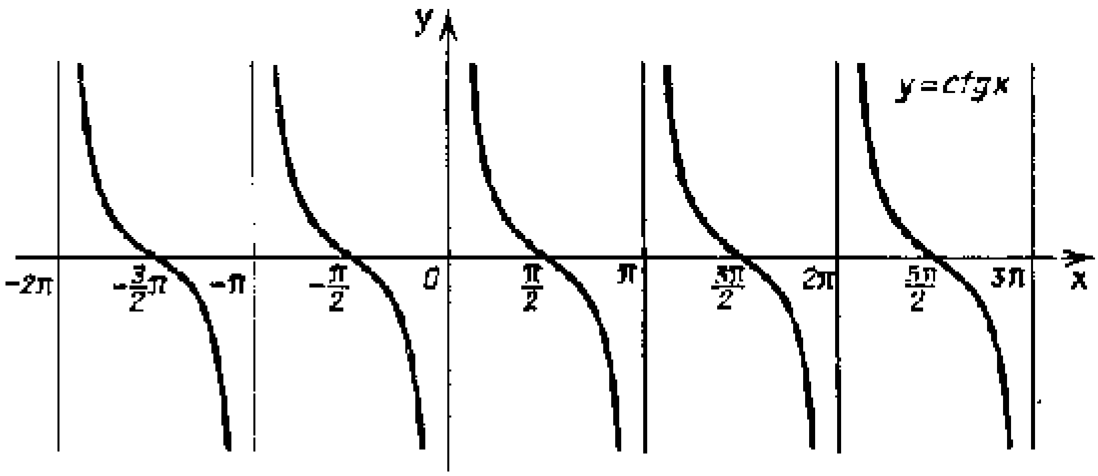


Рис.19

<u>5.y = arcsin x</u>

<u>Свойства:</u>

1. Область определения R: x Є [-1;1].
2. Область значений: y Є $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.
3. Функция нечетная, непериодическая, ограниченная, пересекает ось ОУ и ось ОХ в начале координат: x = 0, y = 0.

4. Функция возрастает на всей области определения, экстремумов не имеет.

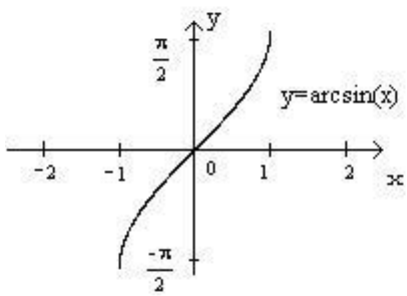


Рис.20

6. <u>y = arccos x</u>

<u>Свойства:</u>

1. Область определения R: x Є [-1;1].
2. Область значений: y Є $[0;\pi]$.

3. Функция ни четная ни нечетная, непериодическая, ограниченная, пересекает ось ОУ в точке у = $\frac{\pi}{2}$, ось ОХ в точках х = 1.
4. Функция убывает на всей области определения, экстремумов не имеет.

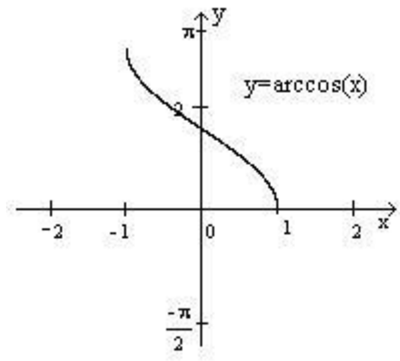


Рис.21

7. <u>у = arctg x</u>

<u>Свойства:</u>

1. Область определения R: х – любое.
2. Область значений: у Є $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.
3. Функция нечетная, непериодическая, ограниченная, пересекает ось ОУ и ось ОХ в начале координат: х = 0, у = 0.
4. Функция возрастает на всей области определения, экстремумов не имеет.

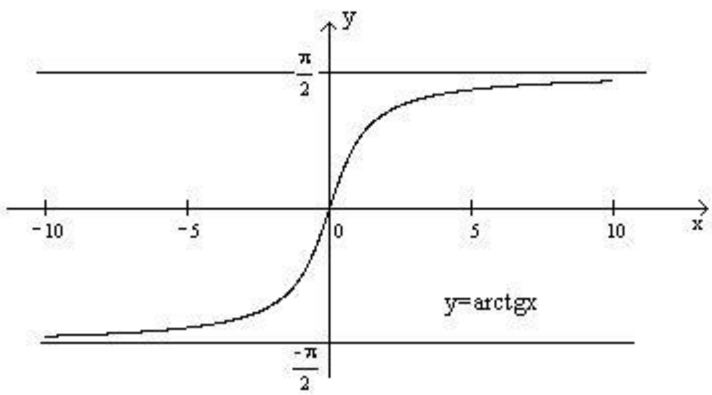


Рис.22

8. <u>у = arcctg x</u>

Свойства:

1. Область определения R: x - любое
2. Область значений: y Є $[0;\pi]$.
3. Функция ни четная ни нечетная, непериодическая, ограниченная, пересекает ось ОУ в точке y = $\frac{\pi}{2}$, ось ОХ не пересекает.
4. Функция убывает на всей области определения, экстремумов не имеет.

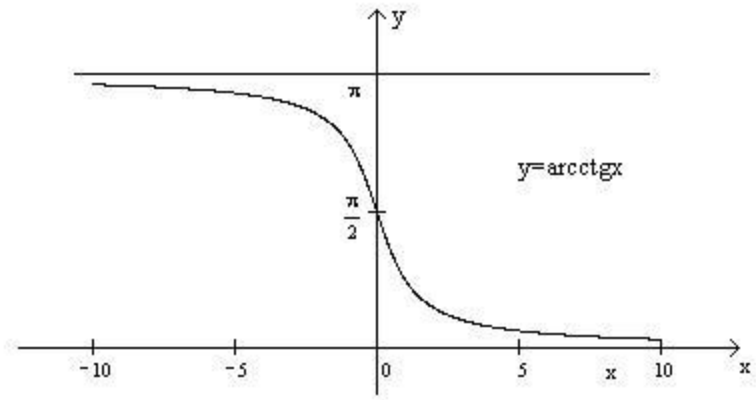


Рис.23

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1.Запишите свойства функции y = sin x и постройте схематично график.
2. Запишите свойства функции y = cos x и постройте схематично график.
3. Запишите свойства функции y = tg x и постройте схематично график.
4. Запишите свойства функции y = ctg x и постройте схематично график.
5. Запишите свойства функции y = arcsin x и постройте схематично график.
6. Запишите свойства функции y = arcos x и постройте схематично график.
7. Запишите свойства функции y = arctg x и постройте схематично график.
8. Запишите свойства функции y = arcctg x и постройте схематично график.

6.5. Простейшие тригонометрические уравнения и неравенства

В результате изучения темы студент должен:
уметь:
- решать простейшие тригонометрические уравнения.
знать:

- понятие тригонометрических уравнений;
- понятие тригонометрических неравенств.
- формулы корней тригонометрических уравнений.

Простейшие тригонометрические уравнения и неравенства.

Уравнения вида sin x = a , cos x = a, tg x = a, ctg x = a называются *тригонометрическими.*

Неравенства вида sin x < a , cos x > a, tg x ≤ a, ctg x ≥a называются *тригонометрическими*.

$\boxed{1.\ \sin x = a \qquad x = (-1)^n \arcsin a + \pi n}$

Пример 1. Решить уравнение sin x = $\frac{1}{2}$

$$x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{2} + \pi n$$

$$x = (-1)^n \frac{5\pi}{6} + \pi n$$

Пример 2. Решить уравнение sin x = $\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$x = (-1)^n \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} + \pi n$$

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n$$

$\boxed{2.\ \cos x = a \qquad x = \pm \arccos a + 2\pi n}$

Пример 3. Решить уравнение cos x = $\frac{1}{2}$

$$x = \pm \arccos \frac{1}{2} + 2\pi n$$

$$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$$

Пример 4. Решить уравнение cos $(2x - \frac{\pi}{4})$ = -$\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$2x-\frac{\pi}{4}=\pm\ \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+2\pi n$$

$$2x-\frac{\pi}{4}=\pm\ \frac{5\pi}{6}+2\pi n$$

$$2x=\pm\ \frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{4}+2\pi n$$

$$x=\pm\ \frac{5\pi}{12}+\frac{\pi}{8}+2\pi n$$

3. tg x = a	x = arctg a + πn

Пример 5. Решить уравнение tg x = $\sqrt{3}$

$$x=\operatorname{arctg}\sqrt{3}+\pi n$$

$$x=\frac{\pi}{3}+\pi n$$

4. ctg x = a	x = arcctg a + πn

Пример 6. Решить уравнение ctg 2x = -1

$$2x=\operatorname{arcctg}(-1)+\pi n$$

$$2x=\frac{3\pi}{4}+\pi n$$

$$x=\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1.Какие уравнения называются тригонометрическими?
2. Какие неравенства называются тригонометрическими?
3. Запишите формулу корня тригонометрического уравнения sin x = a.
4.Запишите формулу корней тригонометрического уравнения cos x =a.
5. Запишите формулу корня тригонометрического уравнения tg x =a.
6. Запишите формулу корня тригонометрического уравнения ctg x =a.

Практические задания:

Решить уравнения:
Задание на «3».

1) cos x = $-\frac{1}{2}$;

2) tg x = 0 ;
3) sin x = -1
Задание на «4:
1) 2 cos x - $\sqrt{3}$ =0;
2) 2sin x =1;
3) $\sqrt{3}$ tg 3x =1;
Задание на «5»:

1) ctg $\left(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{2}\right)=\sqrt{3}$;

2) 2sin $\left(\frac{\pi}{3}-\frac{x}{4}\right)=\sqrt{2}$;

3) 2cos $\left(\frac{3\pi}{4}+2x\right)$=-$\sqrt{2}$

Тренажер

Задание:

Решить уравнения:

1) sin x =-$\frac{1}{2}$;
2) cos x =$\frac{\sqrt{2}}{2}$;
3) tg x =1;
4) ctg x = 1;
5) 2cos x - 1=0;
6) $\sqrt{3}$ tg x - 1=0;
7) tg $\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$=-1;
8) cos x =-1;
9) cos x =-$\frac{\sqrt{2}}{2}$;
10) sin x = -$\frac{\sqrt{3}}{2}$;
11) tg x = -$\frac{1}{\sqrt{3}}$;
12) tg x =0;

13) $\operatorname{tg} x + \sqrt{3} = 0$;

14) $\sin \frac{x}{4} = \frac{1}{2}$;

15) $\operatorname{ctg} x + 1 = 0$;

16) $\sqrt{3}\operatorname{ctg} x - 1 = 0$;

17) $\cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) = -1$;

18) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = -1$;

19) $2\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{4}\right) = \sqrt{3}$;

20) $2\cos\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) = \sqrt{2}$;

21) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

22) $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$;

23) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{6}\right) = \frac{1}{4}$;

24) $\operatorname{tg} 3x = \frac{\sqrt{3}}{3}$;

Раздел 7. Прямыеи плоскости в пространстве

7.1. Аксиомы стереометрии и простейшие следствия из них.Взаимное расположение двух прямых в пространстве

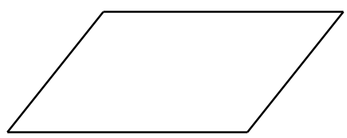
В результате изучения темы студент должен:
знать:
- понятие стереометрии;
- основные фигуры в пространстве;
- аксиомы стереометрии;
- следствия из аксиом стереометрии;
- понятие параллельных прямых в пространстве.
- понятие скрещивающихся прямых.

Аксиомы стереометрии и простейшие следствия из них

Стереометрия – раздел геометрии, в котором изучаются фигуры в пространстве.

Основными фигурами в пространстве являются точка, прямая и плоскость.

Плоскость бесконечна. Будем изображать часть плоскости в виде параллелограмма. Плоскости обозначаются греческими буквами $\alpha, \beta, \gamma \ldots$



Аксиомы стереометрии:

1. Какова бы ни была плоскость, существуют точки, принадлежащие этой плоскости, и точки, не принадлежащие ей.
2. Если две различные плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой, проходящей через эту точку.
3. Если две различные прямые имеют общую точку, то через них можно провести плоскость и притом только одну.

Следствия из аксиом стереометрии:

1. Через прямую и не лежащую на ней точку можно провести плоскость и притом только одну.
2. Если две точки прямой принадлежат плоскости, то вся прямая принадлежит этой плоскости.

3. Через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести плоскость и притом только одну.

Взаимное расположение двух прямых в пространстве

Две прямые в пространстве называются *параллельными*, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.

Прямые, которые не пересекаются и не лежат в одной плоскости, называются *скрещивающимися.*

Теорема: Через точку вне данной прямой можно провести прямую, параллельную этой прямой, и притом только одну.

Дано: прямая а.

АЄ прямой а

а ll a_1

Доказать: a_1 – единств.

Доказательство.

Проведем через прямую а и точку А плоскость α. Допустим, что существует другая прямая a_2, проходящая через точку а и параллельная прямой а. через прямые а и a_2 можно провести плоскость α_2. Плоскость α_2 проходит через прямую а и точку А. следовательно, она совпадает с плоскостью α. Значит, прямая a_1и a_2 совпадают.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1.Что такое стереометрия?
2. Перечислите основные фигуры в пространстве.
3. Как изображается плоскость?
4. Сформулируйте аксиомы стереометрии.
5. Сформулируйте следствия из аксиом стереометрии.
6. Какие прямые в пространстве называются параллельными?
7. Какие прямые в пространстве называются скрещивающимися?

7.2. Угол между прямыми. Признак параллельности прямой и плоскости.

Признак параллельности плоскостей

В результате изучения темы студент должен:
знать:
- признак параллельности прямых;
- признак параллельности прямой и плоскости;
- признак параллельности плоскостей.

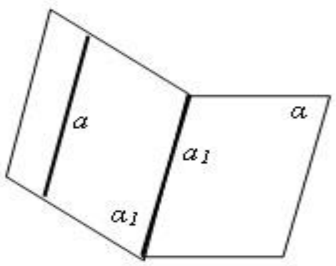
Угол между прямыми. Признак параллельности прямой и плоскости

Две пересекающиеся прямые образуют смежные и вертикальные углы. Вертикальные углы равны, а смежные дополняют друг друга до 180^0. Угол между перпендикулярными прямыми равен 90^0. Угол между параллельными прямыми равен 0.

Признак параллельности прямых: две прямые, параллельные третьей прямой, параллельны.

Признак параллельности прямой и плоскости: прямая и плоскость называются параллельными, если они не пересекаются.

Теорема: Если прямая, не принадлежащая плоскости, параллельна какой-нибудь прямой в этой плоскости, то она параллельна и самой плоскости.



Дано: плоскость α

прямая a Є α

прямая a_1 Є α

a ll a_1

Доказать: прямая a ll α

Рис. 24 Доказательство.

Через прямые a и a_1 проведем плоскость α_1. Плоскости α и α_1 пересекаются по прямой a_1. если бы прямая a пересекала плоскость α, то точка пересечения принадлежала бы прямой a_1. но это невозможно, т. к. a ll a_1. Итак, прямая a не пересекает плоскость α. Следовательно, a ll α.

Признак параллельности плоскостей.

Признак параллельности плоскостей: две плоскости называются параллельными, если они не пересекаются.

Теорема: Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

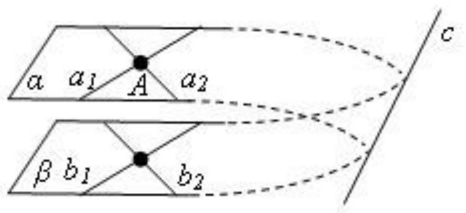


Рис. 25

Дано: плоскости α и β

прямые a_1 и a_2 Є α

прямые $в_1$ и $в_2$ Є β

a_1 ll $в_1$

a_2 ll $в_2$

Доказать: α ll β

Доказательство:

Допустим, что α ll β, т. е. пересекаются по некоторой прямой с. Так как a_1 ll $в_1$ и

a_2 ll $в_2$, то они не пересекают прямую с. Значит, в плоскости α через точку А проходят две прямые (a_1 и a_2), параллельные прямой с. Но это невозможно по аксиоме параллельных прямых. Пришли к противоречию. Значит, α ll β.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Сформулируйте признак параллельности прямых.
2. Сформулируйте признак параллельности прямой и плоскости.
3. Сформулируйте признак параллельности плоскостей.

7.3. Параллельное проектирование и его свойства. Перпендикулярность прямой и плоскости. Ортогональное проектирование.

В результате изучения темы студент должен:
знать:
- свойства фигуры на плоскости;
- понятие прямой, перпендикулярной плоскости;
- свойства перпендикулярности прямой и плоскости;
- понятие ортогонального проектирования.

Параллельное проектирование и его свойства. Перпендикулярность прямой и плоскости. Ортогональное проектирование.

Для изображения пространственных фигур на плоскости используется параллельное проектирование.

Дана плоскость α с чертежом. Выберем произвольную прямую а, пересекающую плоскость чертежа α.

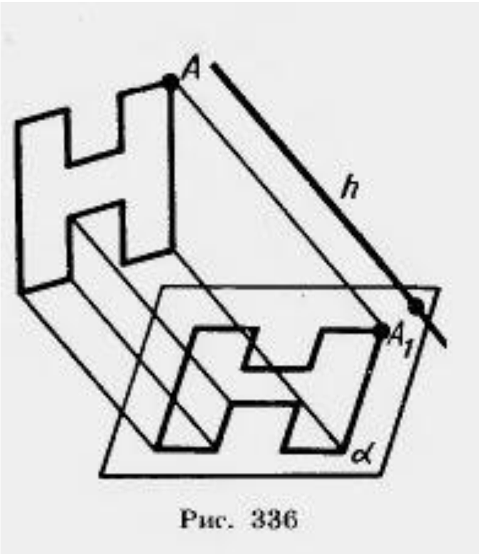


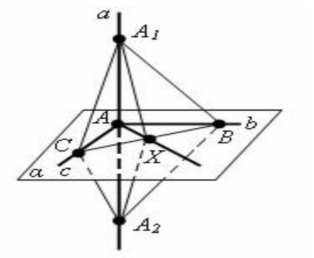
Рис. 26

<u>Свойства фигуры на плоскости:</u>

1. Прямолинейные отрезки фигуры изображаются на плоскости чертежа отрезками;
2. Параллельные отрезки фигуры изображаются на плоскости параллельными отрезками;
3. Отношение отрезков одной прямой или параллельных прямых сохраняется при параллельном проектировании.

Прямая, пересекающая плоскость, называется перпендикулярной этой плоскости, если она перпендикулярна любой прямой, которая лежит в данной плоскости и проходит через точку пересечения.

<u>Теорема</u>: Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна данной плоскости.



Дано: плоскость α

$a \perp в$

$a \perp c$

прямая а пересекает α

Доказать: прямая $a \perp \alpha$

Доказательство:

1) Проведем произвольную прямую х через точку А в плоскости α, перпендикулярную прямой а.
2) Проведем в плоскости α произвольную прямую, не проходящую через точку А и пересекающую прямые в, с и х. пусть В, С и Х – точки пересечения.
3) Отложим на прямой а от точки А в разные стороны равные отрезки $AA_1 = AA_2$. Соединим точки В, С и Х с точками A_1 и A_2.
4) Рассмотрим ΔA_1CA_2 – равнобедренный (т. к. АС – медиана и высота). ΔA_1BA_2 – равнобедренный (т. к. АВ – медиана и высота).

   Значит, $\Delta A_1BC = \Delta A_2BC$ (по 3 признаку). Следовательно, $A_1BX = A_2BX$, Следовательно, $\Delta A_1BX = \Delta A_2BX$ (по 1 признаку). Следовательно, $A_1X = A_2X$, следовательно ΔA_1XA_2 – равнобедренный. Значит, АХ является высотой. Следовательно, прямая $a \perp \alpha$

<u>Свойства перпендикулярности прямой и плоскости:</u>

1. Если плоскость перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой.
2. Две прямые, перпендикулярные одной и той же плоскости, параллельны.

Ортогональное проектирование применяется в черчении – это параллельное проектирование прямыми.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Сформулируйте свойства фигур на плоскости.

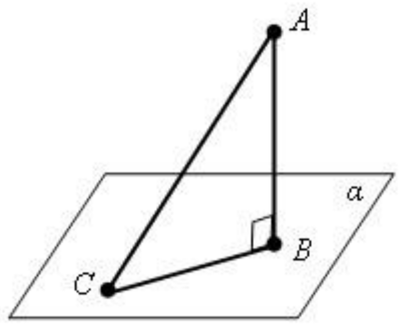
2. Какая прямая, пересекающая плоскость, называется прямой, перпендикулярной этой плоскости?
3. Сформулируйте свойства перпендикулярности прямой и плоскости.
4. Что такое ортогональное проектирование?

7.4.Перпендикуляр и наклонная. Угол между прямой и плоскостью. Двугранный угол. Угол между плоскостями. Перпендикулярность двух плоскостей

В результате изучения темы студент должен:
знать:
- понятие перпендикуляра к плоскости;
- понятие основания перпендикуляра;
- понятие наклонной;
- понятие основания наклонной;
- понятие проекции наклонной;
- понятие угла между прямой и плоскостью;
- понятие двугранного угла;
- понятие граней и ребер;
- понятие угла между плоскостями;
- признак перпендикулярности двух плоскостей.

Перпендикуляр и наклонная. Угол между прямой и плоскостью.

Дана плоскость α и не лежащая на ней точка A, точки C и B Є α.



AB - перпендикуляр

B – основание перпендикуляра

AC – наклонная

C – основание наклонной

Рис. 28

Отрезок, соединяющий данную точку с точкой плоскости и лежащий на прямой, перпендикулярной плоскости, называется *перпендикуляром,* опущенным из данной точки на данную плоскость. Конец этого отрезка, лежащий в плоскости, называется *основанием перпендикуляра.*

Отрезок, соединяющий данную точку с точкой плоскости, не являющийся перпендикуляром к плоскости, называется *наклонной*. Конец этого отрезка, лежащий в плоскости, называется *основанием наклонной.*

Отрезок, соединяющий основание перпендикуляра и наклонной, проведенных из одной и той же точки, называется *проекцией наклонной.*

Угол между прямой и ее проекцией на плоскость называется *углом между прямой и плоскостью.*

Двугранный угол. Угол между плоскостями. Перпендикулярность двух плоскостей

Фигура, образованная двумя полуплоскостями с общей ограничивающей их прямой, называется *двугранным углом.* Полуплоскости называются *гранями*, ограничивающая их прямая - *ребром.*

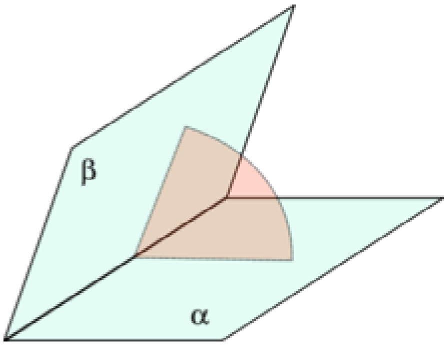
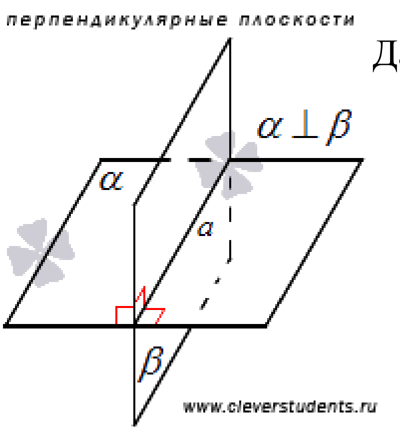


Рис. 29

Проведем плоскость γ, пересекающую плоскости α и β. Она пересекает данные плоскости по двум прямым. Угол между этими прямыми называется *углом между* данными *плоскостями.*

Две пересекающиеся плоскости называются перпендикулярными, если третья плоскость, перпендикулярная прямой пересечения этих плоскостей, пересекает их по перпендикулярным прямым.

<u>Теорема</u>. Если плоскость проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны.



Дано: плоскости α и β

прямая в $\perp \alpha$

прямая в Є β

α и β пересекаются по прямой с

Доказать: $\alpha \perp \beta$

Доказательство.

Проведем в плоскости α через точку В прямую а, перпендикулярную прямой с. проведем через прямые а и в плоскость γ. Она перпендикулярна прямой с, т. к. с $\perp$ а и с $\perp$ в. Так как прямая а $\perp$ в, то $\alpha \perp \beta$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Что называют перпендикуляром к плоскости?
2. Что называют основанием перпендикуляра?
3. Что называют наклонной?
4. Что называют основанием наклонной?
5. Что называют проекцией наклонной?
6. Что называют углом между прямой и плоскостью?
7. Что называют двугранным углом?
8. Что называют гранью?
9. Что называют ребром?
10. Что называют углом между плоскостями?
11. Сформулируйте признак перпендикулярности двух плоскостей.

Тренажер

Задание:

Решить задачи:

1. Один из углов при пересечении двух прямых равен 73^0. Найти остальные углы.
2. Один из углов при пересечении двух прямых в 3 раза меньше другого. Найти углы.
3. Один из углов равнобедренного треугольника равен 67^0. Найти остальные углы.
4. У треугольника один из внутренних углов равен 55^0, а один из внешних 140^0. Найти остальные внутренние углы треугольника.
5. Один из внешних углов равнобедренного треугольника равен 120^0. Найти внутренние углы треугольника.
6. Два внешних угла треугольника равны 110^0 и 133^0. Найти третий внешний угол.

7. Один из углов при пересечении двух прямых на 35^0 больше другого. Найти эти углы.
8. Из точки к плоскости проведены две наклонные. Найти длины этих наклонных, если одна из них на 26 см больше другой, а проекции наклонных равны 12 см и 40 см.
9. Из точки к плоскости проведены две наклонные. Найти длины этих наклонных, если наклонные относятся как 1:2, а проекции наклонных равны 1 см и 7 см.
10. Найти углы, которые получаются при пересечении двух прямых, если сумма трех этих углов равна 270^0
11. Найти смежные углы, если их градусные меры относятся как 3:7.
12. Найти углы треугольника, если они пропорциональны числам 2,3,4.

Раздел 8. Векторы и координаты

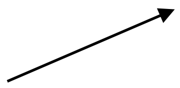
8.1.Векторы на плоскости и в пространстве. Действия над векторами с заданными координатами

В результате изучения темы студент должен:
уметь:
- находить координаты векторов;
- выполнять действия над векторами с заданными координатами.

знать:
- понятие и обозначение векторов;
- понятие одинаково направленных векторов;
- понятие противоположно направленных векторов;
- понятие абсолютной величины векторов;
- понятие нулевого вектора;
- формулы координат вектора на плоскости и в пространстве;
-формулы суммы векторов на плоскости и в пространстве;
- формулы произведения векторов на плоскости и в пространстве;
- формулы скалярного произведения векторов на плоскости и в пространстве.

Векторы на плоскости и в пространстве

Вектор - направленный отрезок. Направление вектора определяется указанием его начала и конца. Направление вектора отмечается стрелкой. Для обозначения векторов используются латинские буквы: *а, в, с, …;А, В, С,* …



Начало вектора ставится на первом месте; вместо слова «вектор» над буквами ставится стрелка или черта.

a, a, BA, BA

Векторы называются *одинаково направленными*, если полупрямые одинаково направлены.

Векторы называются *противоположно направленными*, если полупрямые противоположно направлены.

Абсолютная величина вектора – длина отрезка, изображающего вектор.

Обозначается: $|a|$

Нулевой вектор – вектор, у которого начало совпадает с концом (у него направления нет, абсолютная величина равна 0). Обозначается: (а).

Равные векторы одинаково направлены и равны по абсолютной величине.

<u>Координаты вектора:</u>

1. На плоскости: начало $A(x_1; y_1)$ и конец $B(x_2; y_2)$ – называются числа $(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$.

2. В пространстве: $A(x_1; y_1; z_1)$ и конец $B(x_2; y_2; z_2)$ – называются числа

$(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_1 - z_2)$.

Действия над векторами с заданными координатами.

<u>Действия над векторами:</u>

1. <u>*сумма векторов:*</u>

1) На плоскости – суммой векторов $а (а_1; а_2)$ и $в (в_1; в_2)$ называется вектор $с (а_1 + в_1; а_2 + в_2)$.

$$а (а_1; а_2) + в (в_1; в_2) = с (а_1 + в_1; а_2 + в_2).$$

2) в пространстве -

$$а\ (а_1;\ а_2;\ а_3) + в\ (в_1;\ в_2; в_3) = с\ (а_1 + в_1;\ а_2 + в_2;\ а_3 + в_3).$$

2. *Произведение:*

1) на плоскости – произведением вектора $(а_1;\ а_2)$ на число k называется вектор

$(k\ a_1;\ k\ a_2)$, т. е.

$$(а_1;\ а_2)\cdot k = (k\ а_1;\ k\ а_2)$$

2) в пространстве

$$(а_1;\ а_2;\ а_3)k = (k\ а_1;\ k\ а_2;\ k\ а_3)$$

3. *скалярное произведение векторов*

1) на плоскости – скалярным произведением векторов а $(а_1;\ а_2)$ и в $(в_1;\ в_2)$ называется число $а_1в_1 + а_2\,в_2$. Обозначается $а\cdot а = а^2$.

$$а\ (а_1;\ а_2)\cdot в\ (в_1;\ в_2) = а_1в_1 + а_2\,в_2$$

2) в пространстве -

$$а\ (а_1;\ а_2;\ а_3)\cdot в\ (в_1;\ в_2; в_3) = а_1в_1 + а_2\,в_2 + а_3в_3$$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1.Что такое вектор?
2. Как обозначаются векторы?
3. Какие векторы называются одинаково направленными?
4. Какие векторы называются противоположно направленными?
5.Что такое абсолютная величина вектора?
6. Какой вектор называется нулевым?
7. По какой формуле находятся координаты вектора на плоскости?
8. По какой формуле находятся координаты вектора в пространстве?
9. По какой формуле находится сумма векторов на плоскости?
10. По какой формуле находится сумма векторов в пространстве?
11. По какой формуле находится произведение векторов на плоскости?
12. По какой формуле находится произведение векторов в пространстве?
13. По какой формуле находится скалярное произведение векторов на плоскости?
14. По какой формуле находится скалярное произведение векторов в пространстве?

8.2.Прямоугольные координаты на плоскости и в пространстве

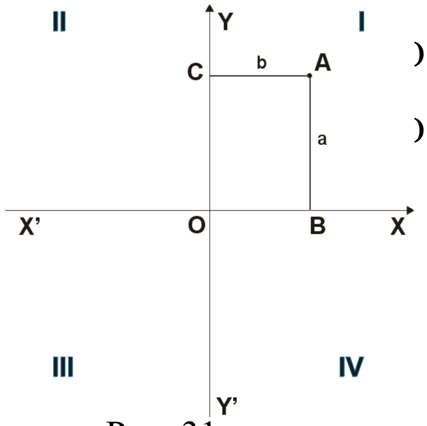
В результате изучения темы студент должен:
уметь:
- строить векторы в системе координат на плоскости и в пространстве;
- складывать векторы по правилу треугольника и по правилу параллелограмма;
- вычитать векторы;
- умножать векторы на число.

знать:
- правило треугольника;
- правило параллелограмма.

Прямоугольные координаты на плоскости и в пространстве

Дан вектор АВ в системе координат. А (x_1; y_2) В(x_2; y_2)

<u>На плоскости: </u>т. О – начало координат, х и у – оси координат



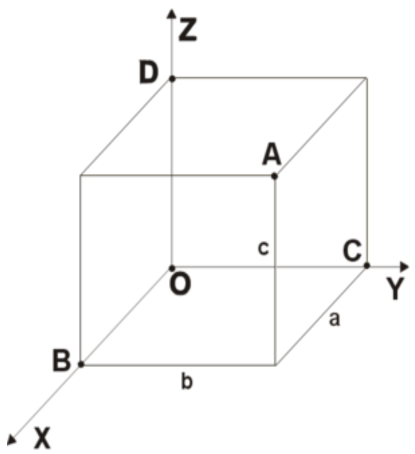
) Х – ось абсцисс

) У – ось ординат

Рис.31

Рис. 31

<u>В пространстве: </u> т. О – начало координат, х и у – оси координат, ОХ – ось абсцисс



ОУ – ось ординат

OZ - ось аппликат

В(х; у; z)

х – абсцисса

у – ордината

z – аппликата

Рис. 32

<u>Действия над векторами:</u>

1) *Правило треугольника*

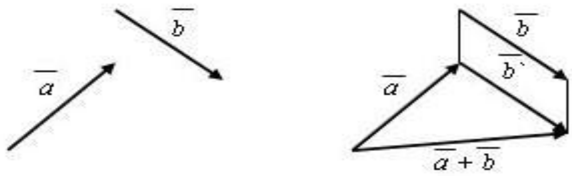


Рис. 33

2) *Правило параллелограмма*

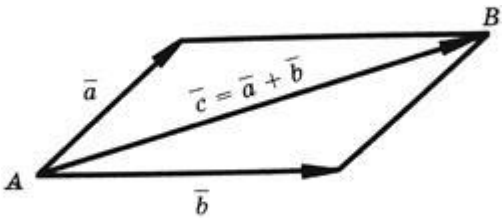


Рис. 34

3) *Вычитание векторов*

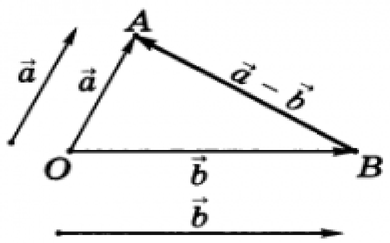


Рис. 35

4) *Умножение вектора на число*

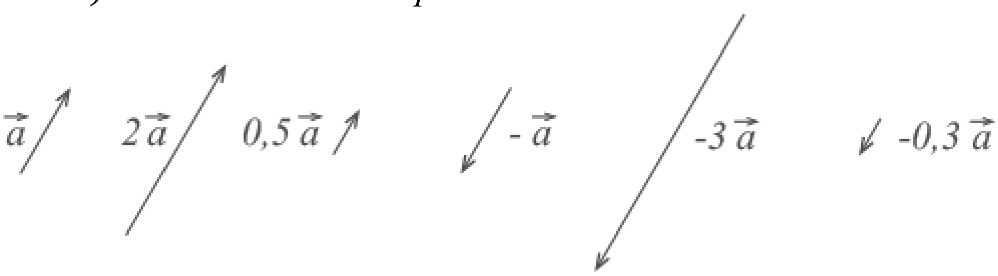


Рис. 36

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1.Как называются оси координат ОХ, ОУ и OZ?
2.Как называются координаты х, у и z?
3. Сформулируйте правило треугольника.
4. Сформулируйте правило параллелограмма.
5. Как вычитаются векторы?
6. Как умножить вектор на число?

Практические задания:

Задание на «3».

1.Найдите вектор с, равный сумме векторов а и в, если:

а. а (-2; 4) в (-3; 6)
б. а (1; -4) в (8; -3)

2. Найдите вектор с, равный разности векторов а и в, если:

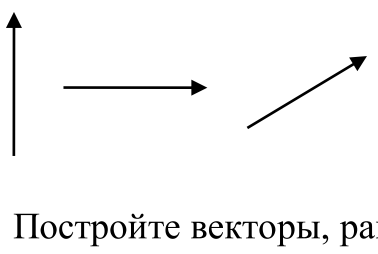
а. а (0; -2) в (-6; 1)
б. а (3; -1) в (-5; 5)

Задание на «4:

1.Даны векторы а (2; 3; -3) и в (3; -1; 2). Найти:

а. 4а – 3в;
б. -3а + в;
в. (4а – 3в)(-3а + в);
г. ав;
д. $(-3а + в)^2$

Задание на «5»: Даны три вектора а, в и с.



Постройте векторы, равные:

а. а + в + с;
б. а – в + с;
в. –а + в + с

Тренажер

<u>**Задание**</u>:

1. Дан ненулевой вектор ОА. Отложить от точки О векторы: 3 ОА, -2 ОА, 0,5 ОА, -0,75 ОА, 5ОА.

2. Даны векторы а (1; 2; -3) и в (4; -1; 2). Найти:

е. 3а – 2в;
ж. -5а + в;
з. (3а – 2в)(-5а + в);
и. ав;
к. $(-5а + в)^2$;

3. Найти скалярное произведение векторов:

а. а (2; -5; 4) и в (-1; 2; 7);
б. а (1; -2; 2) и в (-1; 1; 0).

1. На прямой даны три точки А, В, С, причем точка В лежит между точками А и С. Среди векторов АВ, АС, ВА и ВС назовите одинаково направленные и противоположно направленные.
2. Даны вектор АВ и точка С. Отложите от точки вектор, равный вектору АВ, если:
   а. Точка С лежит на прямой АВ;
   б. Точка С не лежит на прямой АВ.

6. Найдите вектор с, равный сумме векторов а и в, если:

в. а (1; -4) в (-4; 8)
г. а (2; 5) в (4; 3)

7. Найдите вектор с, равный разности векторов а и в, если:

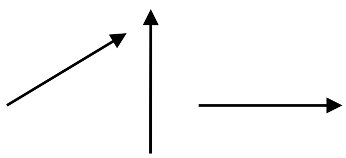
д. а (1; -4) в (-4; 8)
е. а (-2; 7) в (4; -1)

8. Дан треугольник АВС. Найдите сумму векторов:

а. АС и СВ;

б. AB и CB;
в. AC и AB;
г. CA и CB.

9. Даны три вектора а, в и с.



Постройте векторы, равные:

г. а + в + с;
д. а – в + с;
е. –а + в + с

10. Построить вектор AB, если:

а. A(-1; -3), B (3; 4);
б. A(0; 4), B (-4; 0);
в. A(1; 2), B (-3; 5);
г. A(2; -3), B (-2; 3);

8.3. Длина вектора. Угол между векторами. Расстояние между точками. Уравнение прямой. Уравнение окружности

В результате изучения темы студент должен:
уметь:
- находить длину вектора;
- находить расстояние между точками.

знать:
- понятие угла между векторами;
- формулу длины вектора;
- формулу расстояния между точками;
- общее уравнение прямой;
- частные случаи общего уравнения прямой;
- формулу уравнения окружности.

Длина вектора. Угол между векторами. Расстояние между точками.

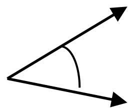
Дан вектор AB A(x_1; y_1) и B (x_2; y_2)

Длина вектора $|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

<u>Пример 1</u>. Найти длину вектора AB, если A(1; 1) и B (4; -3)

$|AB| = \sqrt{(4-1)^2 + (-3-1)^2} = 5$

Углом между любыми двумя *векторами* а и в называется угол между равными им векторами с общим началом.



Расстояние между точками:

$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Уравнение прямой. Уравнение окружности

Любая прямая в декартовых координатах х, у имеет уравнение вида

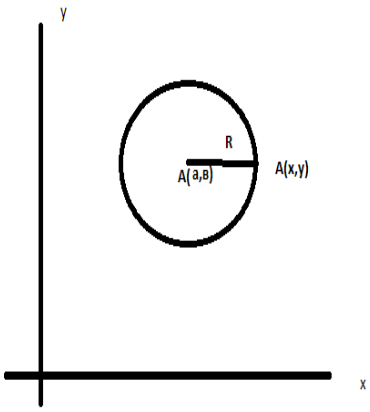
$$ax + вy + c = 0$$ – общее уравнение прямой

где а, в, с – некоторые числа, причем хотя бы одно из чисел не равно нулю.

Частные случаи общего уравнения прямой:

1. $c = 0$ $ax + вy = 0$ – проходит через начало координат
2. $a = 0$ $вy + c = 0$ – параллельна оси Ох
3. $в = 0$ $ax + c = 0$ – параллельна оси ОУ
4. $a = 0$ $c = 0$ $вy = 0$ – совпадает с осью ОХ
5. $в = 0$ $c = 0$ $ax = 0$ – совпадает с осью ОУ

Дана окружность с центром в точке A_0 (а; в) и радиусом R. Возьмем произвольную точку А (х; у) на окружности.



$R^2 = (x - a)^2 + (y - в)^2$

Рис. 37

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1.По какой формуле находится длина вектора?
2. Что называют углом между векторами?
3.По какой формуле находится расстояние между точками?
4. Какой вид имеет общее уравнение прямой?
5.Опишите частные случаи общего уравнения прямой.
6. Какой вид имеет уравнение окружности?

Практические задания:

Задание на «3». Найти расстояние между точками:1)(3;5) и (3;4); 2)(2;1) и (-5;1)

Задание на «4: Даны точки A(1; -2; -3), B(2; -3; 0), C(3; 1; -9), D(-1; 1; -12). Вычислить расстояние между точками: 1) A и C; 2)B и D; 3)C и D.

Задание на «5»: Доказать, что треугольник с вершинами A (2; 2), B (6; 5), C (5; -2) является равнобедренным.

Тренажер

Задание:

1. Даны три точки A (4; -2), B (1; 2), C (-2; 6). Найти расстояние между точками, взятыми попарно.

2. Вычислить периметр треугольника ABC, вершинами которого являются точки A (6; 7), B (3; 3), C (1; -5).

3. Доказать, что треугольник с вершинами A (-1; -5; -2), B (-4; 0; 0). C (-7; -4; -3) является равнобедренным.

4. Докажите, что четырехугольник ABCD с вершинами в точках A (4; 1), B (0; 4),

C (-3; 0), D (1; -3) является квадратом.

5. Докажите, что точки A (1; 0), B (-1; 0), C (0; 1), D (0; -1) являются вершинами квадрата.

6. Какие из точек (1; 2), (3; 4), (-4; 3), (0; 5), (5; -1) лежат на окружности, заданной уравнением $x^2 + y^2 = 25$

7. Найдите на окружности, заданной уравнением $x^2 + y^2 = 169$, точки:

1) с абсциссой 5;

2) с ординатой -12.

8. Найдите точки пересечения с осями координат прямой, заданной уравнением:

1) $x + 2y + 3 = 0$;

2) $3x + 4y = 12$;

3) $3x - 2y + 6 = 0$;

4) $4x - 2y -10 = 0$.

9. Найти точку пересечения прямых, заданных уравнением:

1) $x + 2y + 3 = 0$ и $4x + 5y + 6 = 0$;

2) $3x - y - 2 = 0$ и $2x + y - 8= 0$;

3) $4x + 5y + 8 = 0$ и $4x - 2y - 6 = 0$.

10. Даны точки A (4; 0), B (7; 4), C (-4; 6). Найти длины векторов AB, BC, CA.

11. Вычислите периметр треугольника, вершинами которого являются точки:

1) A (4; 0), B (7; 4), C (-4; 6);

2) A (6; 7), B (3; 3), C (1; -5).

Раздел 9. Начала математического анализа

9.1. Производная. Свойства производной

В результате изучения темы студент должен:
уметь:
- находить производную функций.
знать:
- понятие дифференцируемой функции;

- понятие дифференцирования.

Производной функции f (x) в точке x_0 называется предел отношения приращения Δ f функции в этой точке к приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Функция f (x), имеющая производную в каждой точке некоторого промежутка, называется *дифференцируемой в этом промежутке*. Обозначается $f'(x)$.

Нахождение производной называется *дифференцированием*.

<u>Основные свойства производной:</u>

1. $c' = 0$ $\qquad 2' = 0$
2. $(x)' = 1$
3. $(x)^n = n x^{n-1}$ $\qquad (x^3)' = 3x^2$
4. $(\sin x)' = \cos x$
5. $(\cos x)' = -\sin x$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1.Какая функция называется дифференцируемой в некотором промежутке?
2. Что такое дифференцирование?
3. Запишите основные свойства производной.

Практические задания:

Найти производную следующих функций:

<u>Задание на «3».</u>

1) $y = x^2$;
2) $y = 2x^5$;
3) $y = 2x^6 + 8x$;
4) $y = -6x^2 + 7x + 14$;
5) $y = -3x^2 + 4x^9 - x + 4$;
6) $y = 2x^7 - 7x^5 + 9x - 1$

<u>Задание на «4:</u>

1) $y = 5{,}6x^3 - 2x^{-3} + 4x$;
2) $y = -6x^{-8} + 9x - \frac{2}{3}x^6$;
3) $y = -\frac{2}{3}x^9 + 13x^6 + 12$;
4) $y = -3x^7 - \frac{1}{2}x^5 - 4\frac{2}{3}x^3 - 3$;
5) $y = 7 - 9x^2 - 13x - 4x^3$;
6) $y = 5x^{1/5} + 5{,}4x^2 + 2x - 9$

Задание на «5»:

1) $y = \frac{3}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^{-3} + \frac{1}{8}x^2 + 3$;
2) $y = -2x^{-1/4} + 5$;
3) $y = 0{,}5x^7 - \frac{3}{x^{-3}}$;
4) $y = \frac{-9}{x} + 7x - 2$;
5) $y = x^3 + 2\sqrt{x}$;
6) $y = -6{,}9x^8 + 3\frac{1}{2}x^2 + 8x + 10$

Тренажер

Задание: Найти производную следующих функций:

1. $y = 3$;
2. $y = x$;
3. $y = 2x$;
4. $y = -x^2$;
5. $y = x^5$;
6. $y = 2x^3 - 3x$;
7. $y = 5x^2 + 3x - 4$;
8. $y = -3x^8 + 3x^9 - x + 24$;
9. $y = x^7 - 4x^5 + 2x - 6$;
10. $y = 6x^5 + 3\frac{1}{3}x^3 + 5x$;
11. $y = 3x^4 + 3x^8 - 2$;
12. $y = 5x^7 + 3x - 12x^2$;
13. $y = 15x^3 - 2x^2 + 4x$;
14. $y = -6x^2 + 9x - \frac{1}{3}x^6$;
15. $y = -\frac{2}{3}x^3 + 3x^6 + 12$;
16. $y = 3x^7 - 2x^5 - 4x^3 - 3$;
17. $y = 7 - 9x^2 - 13x - 4x^3$;

18. $y = 5x^4 + 4x^2 + 2x - 9$;
19. $y = 5x^2 + 3x – 4$;
20. $y = \frac{3}{4}x^4 + 3x^8 + 2x - 3$;
21. $y = -9x^5 + 3x^3 - 3x + 8$;
22. $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3$;
23. $y = 2x^{-4} + 5$;
24. $y = 3x^7 - \frac{5}{x^{-3}}$;
25. $y = \frac{1}{x} + 5x - 2$;
26. $y = x^3 + \sqrt{x}$;
27. $y = -6x^8 + 3x^2 + 8x + 10$;
28. $y = -3x^3 - 12x – \frac{2}{3}x^9$;
29. $y = 9x^{-6} + 10x –15x^6$;
30. $y = -6x^2 + 9x – \frac{1}{3}x^6$;
31. $y = \frac{1}{4}x^{12} - 3x^4 + 6x - 36$;
32. $y = x^4 - 23x^3 + 14x + 18$.

9.2. Производная суммы, произведения и частного двух функций

В результате изучения темы студент должен:
уметь:
- находить производную суммы, произведения и частного двух функций.
знать:
- формулу производной суммы двух функций;
- формулу производной произведения двух функций;
- формулу производной частного двух функций.

Производная суммы, произведения и частного двух функций.

1. $(u + v)^/ = u^/ + v^/$
2. $(u\,v)^/ = u^/v + v^/u$
3. $\left(\frac{u}{v}\right)^/ = \frac{u^/v - v^/u}{v^2}$

Пример 1. Найти производную функции $y = x^2 + 3x^3$

$y^/ = (x^2 + 3x^3)^/ = (x^2)^/ + (3x^3)^/ = 2x + 9x^2$

Пример 2. Найти производную функции $y = (x + 5)(2x - 8)$

$y^/ = (x + 5)(2x - 8)^/ = (x + 5)^/(2x - 8) + (x + 5)(2x - 8)^/ = 3x + 2$

<u>Пример 3.</u> Найти производную функции $y = \frac{x^2}{3}$

$$y^/ = (\frac{x^2}{3})^/ = \frac{\left(\tilde{o}^2\right)^/ \cdot 3 - 3^/ \cdot \tilde{o}^2}{3^2} = \frac{2\tilde{o}}{3}$$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Напишите формулу производной суммы двух функций.
2. Напишите формулу производной произведения двух функций.
3. Напишите формулу производной частного двух функций.

Практические задания:

Найти производную следующих функций:

<u>Задание на «3».</u>

1) $y = 4x^4 + 3x$;
2) $y = 12x^2 - x – 2$;
3) $y = -4x^9 - 8x^4 – 6x + 22$;
4) $y= 8x^7 - 14x^5 + 5x - 10$;
5) $y = 6x^3 + \frac{1}{9}x^3 + 9x$;
6) $y = 19x^4 + 3x^8 – 22$.

<u>Задание на «4:</u>

1) $y = 2x(3x + 1)$;
2) $y = \frac{6}{x}$;
3) $y = (2+x)(x + 7)$;
4) $y = \frac{-4}{x^2}$;
5) $y = \frac{x^2 + 5}{-8x^3}$;
6) $y = (-6x - 3)(4 + x^3)$

<u>Задание на «5»:</u>

1) $y = (-2x^9 - 3)(1 – 4x^3)$;
2) $y = \frac{9 + 2x^7}{3 - 5x^5}$;

3) y = $\frac{-3x-2x^6}{1-2x^3}$;
4) y = $(2x^3+6x-10)(3 + 10x - 6x^2)$;
5) y = $(2x^{-2} - 3)(1 - 4x^{-3})$;
6) y = $\frac{2-2x^{-2}}{3x-5x^{-3}}$

Тренажер

<u>**Задание**: </u>Найти производную следующих функций:

1) y = $4x^3 - 8x$;
2) y = $10x^2 + 5x - 2$;
3) y = $-4x^9 + 3x^4 - 16x + 2$;
4) y = $8x^7 - 14x^5 + 5x - 10$;
5) y = $16x^3 + \frac{1}{3}x^3 + 6x$;
6) y = $9x^4 - 5x^8 - 22$;
7) y = $x(x + 1)$;
8) y = $\frac{1}{x^2}$;
9) y = $\frac{x^2}{x^3-1}$;
10) y = $x^3(4 + 2x - x^2)$;
11) y = $x^2(3x + x^3)$;
12) y = $(2x - 3)(1 - x^3)$;
13) y = $\frac{1+2x}{3-5x}$;
14) y = $\frac{x^2}{2x^3-1}$;
15) y = $\frac{3x-2}{5x+8}$;
16) y = $\frac{3-4x}{x^2}$;
17) y = $\frac{x^3-3x}{1+4x^4}$;
18) y = $\frac{5-2x^6}{1-x^3}$;
19) y = $2x^3(3 + 10x - 6x^2)$;
20) y = $\frac{12}{3x^2}$;
21) y = $\frac{x^2-2}{4x^3}$;

22) $y = (4x - 3)(6 + x^3)$;

23) $y = \frac{4-3x}{5x-6}$;

24) $y = x^9(-6x – 3x^2)$;

25) $y = \frac{-2x^4}{2-7x^3}$;

26) $y = \frac{3}{8-x^4}$;

27) $y = (x - 3) (– 5x^3)$.

28) $y = 5x^3 – 81x+2$;

29) $y = -2x^2 + 5x – 2$;

30) $y = -4x^{-7} + 0{,}33x^4 – 16x + 2$;

31) $y = 0{,}8x^7 - 14x^{-9} + 25x + 60$;

32) $y = -9x^{-3} + \frac{1}{6}x^3 + 6x+3$;

33) $y = 3x^4 - 5x^{-2} – 22$;

34) $y = -6x(23x + 2)$;

35) $y = \frac{-3x}{x^{-3}}$;

36) $y = \frac{4x^2}{-2x^3-10}$;

37) $y = 6x^3(4 + 2x – 3x^2)$;

38) $y = 5x^{-2}(3x +2 x^3)$;

39) $y = (2x - 3)(6x – x^3)$;

40) $y = \frac{1+2x^2}{3-5x}$;

41) $y = \frac{-2x^2}{-2x^3-3}$;

42) $y = \frac{3x-2}{5x^5+8}$;

43) $y = \frac{3+2x}{4x^2}$;

44) $y = \frac{x^3+2x}{4+4x^{-2}}$;

45) $y = \frac{5x-2x^4}{5x+7x^3}$;

46) $y = -2x^{-4}(3x + 10 +3x^2)$;

47) $y = \frac{12x}{x^2}$

9.3 .Производная сложной функции. Производная степенной, логарифмической и показательной функций

В результате изучения темы студент должен:

уметь:
- находить производную степенной, логарифмической и показательной функций.
- находить производную сложной функций.

знать:
- понятие сложной функции;
- формулу производной степенной функции;
- формулу производной логарифмической функции;
- формулу производной показательной функции.

Пусть даны две функции y = f (x) и z = g (y), причем область определения функции g содержит множество значений функции y. Функция, заданная формулой z = g [(y)], называется сложной функцией, составленной из функций f и g.

$$z = g[(y)]$$

$$z' = g'[(y)].(y)'$$

1. $(x^n)' = nx^{n-1}.x'$ $\quad ((x^2 + 3x + 10)^2)' = 2(x^2 + 3x + 10)(2x + 3)$

2. $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\quad \left(\sqrt{x^2}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x^2}}$

3. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ $\quad (\ln x^3)' = \frac{1}{x^3}(x^3)' = \frac{3x^2}{x^3}$

4. $(a^x)' = a^x \ln a$ $\quad (2^x)' = 2^x \ln 2$

<u>Пример 1</u>. Найти производную функции

$f(x) = (x^2 - 1)^4$

$f'(x) = 2(x^2 - 1)^3 \cdot 2x$

<u>Пример 2</u>. Найти производную функции

$f(x) = \sqrt{3x^2 + 1}$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{3\tilde{o}^2 + 1}} \cdot \left(3\tilde{o}^2 + 1\right)' = \frac{6\tilde{o}}{2\sqrt{3\tilde{o}^2 + 1}} = \frac{3\tilde{o}}{\sqrt{3\tilde{o}^2 + 1}}$

<u>Пример 3</u>. Найти производную функции

$f(x) = \sqrt[3]{(x^3+1)^2}$

$f'(x) = \left((x^3+1)^2\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}\left((x^3+1)^2\right)^{-\frac{1}{3}} * (x^3+1)^2 = \frac{2}{3}\left((x^3+1)^2\right)^{-\frac{1}{3}} * 3x^2 = \frac{2x^2}{\sqrt[3]{x^3+1}}$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Какая функция называется сложной?
2. Напишите формулу производной степенной функции.
3. Напишите формулу производной показательной функции.
4. Напишите формулу производной логарифмической функции.

Практические задания:

Найти производную следующих функций:

Задание на «3».

1. $y = (x - 2)^8$
2. $y = (x^2 + 2x)^3$
3. $y = (x + 3)^4$
4. $y = 41^x$
5. $y = (3 + 5x + x^3)^2$

Задание на «4:

1. $y = \sqrt{9x^2+5}$
2. $y = \ln(-5x^7 + 14x + 3)$
3. $y = (-2x^5 + 5)^{-3}$
4. $y = \sqrt{4-6x^2}$
5. $y = (-23)^x$

Задание на «5»:

1. $y = \left(\frac{1+x^6}{x^2-6}\right)^3$
2. $y = -x^4\sqrt{-6x^3-3}$
3. $y = \sqrt{-3x^{-4}-7x-6}$
4. $y = \sqrt[3]{-5x^4-6x}$
5. $y = -6(-6x^{-3} - 6x + 2)^{1/6}$

Тренажер

Задание: Найти производную следующих функций:

1. $y = (x + 2)^4$
2. $y = (x^2 - 2x)^3$
3. $y = (3x - 2)^3$
4. $y = (x^2 - 1)^5$
5. $y = (x^2 - x + 1)^4$
6. $y = 5(3x^2 - x + 4)^7$
7. $y = (23 + 15x + x^3)^2$
8. $y = \sqrt{x+1}$
9. $y = \left(\frac{1+x}{x^2-x}\right)^2$
10. $y = (2x^3 + 5)^3$
11. $y = 3(5x^2 - x + 4)^6$
12. $y = (x^2 - 2)^5$
13. $y = (-2x - x^5)^3$
14. $y = \sqrt{3x^2-4}$
15. $y = x^2\sqrt{4x-3}$
16. $y = \sqrt{4-x^2}$
17. $y = \sqrt{x^4-3x^2}$
18. $y = (x^3 - 2x^2 + 5)^3$
19. $y = (x^3 - 1)^6$
20. $y = (x^3 - 5x + 7)^9$
21. $y = (x^3 + 6x^2 - 5x)^7$
22. $y = \ln(x^2 + 3x + 9)$
23. $y = (x^2 + 3x + 4)^2$
24. $y = \ln(-4x^2 + 10x + 3)$
25. $y = \ln(6x^4 - 3x^3 - 29)$
26. $y = \ln(2x + 4)$
27. $y = \ln(3 + 12x^3)$
28. $y = (23 + 35x + 9x^2)^8$
29. $y = (x^2 - 5)^6$
30. $y = \sqrt{4x^2-2x^3}$
31. $y = \sqrt{7x^6-2}$
32. $y = 31^x$
33. $y = (-2)^x$
34. $y = (5 - 6x + 4x^2)^2$
35. $y = \sqrt{2x^6+3}$
36. $y = \sqrt{3x^8-4x+2}$
37. $y = x^3\sqrt{2x^2-5}$
38. $y = (5x + 32)^{-6}$
39. $y = (3x^2 - 8x)^{-2}$
40. $y = (3x - 2)^{-5}$
41. $y = (-3x^2 - 1)^5$

42. $y = (-6x^2 + 3x + 21)^{-9}$
43. $y = 0{,}3(-5x^2 - 3x + 4)^4$
44. $y = (10 + 5x + 2x^3)^2$
45. $y = \sqrt{2x+1}$
46. $y = \left(\frac{3x-10}{4x^2-2x}\right)^3$
47. $y = (-3x^3 + 15)^{-2}$
48. $y = 0{,}2(-3x^2 - 10x + 4)^6$
49. $y = (-1{,}2x^2 - 2)^5$
50. $y = (-6x+5x^5)^{-4}$
51. $y = \sqrt{-6x^4+2x-6}$
52. $y = -2x^2\sqrt{6x+46}$
53. $y = \sqrt{4-2x^2}$
54. $y = \sqrt{2x^{-2}+3x^2}$
55. $y = 2(-2x^3 + 3x^2 - 11)^7$
56. $y = -2(-6x^{-3} + 2x)^3$
57. $y = (-3x^3 + 5x - 3)^{-8}$
58. $y = -3(x^3 + 6x^2 - 5x)^{-9}$
59. $y = \ln(-3x^2 - 9x + 10)$
60. $y = -3(2x^2 + 5x - 16)^{-4}$
61. $y = \ln(1/2x^2 + 7x + 43)$
62. $y = \ln(-5x^4 - 2x^3 + 6x + 1)$
63. $y = \ln(2/3x + 4x - 1)$
64. $y = \ln(-2 + 6x^3)$
65. $y = (23 + 35x + 9x^2)^8$
66. $y = \sqrt{-7x^6+2}$
67. $y = 4^x$

9.4. Вторая производная, ее геометрический и физический смысл

В результате изучения темы студент должен:
уметь:
- находить вторую производную.
знать:
- понятие второй производной.

Дана производная y = f (x).

Производная $y^{/}$ = f (x) называется производной первого порядка или первой производной.

Производная от первой производной называется второй производной или производной второго порядка. Обозначается:

$$y^{//} = f(x)$$

Существуют также производные высших порядков.

Пример 1. Найти вторую производную:

$y = x^3 \quad y^{/}=3x^2 \qquad y^{//} = 6x$

$y = x^5 - 2x^3 + x - 3 \quad y^{/}=5x^4-6x^2+1 \qquad y^{//} = 20x^3 - 12x$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Что называют второй производной?

Практические задания:

Найти вторую производную следующих функций:

Задание на «3».

1) $y = 3 + 5x + 2x^3$;
2) $y = -x^5 + 3x^3 + 5$;
3) $y =- 3x^4 + 6x^8 - 2$;
4) $y = x^7 + 3x - 2x^2$;
5) $y = -3x^3 - 4x^2 + x$.

Задание на «4:

1) $y = \frac{1}{2}x^4 + 3x^{-6} + 2x - 3$;
2) $y = -9x^5 + 0{,}3x^3 - 3x + 8$;
3) $y = \frac{3}{8}x^4 - \frac{5}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + 3x - 45$;
4) $y = (3 + 10x + 2x^3)^2$
5) $y = (-2x^{-7} + 5)^3$

Задание на «5»:

1) $y = \sqrt{-9x^2 + 4}$
2) $y = \sqrt{-5x - 7x^2}$
3) $y = \frac{6 - x}{x^2}$;
4) $y = \frac{-6x^2}{-5x^3 - 1}$;

5) $y = 2x^3(4 - 2x – 6x^2)$;
6) $y = (x^2-6)(3x + x^3)$

Тренажер

<u>**Задание**: </u>Найти вторую производную следующих функций:

1) $y = 23 + 15x + x^3$;
2) $y = 6x^5 + 3\frac{1}{3}x^3 + 5x$;
3) $y = 3x^4 + 3x^8 – 2$;
4) $y = 5x^7 + 3x – 12x^2$;
5) $y = 15x^3 - 2x^2 + 4x$;
6) $y = -6x^2 + 9x – \frac{1}{3}x^6$;
7) $y = -\frac{2}{3}x^3 + 3x^6 + 12$;
8) $y = 3x^7 - 2x^5 – 4x^3 -3$;
9) $y = 7 - 9x^2 - 13x – 4x^3$;
10) $y = 5x^4 + 4x^2 + 2x - 9$;
11) $y = 5x^2 + 3x – 4$;
12) $y = \frac{3}{4}x^4 + 3x^8 + 2x - 3$;
13) $y = -9x^5 + 3x^3 - 3x + 8$;
14) $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3$;
15) $y = (23 + 15x + x^3)^2$
16) $y = (2x^3 + 5)^3$
17) $y = \sqrt{3x^2 - 4}$
18) $y = \sqrt{4 - x^2}$
19) $y = \frac{1}{x^2}$;
20) $y = \frac{x^2}{x^3 - 1}$;
21) $y = x^3(4 + 2x – x^2)$;
22) $y = x^2(3x + x^3)$;
23) $y = (2x - 3)(1 – x^3)$;
24) $y = \frac{1 + 2x}{3 - 5x}$

9.5. Возрастание и убывание функции. Экстремумы функции

В результате изучения темы студент должен:
уметь:
- исследовать функцию на экстремумы.
знать:
- понятие убывающей функции;
- понятие возрастающей функции;
- понятие интервалов монотонности;
- понятие точки максимума;
- понятие точки минимума;
- правило нахождения экстремумов функции с помощью первой производной.

Функция y = f(x) называется *убывающей* на интервале (а; в), если для любых x_1 и x_2, принадлежащих интервалу

$$f(x_1) > f(x_2)$$

Функция y = f(x) называется *возрастающей* на интервале (а; в), если для любых x_1 и x_2, принадлежащих интервалу

$$f(x_1) \leq f(x_2)$$

Интервалы, в которых функция убывает или возрастает, называют *интервалами монотонности.*

Точка x_0 называется *точкой минимума* функции f, если для всех x из некоторой окрестности x_0 выполняется неравенство

$$f(x) \geq f(x_o)$$

Точка x_0 называется *точкой максимума* функции f, если для всех x из некоторой окрестности x_0 выполняется неравенство

$$f(x) \leq f(x_o)$$

Точки максимума и минимума называются экстремальными точками или *точками экстремума.*

<u>Правило нахождения экстремумов функции y = f(x) с помощью первой производной.</u>

1. Найти производную $f^{/}(x)$.
2. Найти критические точки функции y = f(x), т. е. точки в которых $f^{/}(x)$ обращается в ноль или терпит разрыв.

3. Исследовать знак производной $f^{/}(x)$ в промежутках, на которые найденные критические точки делят область определения функции y = f(x). При этом критическая точка x_0 – min, если она отделяет промежуток, в котором $f^{/}(x)<0$, от промежутка, в котором $f^{/}(x)>0$; max – наоборот. Если в соседних промежутках знак производной не меняется, то в точке x_0 функция экстремума не имеет.
4. Вычислить значение функции в точках экстремума.

Пример. Исследовать на экстремум функцию $y = 3x^2 – 12x + 9$

1. $y^{/} = 6x – 12$
2. $6x – 12 =0$ $x=2$
3. y (2) = min
4. $y_{min} = y(2) = -3$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Какая функция называется убывающей?
2. Какая функция называется возрастающей?
3. Какие интервалы называют интервалами монотонности?
4.Что называют точкой минимума?
5.Что называют точкой максимума?
6. Сформулируйте правило нахождения экстремумов функции с помощью первой производной.

Практические задания:

Исследовать на экстремумы функции:

<u>Задание на «3».</u>

1) $y = x^2 +5$;
2) $y =3x^2 – 6x$

<u>Задание на «4:</u>

1) $y = 2x^3 - 6x+84$;
2) $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 +6x +9$

<u>Задание на «5»:</u>

1) $y = \frac{1}{3}x^3 – x^4 +301$;
2) $y = \frac{x^3}{3x^2 - 1}$

Тренажер

<u>Задание</u>: Исследовать на экстремумы функции:

1) $y = -x^2 + 6x - 8$;
2) $y = x^2 - 4x$;
3) $y = x^2 + x - 1$;
4) $y = 7x^2 + 14x + 1$;
5) $y = 3x^2 - 6x^3 + 4$;
6) $y = x^3 - 3x$;
7) $y = x^3 (1 - x)$;
8) $y = 1 + 4x - x^2$;
9) $y = 3 + x^2 - 6x$;
10) $y = \frac{1}{4} x^2 - 6x + 5$;
11) $y = \frac{1}{3} x^3 - x^4 - 35$;
12) $y = 6 x^2 - 6x + 5$;
13) $y = x^2 - 1$;
14) $y = \frac{1}{3} x^3 - \frac{3}{2} x^2 - 4x + 6$;
15) $y = x^{3;}$
16) $y = 2x^{2;}$
17) $y = \frac{1}{2} x^4 - 2x$;
18) $y = x^3 + \frac{9}{2} x^2 - 5$;
19) $y = 6x - x^2 - 7$;
20) $y = x^{5;}$
21) $y = -5x^2 - 2x + 2$;
22) $y = \frac{1}{3} x^3 - \frac{5}{2} x^2 + 6x - 7$;
23) $y = 2x^3 - x^2 - 4x + 5$;
24) $y = \frac{1}{3} x^3 - x$;
25) $y = \frac{x}{1+x^2}$;
26) $y = 3x - \frac{27}{2-x}$;
27) $y = \frac{x^3}{3x^2 - 1}$;
28) $y = 2x^2 + 3x + 4$.

9.6 .Применение производной к построению графиков функций

В результате изучения темы студент должен:
уметь:
- исследовать на выпуклость график функции;
- находить точки перегиба графика функции.
знать:
- понятие направлений выпуклости графика функции;
- понятие точек перегиба графика функции.

Направления выпуклости графика функции.

Направления выпуклости графика функции:

1) *выпуклость вверх* – все точки графика лежат ниже касательной

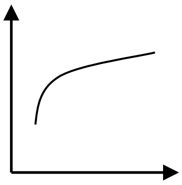


Рис. 38

2) *выпуклость вниз* – все точки графика лежат выше касательной

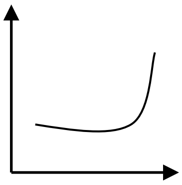


Рис. 39

Если $y^{//} = f(x)$ - положительная, то график функции выпукл вниз;

Если $y^{//} = f(x)$ - отрицательная, то график функции выпукл вверх.

Пример 1. Исследуем на выпуклость график функции:

$f(x) = x^3 – 3x^2 + 2x + 1$

$f^{/}(x) = 3x^2 – 6x +2$

$f^{//}(x) = 6x - 6$

Найдем критические точки:

$6x -6 =0$

$x = 1$

$(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$

При переходе через точку x =1 функция меняет знак с – на + .

На интервале $(-\infty; 1)$ график функции выпукл вверх; $(1; +\infty)$ – вниз.

Точки перегиба графика функции.

Точка графика, в которой существует касательная, и при переходе через которую кривая меняет свое направление выпуклости, называется *точкой перегиба.*

Если x_0 – точка перегиба, то $f''(x_0) = 0$

Точки перегиба там, где $f''(x)$ не существует

Пример 2. Найти точки перегиба графика функции:

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 7x - 4$

$f'(x) = x^2 - 4x + 7$

$f''(x) = 2x - 4$

x = 2 – крит. точка

$y = f(2) = 4\frac{2}{3}$

$(2; 4\frac{2}{3})$ – точка перегиба

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Какие бывают направления выпуклости? Схематично изобразите график функции.
2. Что такое точка перегиба?

Практические задания:

Задание на «3».

1.Исследовать на выпуклость график функций: $y = 2x^3$
2. Найти точки перегиба графиков функций: $y = x^3+6$

Задание на «4:

1.Исследовать на выпуклость график функций: $y = 5x^3-2x^2+2x-10$
2. Найти точки перегиба графиков функций: $y = 6x^3-6x^2+2x-1$
Задание на «5»:

1.Исследовать на выпуклость график функций: $y = \frac{2}{x^2-2}$;

2. Найти точки перегиба графиков функций: $y = \frac{x^2+6}{-3x}$

Тренажер

Задание:

1. Исследовать на выпуклость графики функций:

1) $y = x^4 - 2x^3 + 6x + 1$;
2) $y = x^3 - 6x^2 + 2x - 6$;
3) $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 3$;
4) $y = -x^4 - 2x^3 + 12x^2 + 15x - 6$;
5) $y = x + \frac{6}{x}$;
6) $y = 3x^5 - 10x^4 - 30x^3 + 12x + 7$;
7) $y = -x^2 - 1$;
8) $y = x^4 - 2x^3 + 6x + 1$;
9) $y = x^3$;
10) $y = 2x^3$;
11) $y = \frac{1}{x^2+1}$;
12) $y = \frac{x}{x^2-4}$

2. Найти точки перегиба графиков функций:

1) $y = x^3 - x - 6$;
2) $y = 6x^2 - x^3 - 2$;
3) $y = x^4 - 8x^3 + 18x^2 - 4x + 31$;
4) $y = 1 + x^3$;
5) $y = x^4 - 8x^3 + 24x^2 + 1$;
6) $y = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x - 3$;
7) $y = x^4 - 10x^3 + 36x^2 + 100$;
8) $y = \frac{1}{5}x^5 - 43$;
9) $y = x^3 - 3x$;

10) $y = \frac{1}{4}x^4 + 11$;

11) $y = \frac{1}{1 - x^2}$;

12) $y = \frac{x^2 - 4}{x}$

9.7. Первообразная

В результате изучения темы студент должен:
уметь:
-находить первообразную функции.
знать:
- понятие первообразной функции;
- понятие интегрирования;
-свойства первообразной функции.

Первообразная

Функция F называется *первообразной* для функции f на заданном промежутке, если для всех x из этого промежутка

$$F'(x) = f(x)$$

Пример 1. $F'(x) = \frac{x^3}{3}$ - первообразная функции $f(x) = x^2$, т. к. $(\frac{x^3}{3})' = x^2$,

Но $(\frac{x^3}{3} + 7)' = x^2$, поэтому $f(x) = F'(x) + C$

Отыскивание первообразной функции по заданной ее производной f (x) – действие, обратное дифференцированию – *интегрирование.*

Свойства первообразной:

1. Любая производная для функции f на некотором промежутке может быть записана в виде

$$F(x) + C, \text{ где}$$

F (x) – первообразная функции; C –произвольная постоянная.

2. Если F – первообразная для функции f, а G – первообразная для g, то F + G – первообразная для f + g.

$$(F + G)' = F' + G' = f + g$$

3. Если F – первообразная для функции f, а k – постоянная, то функция kF – первообразная для kf.

$$(kF)' = kF' = kf$$

<u>Пример 2.</u> Найти первообразную функции

$f(x) = 2 + x^3$

$F(x) = 2x + \frac{x^4}{4}$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Что называют первообразной функцией?
2. Что такое интегрирование?
3. Сформулируйте свойства интегрирования.

Практические задания:

Найти первообразную следующих функций:

<u>Задание на «3».</u>

1) $f(x) = -8$;
2) $f(x) = 7x$;
3) $f(x) = 2 – x^4$;
4) $f(x) = x^2 - 3x$;
5) $f(x) = x^7 – 8x^2 + 4x^2 + 10$;
6) $f(x) = -5x^3 + 2x^2 + 7x - 3$

<u>Задание на «4:</u>

1) $f(x) = \frac{1}{3}x^6 – x^4 - 5$;
2) $f(x) = -\frac{2}{3}x^5 + 9x^6 + 2x - 4$;
3) $f(x) = \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + 3x + 5$;
4) $f(x) = -6x + \cos x$;
5) $f(x) = -\frac{2}{5}x^3 + 3x^6 + 1$;
6) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^7 + 2$

<u>Задание на «5»:</u>

1) $f(x) = \frac{1}{x^2} + 2x - 6$;

2) $f(x) = -8 - \frac{1}{x^4}$;

3) $f(x) = 3\sin x$;

4) $f(x) = 47 - 3x^{-3} + \frac{1}{x^2}$;

5) $f(x) = 5x^{-2} + 2x^{-3} + 11$;

6) $f(x) = \frac{1}{x^6} - 3\sin x$

Тренажер

<u>**Задание**</u>:

Найти первообразную следующих функций:

1) $f(x) = 3x^2 - 2x + 4$;
2) $f(x) = 4x - 6x^2 + 1$;
3) $f(x) = 5x - x^3 - 20$;
4) $f(x) = 3x^2 - 2x + 4$;
5) $f(x) = 2 - x^4$;
6) $f(x) = 3x$;
7) $f(x) = -3$;
8) $f(x) = x + \cos x$;
9) $f(x) = x^6 - 5x$;
10) $f(x) = \frac{1}{x^3} - 2$;
11) $f(x) = 1 - \frac{1}{x^4}$;
12) $f(x) = 2\sin x$;
13) $f(x) = 6 - 3x^3 + \frac{1}{x^2}$;
14) $f(x) = 5x^2 + 2x^3 + 11$;
15) $f(x) = \frac{1}{x^6} - \sin x$;
16) $f(x) = x - \frac{2}{x^4} - 22$;
17) $f(x) = 5x^6 - 5x + 36$;
18) $f(x) = -10x^8 - 1$;
19) $f(x) = x^4 - 8x^3 + 24x^2 + 1$;
20) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 2x - 6$;
21) $f(x) = 1 + 4x - x^2$;
22) $f(x) = -9x^5 + 3x^3 - 3x + 8$;
23) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^4 - 35$;
24) $f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 3x^6 + 12$;
25) $f(x) = x^3 - 3x$;

26) f (x) = $\frac{3}{x^5}$ + sin x;

27) f (x) = $\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3$;

28) f (x) = $3x^5 - 10x^4 - 30x^3 + 12x + 7$;

29) f (x) = x + $\frac{6}{x}$;

30) f (x) = $3x^4 + 3x^8 - 2$;

31) f (x) = $5x^7 + 3x - 12x^2$;

32) f (x) = $15x^3 - 2x^2 + 4x$;

33) f (x) = $7x^2 + 14x + 1$;

34) f (x) = $5x^4 + 4x^2 + 2x - 9$.

9.8. Неопределенный интеграл и его свойства

В результате изучения темы студент должен:
уметь:
-находить неопределенные интегралы методом непосредственного интегрирования;
-находить неопределенные интегралы методом замены переменных.
знать:
- понятие интегрирования;
- понятие неопределенного интеграла;
- свойства неопределенного интеграла;
- методы нахождения неопределенного интеграла.

Понятие неопределенного интеграла

Интегрирование – операция, обратная дифференцированию, это отыскивание первообразной функции.

$$F'(x) = f(x)$$

Пример 1. f (x) = $3x^2$ $F'(x) = x^3$ – первообразная

Совокупность первообразных для функции f (x) называется *неопределенным интегралом* и обозначается $\int f(x)dx$.

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

f (x) – подынтегральная функция

f (x) dx – подынтегральное выражение

C – произвольная постоянная

Свойства неопределенного интеграла

1) Неопределенный интеграл от дифференциала функции равен этой функции плюс произвольная постоянная

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

2) Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$$

3) Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению

$$d\int f(x)dx = f(x)\,dx$$

4) Постоянный множитель может быть вынесен за знак неопределенного интеграла

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx$$

5) Неопределенный интеграл от алгебраической суммы двух функций равен алгебраической сумме этих функций

$$\int (f(x)dx \pm g(x)dx) = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

Примеры:

1) $\int x^5 dx = \dfrac{x^6}{6} + C$
2) $\int \cos x = \sin x + C$
3) $\int 3x^5 dx = 3\int x^5 dx = 3\dfrac{x^6}{6} + C = \dfrac{x^6}{2} + c$
4) $\int (4x^3 - 6x^2 + 2x + 3)dx = 4\int x^3 dx - 6\int x^2 dx + 2\int x dx + 3\int dx = x^4 - 2x^3 + x^2 + 3x + C$

Методы нахождения неопределенного интеграла

1. Непосредственное интегрирование:

$$\int \frac{3x^4 - 2x^2 - 3x + 7}{x^2}dx = \int\left(3x^2 - 2 - \frac{3}{x} + \frac{7}{x^2}\right)dx = 3\int x^2 dx - 2\int dx - 3\int\frac{dx}{x} + 7\int x^{-2}dx = 3\frac{x^3}{3} - 2x - 3\ln|x|$$

$$+ 7\frac{x^{-1}}{-1} + C = x^3 + 2x - 3\ln|x| - \frac{7}{x} + C$$

2. Метод замены переменной:

1. $\int (3x-5)^7\,dx$

3x -5 = t

3dx = dt

dx = $\frac{1}{3}dt$

$$\int (3x-5)^7\,dx = \int \frac{1}{3}t^7\,dt = \frac{1}{3}\frac{t^8}{8}+C = \frac{t^8}{24}+C = \frac{(3x-5)^8}{24}+C$$

2. $\int (3x+2)^5\,dx$

3x + 2 = t

3dx = dt

dx = $\frac{1}{3}dt$

$$\int (3x+2)^5\,dx = \int \frac{1}{3}t^5\,dt = \frac{1}{3}\frac{t^6}{6}+C = \frac{t^6}{18}+C = \frac{(3x+2)^6}{18}+C$$

3. $\int (2x^3+1)^4 x^2\,dx$

$2x^3$ + 1 = t

$6x^2$ dx = dt

x^2 dx = $\frac{1}{6}dt$

$$\int (2x^3+1)^4 x^2\,dx = \frac{1}{6}\int t^4\,dt = \frac{1}{6}\frac{t^5}{5}+C = \frac{t^6}{18}+C = \frac{1}{30}(2x^3+1)^5+C$$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Что такое интегрирование?
2. Что называют неопределенным интегралом?
3. Сформулируйте свойства неопределенного интеграла, запишите формулы.
4. Перечислите методы нахождения неопределенного интеграла.

Практические задания:

Найти следующие интегралы:

Задание на «3». 1) $\int x^3dx$; 2) $\int (x^4-2x^{11}+x-2)\,dx$; 3) $\int (2x^2+6x^9)\,dx$; 4) $\int 10\,dx$;

5) $\int (-6x^5-3x^6-x+9)dx$; 6) $\int (2x-34)dx$.

Задание на «4:

1) $\int 6(x^2-2)dx$; 2) $\int (-6x^{-4}+2x^{-5})dx$; 3) $\int (2x-4)^6dx$; 4) $\int (-3-7x)^2dx$

5) $\int 2(x^{-3}-2x^{11}+x-3)\,dx$; 6) $\int (6x^{-3}+4x^{-8})\,dx$.

Задание на «5»:

1) $\int\frac{-3x^3-5x-9}{x}$ dx; 2) $\int (-1/2x+5)^3dx$ 3) $\int (-3x+2)^{1/2}dx$; 4) $\int\frac{dx}{(2-2x)^2}$;

5) $\int (-1/4x -1)^{-4}dx$; 6) $\int (-6x +2)^{-2}dx$.

Тренажер

Задание:

1. Найти следующие интегралы:

1. $\int 5dx$
2. $\int 6x^2dx$
3. $\int 4(x^2-x+5)dx$
4. $\int\frac{x^3+3x^2+4x}{x}dx$
5. $\int (2x^2-5x^2+7x-3)dx$
6. $\int (5x^4-4x^2+2x-1)dx$
7. $\int\frac{7x^2-3x+2}{x}dx$

13) $\int\frac{2x^3-3x+7}{x}dx$

14) $\int x^4dx$

15) $\int (4x^3-6x^2-4x+3)dx$

16) $\int 2xdx$

17) $\int 2(3x-1)^2dx$

18) $\int x^2\,dx$

19) $\int (5x-1)dx$

8. ∫ $(6x^{-3}+2x-1)dx$ 20) ∫ $(6x^4-2x+1)dx$

9. ∫ $5(x^2-1)dx$ 21) ∫ $x^{-5}dx$

10. ∫ $(2x^{-2}+3x^3)dx$ 22) ∫ $6dx$

11. ∫ $7x^2dx$ 23) ∫ $(2x^3-4x^5)dx$

12. ∫ $(6x^2+5x^3-4x+2)dx$ 24) ∫ $(3x^{-4}+8x^{-5})dx$

2. <u>Найти интегралы методом замены переменных:</u>

1) ∫ $(6x-4)^8dx$ 9) ∫ $(8-9x)^2dx$

2) ∫ $(7x+8)^3dx$ 10) ∫ $(1/5x - 3)^4dx$

3) ∫ $(7-2x)^3dx$ 11) $\int \frac{dx}{(5x-1)^3}$

4) $\int \frac{dx}{(4-3x)^2}$ 12) ∫ $(-1/2x +1)^{-2}dx$

5) ∫ $(5x-1)^5dx$ 13) ∫ $(-1/3x +1)^{-4}dx$

6) ∫ $(-2x+5)^{1/2}dx$ 14) ∫ $(-8-1/2x)^2dx$

7) ∫ $(2/3x-4)^{-4}dx$ 15) ∫ $(2-1/5x)^2dx$

8) ∫ $(-4x+3)^{-3}dx$ 16) ∫ $(-1/2x -3)^{-3}dx$

3. <u>Найти интегралы:</u>

1) ∫ $7x^3dx$; 2) ∫ $5(x^4-2x^{11}+x-2)\ dx$; 3) ∫ $(6x^2+4x^9)\ dx$; 4) ∫ $7\ dx$;

5) ∫ $(6x^5-2x^6-x+3)\_dx$; 6) ∫ $(2x-34)^3dx$; 7) ∫ $(7x-10)^4dx$; 8) ∫ $3(2x-3)^2dx$;

9) ∫ $12x^3dx$; 10) ∫ $7x^5dx$; 11) ∫ $(3x^2-2x^3-3x+6)dx$; 12) ∫ x^4dx;

13) $\int 2(5x^2-4x+5)dx$; 14) $\int (4-2x)^6dx$; 15) $\int \frac{x^3+3x^2+4x}{x}dx$

9.9. Определенный интеграл и его свойства.

В результате изучения темы студент должен:
уметь:
-вычислять определенные интегралы методом непосредственного интегрирования;
-вычислять определенные интегралы методом замены переменных.
знать:
- понятие определенного интеграла;
- свойства определенного интеграла;
- методы вычисления определенного интеграла.

Понятие определенного интеграла.

Пусть F (x) – первообразная функции f (x) в некотором промежутке X, а числа а и в принадлежат этому промежутку.

Приращение F(b) – F(a) любой из первообразных функций F (x) + C называется *определенным интегралом* от а до в функции y = f (x) и обозначается

$$\int_a^в f(x)dx$$

а и в - пределы интегрирования

f (x) – подынтегральная функция

$$\int_a^в f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Основные свойства определенного интеграла:

1. Постоянный множитель может быть вынесен за знак интеграла

$$\int_a^в Af(x)dx = A\int_a^в f(x)dx$$

2. Определенный интеграл от алгебраической суммы двух непрерывных функций равен алгебраической сумме их интегралов

$$\int_a^b \left(f(x) \pm g(x) \right) dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

3. Если а<с<в, то

$$\int_a^в f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^в f(x)dx$$

4. Если функция f (x) непрерывна на отрезке [а;в], то существует точка с Є [а;в], такая, что

$$\int_a^в f(x)dx = \text{f(c) (в-а)}$$

Методы вычисления определенного интеграла:

1) <u>Метод подстановки</u>

а) $\int_{-1}^{2} (x^2 - 3x + 7)dx = \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 7x \right)\Big|_{-1}^{2} = 19{,}5$

б) $\int_1^4 (2x^2 - 3x)dx = 19{,}5$

2) метод замены переменной

а) $\int_2^3 (2x-1)^3 dx$

2x – 1 = t

2dx = dt

dx = $\frac{1}{2}dt$

$$\int_2^3 (2x-1)^3 dx = \frac{1}{2}\int_3^5 t^3 dt = \frac{1}{2}\frac{t^4}{4}\Big|_3^5 = \frac{1}{8}\left(5^4 - 3^4\right) = 58$$

б) $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{5x-1}} = \int_1^2 (5x-1)^{-\frac{1}{2}} dx$

5x – 1 = t

5dx = dt

dx = $\frac{1}{5}dt$

$$\int_1^2 (5x-1)^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{5}\int_3^3 t^{-\frac{1}{2}}dt = \frac{2}{5}t^{\frac{1}{2}}\Big|_4^9 = \frac{2}{5}\left(9^{\frac{1}{2}} - 4^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{2}{5}$$

в) $\int_0^1 (2x^3+1)^4 x^2 dx$

$2x^3 + 1 = t$

$6x^2dx = dt$

$x^2dx = \frac{1}{6}dt$

$$\int_0^1 \left(2x^3 11\right)^4 x^2 dx = \frac{1}{6}\int_1^3 t^4 dt = \frac{1}{6}\frac{t^5}{5}\Big|_1^3 = \frac{1}{30}\left(3^5 - 1^5\right) = 8\frac{1}{15}$$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1.Что называют определенным интегралом?
2.Сформулируйте свойства определенного интеграла, запишите формулы.
3. Перечислите методы нахождения определенного интеграла.

Практические задания:

Вычислить следующие интегралы:

Задание на «3». 1) $\int_1^2 3dx$; 2) $\int_0^1 x^3dx$; 3) $\int_3^4 2xdx$; 4) $\int_{-1}^1 2x^3dx$

Задание на «4: 1) $\int_1^2 (2x+1)dx$; 2) $\int_{-2}^2 (3x^2-3x+6)dx$; 3) $\int_{-3}^0 (2x^3-4x)dx$; 4) $\int_3^4 (2-x)^5dx$

Задание на «5»: 1) $\int_0^1 \sqrt{3x}dx$; 2) $\int_{-1}^1 \frac{1}{4x^2}dx$; 3) $\int_0^3 \sqrt[3]{3x-1}dx$; 4) $\int_1^2 \frac{1}{(2x+6)^2}dx$.

Тренажер

Задание:

1. Вычислить интегралы:

1) $\int_0^1 x\,dx$;

2) $\int_2^3 x^2 dx$;

3) $\int_{-1}^2 (x^2+2x+1)dx$;

4) $\int_{-2}^3 (4x^3-3x^2+2x+1)dx$;

5) $\int_{-1}^0 (x^3+2x)dx$;

6) $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x^3}dx$;

7) $\int_0^4 \sqrt{x}dx$;

8) $\int_1^8 \sqrt[3]{x^2}dx$;

9) $\int_{-1}^3 (1-2x+3x^2)dx$

10) $\int_{-2}^2 (6x^2+3x-5)dx$

11) $\int_0^5 (2x^3-3x)dx$

12) $\int_{-2}^2 (-6x^3+2x^2-5x+1)dx$

13) $\int_{-2}^0 (2x^3+8x)dx$

14) $\int_{-1}^1 \frac{1}{2x^2}dx$

15) $\int_{-1}^1 \sqrt{5x}dx$

16) $\int_0^1 \sqrt[3]{x^4}dx$

2. Вычислить интегралы методом замены переменной:

1) $\int_4^5 (4-x)^3 dx$;

2) $\int_0^1 \frac{1}{(3x+1)^4}dx$;

3) $\int_0^3 \sqrt[3]{3x-1}dx$;

4) $\int_1^5 \sqrt{(2x-1)^3}dx$

5) $\int_{-1}^2 (6+2x)^3 dx$

6) $\int_0^2 \frac{1}{(2x-4)^2}dx$

7) $\int_1^2 \sqrt[3]{5x+6}dx$

8) $\int_3^4 (10-2x)^7 dx$

3. Вычислить интегралы:

1) $\int_{-1}^3 (x^3+1)dx$; 2) $\int_1^2 \frac{2x^3+1}{x^2}dx$; 3) $\int_0^2 (2x-1)^3 dx$; 4) $\int_0^4 (3x^2+2x+4)dx$

5) $\int_2^3 (2x-1)^3 dx$; 6) $\int_0^1 \frac{1}{(3x+1)^4}dx$; 7) $\int_{-4}^1 (4-x^2-3x)dx$; 8) $\int_0^4 \sqrt{x^3}dx$

9.10. Вычисление площадей плоских фигур с помощью определенного интеграла

В результате изучения темы студент должен:
уметь:
-вычислять площади плоских фигур с помощью определенного интеграла.
знать:
- формулу вычисления площади плоских фигур с помощью определенного интеграла.

Вычисление площадей плоских фигур с помощью определенного интеграла.

Дана фигура, ограниченная графиком на отрезке [а;в] функции f (x), осью ОХ и прямыми x = a, x = в.

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

Пример 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$y = \frac{1}{2}x^2 + 1$, y = 0, x = -2, x = 3.

$$S = \int_{-2}^{3} (\frac{1}{2}x^2 + 1)dx = 10\frac{5}{6}$$

Пример 2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$y = -x^2 - 1$, y = 0, x = -1, x = 2.

$$S = \int_{-1}^{2} (-x^2 - 1)dx = 6$$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1.Запишите формулу вычисления площадей плоских фигур с помощью определенного интеграла.

Практические задания:

Вычислить площадь фигур, ограниченных линиями:

Задание на «3». $y = 2x^2$, y = 0, x = 1, x = 2.

Задание на «4: $y = 3x^2-4$, y = 0, x = -2, x = 1.

Задание на «5»: $y = 2x^2+6x$, $y = 0$, $x+1 = 0$, $x-2 = 0$.

Тренажер

Задание:

Вычислить площадь фигур, ограниченных линиями:

1) $y = 3x - 1$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 4$.
2) $x + 2y - 4 = 0$, $y = 0$, $x = -3$, $x = 2$.
3) $y = x^2$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 3$.
4) $x - y + 2 = 0$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 2$.
5) $2x - 3y + 6 = 0$, $y = 0$, $x = 3$, $x=0$
6) $y = 4x^3$, $y = 0$, $x = 2$, $x =-1$.
7) $y = x^2+1$, $y = 0$, $x = 2$, $x = -1$.
8) $y = x^3-3$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 1$.
9) $y = -3x^2$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$.
10) $y = -x^2+4$, $y = 0$
11) $y = x^2$, $y = 2x$
12) $y = 3x^2$, $y = 0$, $x = -3$, $x = 2$.
13) $y = x^3$, $y = 0$, $x = -2$, $x = 2$.
14) $y = x^3-x$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 1$.

9.11. Дифференциальные уравнения первого порядка

Дифференциальные уравнения первого порядка (дополнительный материал)

Дифференциальным называется уравнение, содержащее неизвестную переменную x, искомую функцию y и ее производные $y^/, y^{//}, \dots, y^n$

$F = (x, y, y^/, y^{//}, \dots, y^n) = 0$

Дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида

$F (x, y, y^/) =0$

Решением дифференциального уравнения называется такая функция, которая обращает это уравнение в тождество.

Уравнение вида $y' = f_1(x) f_2(x)$ называется уравнением с разделяющимися переменными.

(или $\frac{dy}{dx} = f_1(x) f_2(x)$)

Пример 1. Решить уравнение:

$ydy = 3x^2 dx$

$\int ydy = \int 3x^2 dx$

$\frac{y^2}{2} = x^3 + C$

Пример 2. Решить уравнение:

$2ydy = (1-3x^2) dx$

$\int 2ydy = \int (1-3x^2) dx$

$y^2 = -x^3 + C$

Пример 3. Решить уравнение:

$\frac{dy}{x^2} = \frac{dx}{y^2}$

$y^2 dy = x^2 dx$

$\int y^2 dy = \int x^2 dx$

$\frac{y^3}{3} = \frac{x^3}{3} + C$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1.Какое уравнение называется дифференциальным?
2.Какое уравнение называется дифференциальным уравнением первого порядка?
3. Что называют решением дифференциального уравнения?

Практические задания:

Решить уравнения:

<u>Задание на «3».</u> 1) $6ydy = 3x\,dx$;

2) $2y^2dy = -x^3dx$;

3) $x^2\,dx = (y+6)dy$;

4) $6y^4\,dy = (5x^2-7x)\,dx$;

<u>Задание на «4:</u> 1) $(9-2y^2)dy – (4-x^3)dx=0$;

2) $-2x^2\,dx + (y+4)dy=0$;

3) $(-17y-6y^2+11)dy – (1/6x^2 – 1/2x^3)dx=0$;

4) $\frac{dy}{x+3} = \frac{dx}{y-4}$

<u>Задание на «5»:</u> 1) $\frac{-8+y}{dx} = \frac{4+2x^2}{dy}$;

2) $\frac{dy}{dx} = \frac{x^{\frac{1}{3}}}{-9+y^2}$;

3) $\frac{dy}{\sqrt{x^3}} = \frac{dx}{y^2}$

4) $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1}{4}x^2 - 3x + 1}{y^2 + 10}$

Тренажер

<u>Задание</u>:

Решить уравнения:

1) $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{1+y^2}$;

2) $\frac{dy}{\sqrt{x}} = \frac{dx}{y^2}$;

3) $\frac{(1+y)}{dx} = \frac{(1+x^2)}{dy}$;

4) $\frac{dy}{(x-1)} = \frac{dx}{y-2}$;

5) $y dy = 3x^2\, dx$;

6) $(2+2y^2)dy - (1-x^3)dx=0$;

7) $x^2\, dx + (y-1)dy=0$;

8) $\frac{3-y^3+4y}{dx} = \frac{x^4-2x-3}{dy}$;

9) $\frac{dy}{dx} = \frac{6x^2-3x+1}{y^2+10}$;

10) $(6y+3y^2)dy - (7x^4 - 3x^3 - 5)dx=0$;

11) $\frac{dy}{6x^2-6} = \frac{dx}{4y^2-2y-7}$;

12) $6x^2\, dx + (y^9 - 13)dy=0$;

13) $\frac{5+3y}{dx} = \frac{2+4x^2}{dy}$;

14) $\frac{dy}{\sqrt{x^3}} = \frac{dx}{y^2-2y+3}$;

15) $y^4\, dy = (5x^2+2x)\, dx$;

16) $\frac{dy}{dx} = \frac{4x}{3y+2y^2}$;

17) $\frac{5-2y^6+6y}{dx} = \frac{2x^4-3x+1}{dy}$;

18) $(9 - 3y^2)dy - (3 - 4x^3)dx=0$;

19) $\frac{dy}{(x^3-10)} = \frac{dx}{2y+3}$;

20) $(3y-6y^2-1)dy - (6x^2 - 2x^3)dx=0$.

Раздел 10.Многогранники

10.1. Геометрическое тело, его поверхность. Многогранники. Призма

В результате изучения темы студент должен:
знать:
- понятие геометрического тела;
- понятие многогранника;
- понятие граней многогранника;
- понятие ребер многогранника;
- понятие вершин многогранника;
- понятие диагонали многогранника;
- понятие призмы;
- понятие оснований призмы;
- понятие боковых ребер призмы;
- свойства призмы;
- понятие высоты призмы;
- понятие наклонной призмы.

Многогранники

В стереометрии изучаются фигуры в пространстве, называемые *телами.*

Геометрическое тело представляет собой часть пространства, занятую физическим телом и ограниченную поверхностью.

Многогранник – тело, поверхность которого состоит из конечного числа плоских многоугольников. Например, пирамида.

Многогранник называется выпуклым, если он расположен по одну сторону плоскости каждого плоского многоугольника на его поверхности. Граничные многоугольники называются *гранями*, их стороны - *ребрами*, а вершины – *вершинами многогранника*.

Отрезок, соединяющий две вершины, не лежащие в одной грани, называется *диагональю.*

Например, куб – выпуклый многогранник. Его поверхность состоит из 6 квадратов: АВСД,… Они является его гранями. Ребрами куба являются стороны этих квадратов: АВ,… Вершинами куба являются вершины квадратов: А, В, С… У куба 6 граней, 12 ребер и 8 вершин.

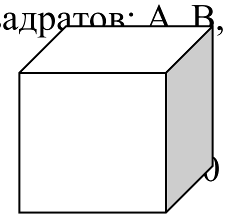


Рис.40

Призма

Призма – многогранник, который состоит из двух плоских многоугольников, лежащих в разных плоскостях и совмещаемых параллельным переносом, и всех отрезков, соединяющих соответствующие точки этих многоугольников.

Многоугольники называются *основаниями* призмы, а отрезки, соединяющие соответствующие вершины, - *боковыми ребрами* призмы.

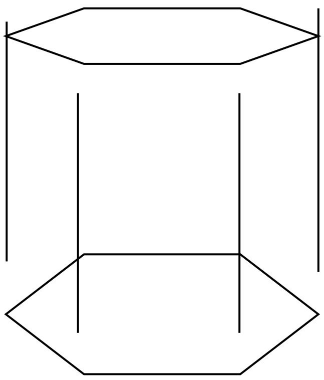


Рис. 41

<u>Свойства:</u>

1. Основания призмы равны;
2. У призмы основания лежат в параллельных плоскостях;

3. У призмы боковые ребра параллельны и равны.

Поверхность призмы состоит из оснований и боковой поверхности. Боковая поверхность состоит из параллелограммов. У каждого из них две стороны являются соответствующими сторонами оснований, а две другие – соседними боковыми ребрами.

Высотой призмы является расстояние между плоскостями ее оснований. Отрезок, соединяющий две вершины призмы, не принадлежащий одной грани, называется *диагональю* призмы.

Призма называется *прямой,* если ее боковые ребра перпендикулярны основаниям. В остальных случаях призма называется *наклонной*. Прямая призма называется *правильной*, если ее основания являются правильными многоугольниками.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1.Что такое геометрическое тело?
2.Что такое многогранник? Приведите примеры.
3. Что называют гранями многогранника?
4. Что называют ребрами многогранника?
5. Что называют диагональю многогранника?
6. Из чего состоит куб?
7. Что такое призма?
8. Что называют основаниями призмы?
9. Что называют боковыми ребрами призмы?
10. Сформулируйте свойства призмы.
11. Из чего состоит поверхность призмы?
12. Что называют высотой призмы?
13. Какая призма называется прямой? Наклонной?

10.2. Параллелепипед. Пирамида.

В результате изучения темы студент должен:
знать:
- понятие параллелепипеда;
- понятие противолежащих граней параллелепипеда;
- свойства параллелепипеда;
- понятие прямоугольного параллелепипеда;
- понятие куба;
- свойство диагонали прямоугольного параллелепипеда;
- понятие пирамиды;
- понятие боковых ребер пирамиды;
- понятие тетраэдра;

- свойство пирамиды;
- понятие высоты пирамиды;
- понятие правильной пирамиды;
- понятие апофемы пирамиды.

Параллелепипед

Если основание призмы есть параллелограмм, то она называется *параллелепипедом*. У него все грани – параллелограммы. Параллелепипед бывает *прямой* и *наклонный.*

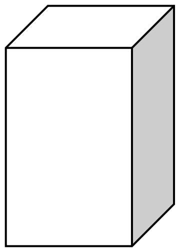


Рис. 42

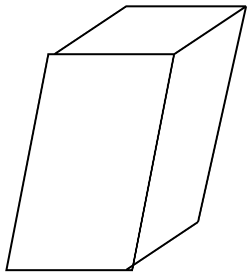


Рис. 43

Грани параллелепипеда, не имеющие общих вершин, называются *противолежащими.*

Свойства:

1) У параллелепипеда противолежащие грани равны и параллельны;
2) Диагонали параллелепипеда пресекаются в одной точке и точкой пересечения пресекаются пополам;
3) У параллелепипеда точка пересечения диагоналей является центром его симметрии.

Прямой параллелепипед, у которого основанием является прямоугольник, называется *прямоугольным параллелепипедом*. У него все грани – прямоугольники.

Прямоугольный параллелепипед, у которого все грани равны, называется *кубом.*

У прямоугольного параллелепипеда три измерения.

В прямоугольном параллелепипеде квадрат любой диагонали равен сумме квадратов трех его измерений.

Пирамида

Пирамида – многогранник, который состоит из плоского многоугольника – основания пирамиды, точки, не лежащей в плоскости, - вершины пирамиды и всех отрезков, соединяющих вершину с точками основания.

Отрезки, соединяющие вершину пирамиды с вершинами основания, называются боковыми ребрами.

Поверхность пирамиды состоит из основания и боковых граней. Каждая боковая грань – треугольник. Одной из его вершин является вершина пирамиды, а противолежащей стороной – сторона основания пирамиды.

Треугольная пирамида называется *тетраэдром.*

Свойства: плоскость, пересекающая пирамиду и параллельная его основаниям, отсекает подобную пирамиду.

Высотой пирамиды называется перпендикуляр, опущенный из вершины пирамиды на плоскость основания.

Пирамида называется *правильной*, если ее основанием является правильный многоугольник, а основание высоты совпадает центром этого многоугольника.

Высота боковой грани правильной пирамиды, проведенная из его вершины, называется *апофемой.* Боковой поверхностью пирамиды является сумма площадей ее боковых граней.

Боковая поверхность правильной пирамиды равна произведению полупериметра основания на апофему.

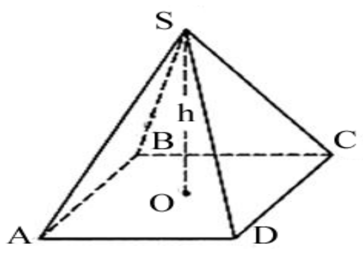


Рис. 44

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1.Что такое параллелепипед?
2. Какие грани параллелепипеда называются противолежащими?
3. Сформулируйте свойства параллелепипеда.
4. Какой параллелепипед называется прямоугольным?

5.Что такое куб?
6. Сколько измерений у прямоугольного параллелепипеда?
7. Сформулируйте свойство диагонали параллелепипеда.
8. Что такое пирамида?
9. Что называют боковыми ребрами пирамиды?
10. Из чего состоит поверхность пирамиды?
11. Что такое тетраэдр?
12. Сформулируйте свойство пирамиды.
13. Что называют высотой пирамиды?
14. Что такое апофема?
15. Чему равна боковая поверхность пирамиды?

Раздел 11. Тела и поверхности вращения

11.1. Поверхность вращения. Тело вращения. Цилиндр. Конус

В результате изучения темы студент должен:
знать:
- понятие цилиндра;
- понятие оснований цилиндра;
- понятие образующих цилиндра;
- свойства цилиндра;
- понятие прямого цилиндра;
- понятие радиуса цилиндра;
- понятие высоты цилиндра;
- понятие оси цилиндра;
- понятие конуса;
- понятие образующих конуса;
- понятие прямого конуса;
- понятие высоты конуса;
- понятие усеченного конуса.

Цилиндр

Цилиндр – тело, который состоит из двух кругов не лежащих в одной плоскости и совмещаемых параллельным переносом, и всех отрезков, соединяющих соответствующие точки этих кругов. Круги называются *основаниями цилиндра*, а отрезки, соединяющие соответствующие точки этих кругов – *образующими цилиндра.*

Свойства:

1) Основания цилиндра равны;
2) У цилиндра основания лежат в параллельных плоскостях;
3) У цилиндра образующие параллельны и равны.

Поверхность цилиндра состоит из оснований и боковой поверхности. Боковая поверхность состоит из образующих.

Цилиндр называется *прямым*, если его образующие перпендикулярны плоскостям оснований.

Радиусом цилиндра называется радиус его основания. *Высотой* цилиндра называется расстояние между плоскостями его оснований. *Осью* цилиндра называется прямая, проходящая через центры его оснований. Она параллельна образующим.

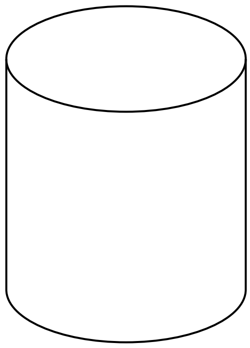


Рис. 45

Конус

Конус – тело, которое состоит из круга – основания конуса, точки, не лежащей в плоскости этого круга, - вершины круга, и всех отрезков, соединяющих вершину с точками основания. Отрезки, соединяющие вершину с точками основания, называются *образующими конуса*. Поверхность конуса состоит из основания и боковой поверхности.

Конус называется *прямым*, если прямая, соединяющая вершину конуса с центром основания, перпендикулярна плоскости основания.

Высотой конуса называется перпендикуляр, опущенный из вершины на плоскость основания.

Плоскость, параллельная основанию конуса и пересекающая его, отсекает от него меньший конус. Оставшаяся часть называется *усеченным конусом*.

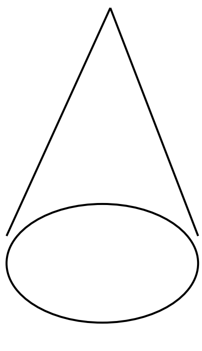


Рис. 46

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1.Что такое цилиндр?
2. Что называют основаниями цилиндра?
3. Что называют образующими цилиндра?
4. Сформулируйте свойства цилиндра.
5. Из чего состоит поверхность цилиндра?
6. Из чего состоит боковая поверхность цилиндра?
7. Что называют радиусом цилиндра?
8. Что называют высотой цилиндра?
9. Что называют осью цилиндра?
10. Что такое конус?
11. Что называют образующими конуса?
12. Из чего состоит поверхность конуса?
13. Какой конус называется прямым?
14. Что называют высотой цилиндра?
15. Какой конус называется усеченным?

11.2.Сфера и шар

В результате изучения темы студент должен:
знать:
- понятие шара;
- понятие центра и радиуса шара;
- понятие сферы;
- понятие диаметра шара;
- понятие диаметрально противоположными точками шара.

Шар – тело, которое состоит из всех точек пространства, находящегося на расстоянии, не больше данного, от данного точки. Эта точка называется *центром* шара, а данное расстояние – *радиусом* шара.

Граница шара называется шаровой поверхностью, или *сферой.*

Отрезок, соединяющий центр шара с точкой шаровой поверхности, называется *радиусом*.

Отрезок, соединяющий центр шара с точкой шаровой поверхности и проходящий через центр шара, называется *диаметром.*

Концы любого диаметра называются *диаметрально противоположными точками* шара.

Всякое сечение шара плоскостью есть круг. Центр этого круга есть основание перпендикуляра, опущенного из центра шара на секущую плоскость.

Центр шара является центром его симметрии.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1.Что такое шар?
2. Что называют радиусом шара?
3. Что такое сфера?
4. Что называют диаметром шара?
5. Какие токи шара называются диаметрально противоположными?
6. Что является сечением шара?

Тренажер

Задание: Решить задачи:

1. Один из углов при пересечении двух прямых равен 65^0. Найти остальные углы.
2. Найти высоту равнобокой трапеции, у которой основания равны 5м и 11м, а боковая сторона 4м.
3. Один из углов при пересечении двух прямых на 45^0 больше другого. Найти эти углы.
4. Внешний угол равнобедренного треугольника равен 42^0. Найти углы треугольника.
5. У параллелепипеда три грани имеют площади 1м^2, 2м^2, 3м^2. Чему равна полная поверхность параллелепипеда?
6. Найти диагонали прямоугольного параллелепипеда по трем его измерениям:

1) 1,2,2.
2) 2,3,6.
3) 6,6,7.

7. В прямоугольном параллелепипеде стороны основания равны 7 дм и 24 дм, а высота 8 дм. Найти площадь диагонального сечения.
8. Радиус основания цилиндра 2м, высота 3м. Найти диагональ осевого сечения.
9. Высота цилиндра 8см, радиус основания 5 см. Цилиндр пересечен плоскостью так, что в сечении получился квадрат. Найти расстояние от этого сечения до оси.
10. Радиус основания конуса 3м, высота основания 4м. Найти образующую.

Раздел 12. Измерения в геометрии

12.1.Объем геометрического тела. Объем призмы, параллелепипеда

В результате изучения темы студент должен:
уметь:
- вычислять объем призмы;
- вычислять объем параллелепипеда.

знать:
- понятие объема геометрического тела;
- свойства объема;
- формулу объема призмы;
- формулу объема прямоугольного параллелепипеда;
- формулу объема наклонного параллелепипеда.

Объем геометрического тела. Объем призмы, параллелепипеда.

Объем – положительная величина, численное значение которой обладает следующими свойствами:

1) Равнее тела имеют равные объемы;
2) Если тело разбито на части, являющиеся простыми телами, то объем этого тела равен сумме объемов его частей;
3) Объем куба, ребро которого равно единице длины, равен единице.

Рассмотрим прямоугольный параллелепипед с линейными измерениями а, в, с.

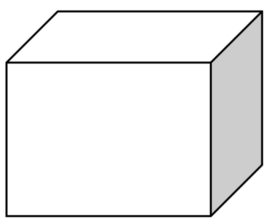


Рис. 47

Объем прямоугольного параллелепипеда с линейными измерениями а, в, с вычисляется по формуле $V = \grave{a} \cdot \hat{a} \cdot \tilde{n}$

Рассмотрим наклонный параллелепипед:

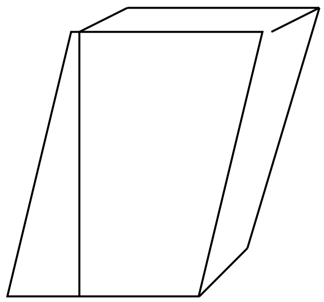


Рис. 48

Объем равен произведению основания на высоту

$$V = S_{\hat{\imath}\tilde{n}\acute{\imath}} \cdot H$$

Рассмотрим призму. Объем любой призмы равен произведению площади основания на высоту.

$$V = S_{\hat{\imath}\tilde{n}\acute{\imath}} \cdot H$$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1.Что такое объем?
2. Чему равен объем прямоугольного параллелепипеда?
3. Чему равен объем наклонного параллелепипеда?
4. Чему равен объем призмы?

12.2. Объем пирамиды, цилиндра

В результате изучения темы студент должен:
уметь:
- вычислять объем пирамиды;
- вычислять объем цилиндра.
знать:
- формулу объема пирамиды;
- формулу объема цилиндра.

Объем пирамиды, цилиндра.

Рассмотрим пирамиду.

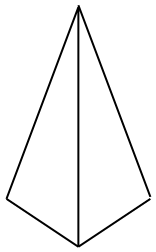
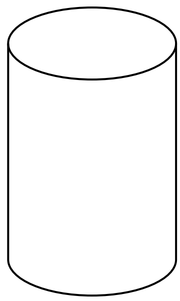


Рис. 49

Объем любой пирамиды равен одной трети произведения площади ее основания на высоту $V = \frac{1}{3} S_{\hat{i}\tilde{n}\acute{i}} \cdot \acute{I}$

Рассмотрим цилиндр.



$V = \pi R^2 H$

Рис.50

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Чему равен объем пирамиды?
2. Чему равен объем цилиндра?

12.3.Объем конуса, шара

В результате изучения темы студент должен:
уметь:
- вычислять объем конуса;
- вычислять объем шара.

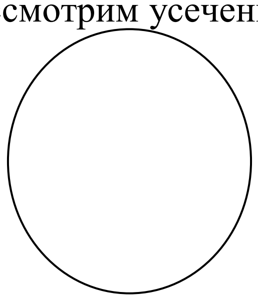
знать:
- формулу объема конуса;
- формулу объема шара.

Объем конуса, шара

Объем конуса равен одной трети произведения площади основания на высоту.

$$V = \frac{1}{3} S_{\hat{I}\tilde{N}\acute{I}} \cdot \acute{I} = \frac{1}{3} \pi R^2 \acute{I}$$

Рассмотрим усеченный конус с радиусами оснований R_1 и R_2.



$$V = \frac{1}{3} \pi \acute{I} \; (R_1^2 + R_1 \cdot R_2 + R_2^2)$$

Рассмотрим шар. $$V = \frac{4}{3} \pi R^3$$

Рис.51

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Чему равен объем конуса?
2. Чему равен объем шара?

Тренажер

Задание: Решить задачи:

1. Три куба с ребрами 3 см, 4 см, 5 см переплавлены в один куб. Найти ребро этого куба.
2. Требуется установить резервуар для воды емкостью 10 м^3 на площадке размером 2,5 х 1,75 м, служащей для него дном. Найти высоту резервуара.
3. Измерения прямоугольного параллелепипеда 15 м, 50 м, 36 м. Найти ребро равновеликого ему куба.
4. В треугольной пирамиде со сторонами основания 5 см, 6 см, 7 см высота равна 3,5 см. Найти объем пирамиды.
5. В цилиндре с радиусом основания 3 м объем равен 10 м^3. Найти высоту цилиндра.
6. В цилиндре с диаметром 5 см высота равна 7,5 см. Найти объем цилиндра.

7. 25 м медной проволоки имеют массу 100,7 г. Найти диаметр проволоки (плотность меди 8,94 г/см^3).
8. Куча щебня имеет каноническую форму, радиус основания которой 2 м, а образующая 2,5 м. Найти объем кучи щебня.
9. Сосновое бревно длиной 15,5 м имеет диаметры концов 42 см и 25 см. Чему равен объем бревна?
10. Усеченный конус имеет, у которого радиусы оснований 4 см и 22 см, и равновеликий цилиндр имеют одну и ту же высоту. Чему равен радиус основания этого цилиндра?
11. Требуется переплавить в один шара два чугунных шара с диаметрами 25 см и 35 см. Найти диаметр нового шара.
12. Плоскость, перпендикулярная диаметру шара, делит его на части 3 см и 9 см. Найти объем равновеликого ему цилиндра.

12.4. Площадь поверхности геометрических тел. Площадь поверхности призмы, пирамиды

В результате изучения темы студент должен:
уметь:
- вычислять площадь поверхности призмы;
- вычислять площадь поверхности пирамиды.
знать:
- формулу площади поверхности призмы;
- формулу площади боковой поверхности призмы;
- формулу площади поверхности пирамиды;
- формулу площади боковой поверхности пирамиды;
- формулу площади боковой поверхности усеченной пирамиды.

Площадь поверхности призмы

Площадь поверхности призмы – сумма площадей всех ее граней.

$$S_{полн} = S_{бок} + 2S_{осн}$$

Боковая поверхность призмы равна произведению полупериметра основания на высоту призмы, т. е. на длину бокового ребра.

$$S_{áîê} = P \cdot l$$

$$S_{ïîëí} = P \cdot l + 2S_{îñí}$$

Площадь поверхности пирамиды

Площадь поверхности пирамиды – сумма площадей всех ее граней.

$S_{полн} = S_{бок} + S_{осн}$

Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна половине произведения периметра основания на апофему.

$$S_{áîê} = \frac{1}{2} P_{îñí} \cdot Í$$

$$S_{ïîëí} = \frac{1}{2} P_{îñí} \cdot Í + S_{îñí}$$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Чему равна площадь поверхности призмы?
2. Чему равна площадь боковой поверхности призмы?
3. Чему равна площадь поверхности пирамиды?
4. Чему равна площадь боковой поверхности пирамиды?
5. Чему равна площадь боковой поверхности усеченной пирамиды?

12.5. Площадь поверхности цилиндра, конуса и шара.

В результате изучения темы студент должен:
уметь:
- вычислять площадь поверхности цилиндра;
- вычислять площадь поверхности конуса;
- вычислять площадь поверхности шара.

знать:
- формулу площади поверхности цилиндра;
- формулу площади боковой поверхности цилиндра;
- формулу площади поверхности конуса;
- формулу площади боковой поверхности конуса;
- формулу площади поверхности шара.

Площадь поверхности цилиндра.

Дан цилиндр.

$S_{полн} = S_{бок} + 2S_{осн}$

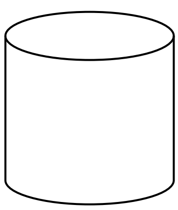


Рис.52

Площадь боковой поверхности цилиндра равна произведению длины окружности С его основания на высоту.

$$S_{\text{áîê}} = \tilde{N} \cdot H = 2\pi R \cdot H$$

R - радиус основания цилиндра

Площадь полной поверхности цилиндра равна сумме площади его боковой поверхности и площадей оснований.

$$S_{полн} = 2\pi RH + 2\pi R^2$$

Площадь поверхности конуса

Площадь полной поверхности конуса:

$S_{полн} = S_{бок} + S_{осн}$

Площадь боковой поверхности конуса равна половине произведения длины окружности его основания на образующую.

$$S_{\text{áîê}} = \frac{1}{2}\tilde{N} \cdot l = \frac{1}{2}2\pi Rl = \pi Rl$$

$$S_{полн} = \pi Rl + 2\pi R^2$$

Площадь поверхности шара

Площадь сферы радиуса R вычисляется по формуле $S = 4\pi R^2$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Запишите формулу площади поверхности цилиндра.
2. Запишите формулу площади боковой поверхности цилиндра.
3. Запишите формулу площади поверхности конуса.
4. Запишите формулу площади боковой поверхности конуса.
5. Запишите формулу площади поверхности шара.

Тренажер

Задание: Решить задачи:

1. Периметр перпендикулярного сечения призмы равен 20 см. Ребро призмы 20 см. Найти площадь боковой поверхности призмы.
2. Основание пирамиды – ромб с диагоналями 6 м и 8 м. Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей и равна 1 м. Найти площадь боковой поверхности пирамиды.
3. Основание пирамиды – равнобедренный треугольник со сторонами 40 см, 25 см и 25 см. Ее высота проходит через вершину угла, противолежащего стороне 40 см, и равна 8 см. Найти площадь боковой поверхности пирамиды.
4. Основание пирамиды - квадрат, ее высота проходит через одну из вершин основания. Найти площадь боковой поверхности, если сторона основания 20 см, а высота 21 см.
5. Длина диагонали прямоугольного параллелепипеда $5\sqrt{2}$ см, длины ребер основания 3 см и 4 см. Найти площадь поверхности.
6. Высота конуса 10 см, диаметр основания 12 см. Найти площадь боковой поверхности и полную площадь конуса.
7. Цилиндрическая дымовая труба с диаметром 65 см имеет высоту 18 м. Сколько жести нужно для изготовления трубы?
8. Конусообразная палатка высотой 3,5 м и диаметром 4 м покрыта парусиной. Сколько квадратных метров парусины пошло на палатку?
9. Крыша башни имеет форму конуса. Высота крыши 2 м, диаметр башни 6 м. Найти поверхность крыши.
10. Сколько олифы потребуется для окраски внешней поверхности 100 ведер, имеющих форму усеченного конуса с диаметрами оснований 25 см и 30 см и образующей 27,5 см, если на 1 $м^2$ требуется 150 г олифы.
11. Основание пирамиды – равнобедренный треугольник со сторонами 6 см, 6 см и 8 см; высота равна 9 см. Найти объем пирамиды.
12. Найти диагонали прямоугольного параллелепипеда, если его измерения равны 6, 6 и 7.
13. Найти сторону и апофему правильной треугольной пирамиды, если ее боковое ребро равно 10 см, а боковая поверхность 144 $см^2$.

13. Элементы комбинаторики.

В результате изучения темы студент должен:
уметь:
- вычислять размещения, перестановки и сочетания.

знать:
- понятие комбинаторики;
- понятие размещений;
- формулу числа размещений;
- понятие перестановок;
- формулу перестановок;
- понятие сочетаний;
- формулу сочетаний.

Элементы комбинаторики.

При решении ряда теоретических и практических задач требуется из конечного множества элементов по заданным правилам составлять различные комбинации и производить подсчет числа всех возможных таких комбинаций. Такие задачи называются *комбинаторными*, а раздел математики, занимающийся их решением, называется *комбинаторикой.*

Элементы комбинаторики:

1. *Размещения* – размещениями из n элементов по m в каждом называются такие соединения, которые отличаются друг от друга либо самими элементами, либо порядком их расположения.

Число размещений из n элементов по m обозначается символом A_n^m и вычисляется по формуле

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)...(n-m+1)$$

Пример 1. Найти число размещений из 10 элементов по 4.

$$\grave{A}_{10}^4 = 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7 = 5040$$

2. *Перестановки* – перестановками из n элементов называются такие соединения из всех n элементов, которые отличаются друг от друга порядком размещения элементов.

Число перестановок из n элементов обозначается символом P_n.

$$P_n = A_n^n = n(n-1)(n-2)...3\cdot 2\cdot 1 \text{ или}$$

$$P_n = 1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-1)n$$

Число всех перестановок из n элементов равно произведению последовательных чисел от 1 до n включительно.

Произведение $1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-1)n$ обозначается символом n!, причем

0! = 0

1! = 1

Получаем $P_n = n!$

$$A_n^m = \frac{P_n}{P_{n-m}} = \frac{n!}{(n-m)!}$$

При решении задач часто используется равенство $A_n^{m+1} = (n-m)A_n^m$

<u>Пример 2</u>. Составить всевозможные перестановки из элементов:

1) 5 и 6
(5; 6) (6;5)

$P_2 = 1 \cdot 2 = 2$

2) x,y, z

$P_3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

3) *Сочетания* - сочетаниями из n элементов по m в каждом называются такие соединения, которые отличаются друг от друга хотя бы одним элементом.

Число сочетаний из n элементов по m означается символом C_n^m. Находится по формуле

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} \text{ или}$$

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} \quad \text{или}$$

$$C_n^m = \frac{n(n-1)\ldots[n-(m-1)]}{m!}$$

<u>Пример 3</u>. Вычислить C_{15}^{13}

$$C_{15}^{13} = \frac{15!}{13!(15-13)!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13!}{13! 2 \cdot 1} = 105$$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Что называют комбинаторикой?
2. Перечислите элементы комбинаторики.
3. Что такое размещения?
4. Запишите формулу вычисления числа размещений.
5. Что такое перестановки?
6. Запишите формулу вычисления числа перестановок.
7. Что такое сочетания?

8. Запишите формулу вычисления числа сочетаний.

Практические задания:

Задание на «3».

1.Найти число размещений: 1) A_{11}^{3} ; 2) A_{9}^{2} ; 3) A_{12}^{5} ; 4) A_{6}^{3}; 5) A_{7}^{5}.

2. Вычислить значение выражения: 1) 3! + 4!; 2) 5! – 2!; 3) 6! · 2!

Задание на «4:

1.Вычислить:1) C_{6}^{4}; 2) C_{5}^{1}; 3) C_{7}^{3}; 4) C_{4}^{2}

2.Вычислить: 1) $P_3 - P_4$; 4) 45+$P_2 \cdot P_4$; 5) $P_6 + P_5$.

Задание на «5»:

Вычислить:1) $\dfrac{A_6^5 + A_6^4}{A_6^3} + A_5^2 \cdot A_4^2 \cdot A_3^2$;

2) $\dfrac{C_{10}^{7}}{C_8^2} - \dfrac{50}{C_{14}^{10} + C_{14}^{9}}$

Тренажер

Задание:

1. Найти число размещений: 1) A_{15}^{3} ; 2) A_{6}^{2} ; 3) A_{16}^{5} ; 4) A_{5}^{3}; 5) A_{7}^{4}.
2. Вычислить значение выражения: 1) 5! + 6!; 2) 4! – 2!; 3) 7! * 3!
3. Вычислить: 1) C_{15}^{13} ; 2) $C_6^4 + C_5^1$; $C_7^3 - C_4^2$.
4. Вычислить: 1) P_3; 2) P_5; 3) $P_3 + P_4$; 4) $P_2 \cdot P_4$; 5) $P_6 - P_5$.
5. Вычислить:
   1) $A_7^3 + A_6^3 + A_5^3$;
   2) $\dfrac{A_6^5 + A_6^4}{A_6^3}$;
   3) $A_5^2 \cdot A_4^2 \cdot A_3^2$;
   4) $\dfrac{P_5 + P_6}{P_4}$;
   5) $P_6 \cdot (P_7 - P_3)$;
   6) $C_7^5 + C_5^2$;

7) $\frac{C_{14}^{9}+C_{14}^{10}}{C_{15}^{10}}$.

6. Найти значение выражений:

   1) $\frac{10!-8!}{89}$;

   2) $\frac{5!+6!}{4!}$;

   3) 6! (7! – 3!);

7. Сколькими способами можно составить список из 10 человек.
8. Сколькими способами можно рассадить 7 человек по 7 местам?
9. Сколько пятизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5 без повторений?
10. Вычислить: 1) C_{12}^{10} ; 2) 1) C_{100}^{98} ; 3) 1) C_8^5.
11. Проверьте равенства:

   1) $C_{20}^{12} = \frac{A_{20}^{8}}{P_8}$;

   2) C_{15}^{4} - $C_{15}^{3} = \frac{C_{16}^{4}}{2}$;

   3) $C_{15}^{6} = C_{15}^{9}$;

   4) $C_{10}^{5} + C_{10}^{6} = C_{11}^{6}$;

   5) $C_{14}^{9} + C_{14}^{10} = C_{15}^{10}$.

12. Вычислить:

1) A_{10}^5; 2) P_7 - P_3; 3) $\frac{C_{10}^{7}}{C_8^2}$;

4) A_7^5; 5) $P_2 \cdot P_5$; 6) $C_8^3 \cdot C_6^2$;

7) A_3^1; 8) 6! - 2!; 9) $C_4^2 + C_4^1$;

10) $\grave{A}_5^2 * A_6^3$; 11) $\frac{P_8}{24}$; 12) C_{13}^{7} ;

13) $\frac{A_7^4}{12}$; 14) $\frac{P_3+P_4}{8}$; 15) C_{10}^{8} ;

16) $(A_5^2 - A_6^3)\cdot 2$; 17) $\frac{P_9}{412}$; 18) $C_9^4 + C_5^3$;

19) $\frac{(A_6^3 + A_5^4)}{10}$; 20) $\frac{P_4 + P_5}{P_2}$; 21) C_5^2;

22) $\frac{\grave{A}_5^3 \cdot 2}{11}$; 23) $P_8 : 15 + 12{,}51$; 24) C_{10}^6;

25) $\frac{125}{A_9^3}$; 26) $103{,}2 + \text{Đ}_3 \cdot 9{,}3$; 27) $C_{13}^{10} + C_{13}^{11}$;

28) $\frac{A_{10}^5 + A_{10}^4 + A_{10}^3)}{19}$; 29) $\frac{105}{P_4 - P_2}$; 30) C_{18}^{13} - C_{18}^{14};

31) $\frac{A_{11}^4 + A_{11}^5}{A_{11}^6}$; 31) $\frac{P_7 + P_3}{P_4}$; 32) $C_{12}^8 + C_{12}^7$;

33) $\frac{A_9^7 - A_9^6}{11}$; 34) $18{,}3 + \text{Đ}_5 \cdot 23.2$; 35) $\frac{60.3}{C_{14}^{10} + C_{14}^9}$;

36) $\frac{A_6^3 - A_7^4}{5}$; 37) $\text{Đ}_7 \cdot (12 + P_4)$; 38) $C_4^2 \cdot C_{13}^7$;

39) $\frac{612}{A_7^5} - 43$; 40) $3{,}5 + P_8 : 12 - 2$; 41) C_{10}^7 - C_{13}^{11}

14.1.Случайный опыт и случайное событие

В результате изучения темы студент должен:
уметь:
- определять достоверные и невозможные события;
- определять совместимые и несовместимые события;
- определять равновозможные события;
- составлять полную систему событий.

знать:
- понятие достоверных событий;
- понятие невозможных событий;
- понятие случайных событий;
- понятие испытания;
- виды случайных событий.

Случайный опыт и случайное событие

В окружающем нас мире можно наблюдать события, которые обязательно произойдут, если будет осуществлена определенная совокупность условий. Такие события называются *достоверными.*

Пример:

1. Если нагреть воду в сосуде до температуры 100 градусов, то обязательно наступит процесс кипения воды.
2. Если в корзине находятся только цветные шары и наудачу извлечен один шар, то событие «извлечен цветной шар» произойдет обязательно.

Событие, которое заведомо не произойдет, если будет осуществлена определенная совокупность условий, называется *невозможным.*

Пример: Если в ящике находятся белые шары и из урны извлечен 1 шара, то событие «извлечен черный шар» будет невозможным.

Часто приходится сталкиваться с событиями, которые при осуществлении определенных условий могут произойти, а могут не произойти, такие события называются *случайными*.

Совокупность условий, при осуществлении которых событие может произойти, а может не произойти, называется *испытанием* или *опытом.*

Пример:

1. «Брошена монета» - испытание; «появление герба» - случайное событие.
2. «Произведен выстрел по мишени» - испытание; «попадание в цель» - случайное событие.

Случайные события обозначаются большими буквами латинского алфавита А,В, С.

Пример: Событие А – попадание в мишень при выстреле.

Достоверные события обозначаются буквой U, невозможные – V.

Однородные случайные события при многократном повторении опыта подчиняются определенной закономерности. Изучением таких закономерностей занимается теория вероятностей. Она возникла в середине 17 в. Основатели: французские математики Паскаль, Ферма, голландец Гюйгенс.

Виды случайных событий:

1. *несовместимые* – называются 2 события, появление одного из которых исключает появление другого. Пример: В ящике белые и черные шары. Наудачу вынимают шар. События «достали белый шар» и «достали черный шар» будут несовместимыми.

2. *совместимые* - называются 2 события, появление одного из которых не исключает появление другого. Пример: Брошена игральная кость. События «появление двух очков» и «появление четного числа очков» будут совместимыми.
3. *равновозможные* – называют события, если условия испытания обеспечивают одинаковую возможность осуществления каждого из них. Пример: появление того или иного числа очков при бросании игральной кости есть события равновозможные, т.к. кость изготовлена из однородного материала и имеет строго симметричную форму.
4. *полная система событий* – в результате данного испытания непременно произойдет одно из них. Пример: студенту на экзамене достался биле с двумя теоретическими вопросами.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Какие события называются достоверными?
2. Какие события называются невозможными?
3. Какие события называются случайными?
4. Что называют испытанием или опытом?
5.Как обозначаются случайными событиями?
6. Какие события называются несовместимыми?
7. Какие события называются совместимыми?
8. Какие события называются равновозможными?
9. Что такое полная система событий?

Тренажер

<u>**Задание**</u>:

1. Найти среди событий достоверные и невозможные:
    1) «появление 10 очков при бросании игральной кости»;
    2) «появление 10 очков при бросании трех игральных костей»;
    3) «появление 20 очков при бросании трех игральных костей»;
    4) «наугад выбранное двузначное число не больше 100».
2. Определить, какие из событий совместимые и несовместимые:
    1) Испытание – бросание монеты; события: А – «появление герба», В – «появление цифры»;
    2) Испытание – бросание игральной кости; события: А – «появление трех очков», В – «появление нечетного числа очков»;
    3) Испытание – бросание двух монет; события: А – «появление герба на одной из монет», В – «появление герба на второй монете»;
3. Определить, являются ли равновозможными события:

1) Испытание – бросание игральной кости; события: А – «появление двух очков», В – «появление пяти очков»;
2) Испытание – бросание игральной кости; события: А – «появление двух очков», В – «появление четного числа очков»;
3) Испытание – два выстрела по мишени; события: А – «промах при первом выстреле», В – «промах при втором выстреле»;

4. Составить полную систему событий:
   1) Испытание – бросание монеты;
   2) Испытание – три выстрела по мишени;
   3) Испытание – бросание игральной кости.

14.2. Вероятность события. Операции над событиями

В результате изучения темы студент должен:
уметь:
- находить сумму событий;
- находить произведение событий;
- определять противоположные события;
- решать задачи, используя формулу вероятности события

знать:
- понятие равных событий;
- понятие суммы двух событий;
- понятие произведения двух событий;
- понятие противоположных событий;
- понятие вероятности события;
- формулу вероятности события;

Операции над событиями

Операции над событиями:

1) Равенство

Рассмотрим события:

А – «появление трех очков при бросании игральной кости»; А = $\{3\}$

В – «появление нечетного количества очков при бросании игральной кости»; В = $\{1,3,5\}$

Очевидно, что если произошло событие А, то непременно произойдет и событие В. в этом случае говорят, что событие А влечет за собой событие В (или В является следствием события А) и записывается

A (B (или B)A)

Если события А и В таковы, что А (В и В)А, то они называются равными (равносильными), при этом пишут: А=В

2) сумма событий:

а) сумма двух событий

Суммой или *объединением* двух событий А и В называется событие С, состоящее в наступлении хотя бы одного их событий А или В.

Записывают:

$$C=A+B \quad \text{или} \quad C = A \cup B$$

б) сумма нескольких событий

Суммой или *объединением* нескольких событий A_1, A_2, …A_n называется событие С, состоящее в наступлении хотя бы одного их событий A_1, A_2, …A_n.

Записывают:

$$C=\sum_{i=1}^{n} A_i$$

Пример: Найти сумму событий. А – «Появление 1 очка при бросании игральной кости». В – « Появление двух очков при бросании игральной кости».

Суммой А+В является событие «Появление не больше двух очков при бросании игральной кости».

3) произведение двух событий

Произведением или *пересечением* двух событий является событие С, состоящее в одновременном наступлении А и В.

Записывается:

$$C=A*B \quad \text{или} \quad C=A \cap B$$

Пример. Найти произведение событий А «попадание в цель первым выстрелом»; В «Попадание в цель вторым выстрелом».

Два случайных события называются противоположными, если одно из них происходит в том случае, когда не происходит другое.

Пример.

1. Попадание и промах по мишеням.
2. Появление четного и нечетного числа очков при стрельбе по мишеням.

Вероятность события

Вероятностью P (A) события A называется отношение числа элементарных событий, благоприятствующих событию A, к общему числу n равнозначных элементарных событий.

$$P(A) = m/n$$

Из определения вероятности вытекают следующие свойства:

1. $0 \leq P(A) \leq 1$
2. P (U) =1, где U - достоверность событий.
3. P (A +B) = P (A) + P(B), если независимы A и B.

Пример. В урне 3 белых и 9 черных шаров. Из урны наугад вынимается 1 шар. Какова вероятность того, что вынутый шар окажется черным?

$n = 12 \quad m = 9$

$P(A) = 9/12=3/4$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1Какие события называются равными?
2. Что называют суммой событий?
3. Что называют произведением событий?
4. Какие события называются противоположными?
5. Что называют вероятностью события?
6. Запишите формулу вероятности события.

Практические задания:

Задание на «3». Решить задачу. Из корзины, в которой находятся 9 красных, 8 желтых и 7 зеленых шаров, наудачу вынимается один. Найти вероятность того, что вынутый шар окажется: а) красным, б) желтым; в) черным; г) зеленым.
Задание на «4: Решить задачу. В корзине находятся 30 белых и 20 черных шаров. Наугад вынимают один шар, который оказался белым, и откладывают

его в сторону. Наугад вынимают еще один шар, который оказался черным, и откладывают его в сторону. После этого берут еще один шар. Найти вероятность того, что этот шар окажется белым.

Задание на «5»: Решить задачу. В колоде 36 карт. Наудачу вынимаются 2карты. Найти вероятность того, что это будут два туза.

Тренажер

Задание:

1. Найти сумму событий:
   1) Испытание – два выстрела по мишени; события: А – «попадание с первого выстрела», В – «попадание со второго выстрела»;
   2) Испытание – бросание игральной кости; события: А – «появление одного очка», В – «появление двух очков»; С – «появление трех очков»;
   3) Испытание – приобретение лотерейных билетов; события: А – «выигрыш 1000 рублей», В – «выигрыш 2000 рублей»; С – «выигрыш 3000 рублей».
2. Найти произведение событий:
   1) Испытание – два выстрела по мишени; события: А – «попадание с первого выстрела», В – «попадание со второго выстрела»;
   2) Испытание – бросание игральной кости; события: А – «непоявление трех очков», В – «непоявление пяти очков»; С – «непоявление нечетного числа очков»;
3. Назовите противоположные события для событий:
   1) А – «выпадение двух гербов при бросании двух монет»;
   2) В – «появление белого шара», если опыт состоит в извлечении одного шара из корзины, в которой имеются белые, черные и кранные шары;

4. Из корзины, в которой находятся 7 красных, 8 желтых и 5 зеленых шаров, наудачу вынимается один. Найти вероятность того, что вынутый шар окажется: а) красным, б) желтым; в) черным; г) зеленым.

5. Среди 50 деталей 5 нестандартных. Найти вероятность того, что наугад взятая деталь окажется: а) стандартной; б) нестандартной.

6.Брошена игральная кость. Найти вероятность следующих событий: А- «выпало 3 очка»; Б- «выпало нечетное число очков».

7.В ящике с деталями оказалось 300 деталей первого сорта, 200 деталей второго сорта и 50 деталей третьего сорта. Наугад вынимается одна из деталей. Чему равна вероятность вынуть деталь первого, второго или третьего сорта?

8. В корзине находятся 20 белых и 15 черных шаров. Наугад вынимают один шар, который оказался белым, и откладывают его в сторону. После этого берут еще один шар. Найти вероятность того, что этот шар тоже окажется белым.

9. В партии из 30 пар обуви имеется 10 пар мужской, 8 пар женской и 12 пар детской обуви. Найти вероятность того, что взятая наугад пара обуви окажется не детской.
10. Из 100 одинаковых деталей 3 бракованных. Найти вероятность того, что взятая наугад деталь без брака.
11. На экзамене 60 билетов. Андрей не выучил 3 из них. Найти вероятность того, что ему попадется выученный билет.
12. Какова вероятность того, что случайно выбранное натуральное число от 10 до 19 делится на 3.
13. На клавиатуре телефона 10 цифр от 0 до 9. Какова вероятность того, что случайно нажатая цифра будет четной.
14. В этапе конкурса «Учитель года» принимают участие 3 учителя начальных классов, 2 физика, 5 филологов, 1 математик и 4 историка. Порядок, в котором учителя проводят открытый урок, определяется жеребьевкой. Найти вероятность того, что первый урок проведет физик или математик.
15.В международном соревновании по фигурному катанию участвуют 25 спортсменов из разных стран, в том числе по 3 из США и России и по 2 из Японии и Швеции. Порядок выступления определяется жеребьевкой. Какова вероятность того, что спортсменка, выступающая первой, будут представлять какую- то другую из оставшихся стран участниц.
16. Перед началом первого тура чемпионата по шахматам участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жеребьевки. Всего в чемпионате участвуют 26 шахматистов, среди которых 5 спортсменов из России, в том числе Кирилл Черноусов. Найти вероятность того, что в первом туре Кирилл Черноусов будет играть с шахматистом из России.
17. В классе 7 мальчиков и 14 девочек. 1 сентября случайным образом определяют двух дежурных на 2 сентября. Найти вероятность того, что будут дежурить 2 мальчика.
18. Из 60 вопросов, входящих в экзаменационные билеты, студент подготовил 50. Какова вероятность того, что взятый наугад студентом билет, содержащий 2 вопроса, будет состоять из подготовленных им вопросов.
19. В ящике имеется 15 деталей, среди которых 8 окрашенных. Сборщик наудачу извлекает 3 детали. Найти вероятность того, что извлеченные детали окажутся окрашенными.
20. Среди 17 студентов группы, из которых 8 девушек, разыгрывается 7 билетов в театр. Какова вероятность того, что среди обладателей билетов окажутся 4 девушки и 3 юноши.

14.3.Теоремы сложения и умножения вероятностей. Формула Бернулли

В результате изучения темы студент должен:

уметь:
- решать задачи с использованием теорем сложения и умножения вероятностей.

знать:
- теоремы сложения вероятностей;
- теоремы умножения вероятностей;
- формулу Бернулли.

Теоремы сложения вероятностей

Теорема 1. Вероятность суммы двух несовместимых событий A и B равна сумме вероятностей этих событий.

$$P(A + B) = P(A) + P(B)$$

Теорема 2. Вероятность суммы конечного числа попарно несовместимых событий

$A_1, A_2, .. A_n$ равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$$

Теорема 3. Если события A и B совместимы, то вероятность их суммы выражается формулой

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB), \text{ т.е}$$

Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их произведения (совместного осуществления).

Пример: найти вероятность того, что при бросании двух игральных костей хотя бы один раз выпадет 6 очков.

Обозначим события:

A – «выпадение 6 очков при бросании 1 игральной кости»

B – «выпадение 6 очков при бросании 2 игральной кости»

Так как события A и B совместны, то

$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$,

$P(A) = 1/6 \quad P(B) = 1/6 \quad P(AB) = 1/36$

$P(A + B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36}$

Следствие 1. Если события A_1, A_2, .. A_n образуют полную систему событий попарно несовместимых, то сумма их вероятностей равна 1.

$$P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1$$

Следствие 2. Сумма вероятностей противоположных событий равна 1.

$$P(A) + P(A) = 1$$

Теоремы умножения вероятностей

Теорема 1. Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из этих событий на условную вероятность другого при условии, что первое произошло

$$P(AB) = P(A) * P(B/A) = P(B) * P(A/B)$$

Теорема 2. Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий

$$P(AB) = P(A) * P(B)$$

Пример: В одной корзине находятся 4 белых и 8 черных шаров, в другой 3 белых и 9 черных. Из каждой корзины вынули по 1 шару. Найти вероятность того, что оба шара окажутся белыми.

A – «появление белого шара из 1 корзины»

B – «появление белого шара из 2 корзины»

Так как события A и B независимы, то

$P(A) = 4/12 = 1/3$ $P(B) = 3/12 = 1/4$

$P(AB) = P(A) * P(B) = \frac{1}{3} * \frac{1}{4} = \frac{1}{12} = 0{,}8$

Формула Бернулли: $P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Сформулируйте теоремы сложения вероятностей.
2. Сформулируйте следствия из теорем сложения вероятностей.
3. Сформулируйте теоремы умножения вероятностей.

Практические задания:

Задание на «3». Решить задачу. В учебных мастерских техникума изготовляются детали на трех станках. Вероятность изготовления детали на первом станке равна 0,6. Вероятность появления годной детали на первом станке равна 0,8. Найти вероятность того, что годная деталь изготовлена на первом станке.
Задание на «4: Решить задачу. В корзине 4 белых и 3 черных шаров. Из корзины последовательно вынимают 2 шара. Найти вероятность того, что второй шар окажется черным при условии, что первый шар был черным.
Задание на «5»: Решить задачу.
Решить задачу. В ящике находятся 7 деталей первого сорта, 5 второго сорта и 3 третьего сорта. Из ящика последовательно вынимают три детали. Найти вероятность того, первая наугад вынутая деталь окажется первого сорта (событие A_1), вторая – второго сорта (событие A_2) и третья деталь – третьего сорта (событие A_3).

Тренажер

Задание: Решить задачи.

1.В читальном зале имеются 6 учебников, из которых 3 в переплете. Библиотекарь наудачу взяла 2 учебника. Найти вероятность того, что оба учебника окажутся в переплете.
2. Два стрелка стреляют по одной и той же цели. Вероятность попадания в цель для первого стрелка равна 0,9, для второго - 0,8. Найти вероятность того, что оба стрелка попадут в цель.
3. Среди 50 электрических лампочек 3 нестандартные. Найти вероятность того, что 2 взятые одновременно лампочки нестандартные.
4. В цехе работают 7 мужчин и 3 женщины. Наудачу отобраны 3 человека. Найти вероятность того, что все отобранные лица окажутся мужчинами.
5. Вероятность того, что в магазине будет продана пара мужской обуви 44 размера, равна 0,12; 45-го -0,04; 46-го и больше – 0,01. Найти вероятность того, что будет продана пара мужской обуви не менее 44 – го размера.
6. Три ящика содержат по 10 деталей. В первом 8 стандартных деталей, во втором -7, в третьем – 9. Из каждого ящика наудачу вынимают по одной детали. Найти вероятность того, что все 3 вынутые детали окажутся стандартными.
7. В двух ящиках содержатся синие и красные шары: в первом ящике 6 синих и 7 красных, во втором – 4 синих и 5 красных. Из каждого ящика извлекают по одному шару. Найти вероятность того, что хотя бы один из вынутых шаров будет красным.
8. Цель в тире разделена на три зоны. Вероятность того, что некий стрелок выстрелит в цель в первой зоне равна 0,15, во второй зоне- 0,23, в третьей – 0,17. Найти вероятность того, что стрелок попадет в цель и вероятность того, что стрелок попадет мимо цели.

9. Два стрелка независимо друг от друга стреляют по одно и той же цели. Вероятность попадания для первого стрелка 0,9, для второго – 0,8. Найти вероятность того, что хотя бы один стрелок попадет в цель.
10.Учебные мастерские техникума получают изделия от заводов А, В и С. Вероятность поступления изделий от завода А равна 0,35, от завода В- 0,4. Найти вероятность поступления изделий от завода С.

14.4. Дискретная случайная величин, закон ее распределения

В результате изучения темы студент должен:
знать:
- понятие случайной величины;
- понятие дискретной случайной величины;
- закон распределения дискретной случайной величины.

Дискретная случайная величин, закон ее распределения

Случайное событие, связанное с некоторым опытом, является качественной характеристикой опыта. Количественной же характеристикой результата проведенного опыта является случайная величина.

Пример1. Бросаются две правильные однородные монеты. Сколько из них выпадет гербом кверху?

Решение:

При подбрасывании двух монет пространство элементарных событий имеет вид: *U*= *ЦЦ, ЦГ, ГЦ, ГГ*, где *Ц*- «цифра», *Г*- «герб». Первый символ показывает, что выпала первая монета, а второй – вторая монета. Например, *ЦГ* означает, что первая монета выпала цифрой кверху, а вторая - гербом. Так как монеты правильные и однородные, то можно считать, что все элементарные события пространства *U* равновероятны, и тогда вероятность р каждого из них равна ¼. Обозначим через *X* число монет, выпавших гербом кверху, и составим таблицу:

U	ЦЦ	ЦГ	ГЦ	ГГ
X	0	1	1	2
p	1/4	1/4	1/4	1/4

Так как элементарным событиям *ЦГ* и *ГЦ* ответствует одно и тоже значение величины *X*, равное 1, то можно полагать, что это значение величина *X* принимает с вероятностью р= ¼ +1/4= ½ .Таким образом, значения величины

X – число монет, выпавших гербом кверху, соответствующие им вероятности можно записать в виде таблицы:

X	0	1	2
p	1/4	1/2	1/4

Итак, каждое значение величины X есть число, определяемое исходом опыта и зависящее от случая.

Случайной называется величина, которая в результате опыта принимает с определенной вероятностью то или иное значение, зависящее от исхода опыта. Случайные величины обозначаются прописными буквами латинского алфавита: X, Y, Z и т.д., а их значения – соответствующими строчными буквами – x, y, z и т.д.

Случайная величина называется *дискретной*, если множество ее значений конечно или счетно, т. е. множество е значение представляет собой конечную последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n$ или бесконечную последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ Вероятность того, что случайная величина X примет значение x, обозначают

$$P(x) = P(X=x)$$

Соответствие между возможными значениями $x_1, x_2, \ldots, x_n$ случайной величины X и их вероятностями $p_1, p_2 \ldots, p_n$ называется законом распределения случайной величины X.

Закон распределения случайной величины может быть представлен в виде таблицы:

X	X_1	X_2	…	X_i	…	X_n
P	P_1	P_2	…	P_i	…	P_n

События $X=x_1$, $X=x_2, \ldots$, $X=x_n$ образуют полную систему попарно несовместимых событий, поэтму сумма их вероятностей равна 1, т.е. $p_1+p_2+\ldots p_n=1$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Что такое случайная величина?
2. Что такое дискретная случайная величина?

3. Сформулируйте закон распределения дискретной случайной величины.

14.5. Числовые характеристики дискретной случайной величины

В результате изучения темы студент должен:
уметь:
- находить математическое ожидание случайной величины.
знать:
- понятие математического ожидания;
- свойства математического ожидания.

Числовые характеристики дискретной случайной величины.

В математике часто используют числа, которые описывают случайную величину суммарно. Такие числа называют числовыми характеристиками случайной величины. Среди числовых характеристик самой важной является математическое ожидание, которое указывает, какое среднее значение случайной величины следует ожидать в результате испытаний или наблюдений.

Математическим ожиданием M(X) дискретной случайной величины X называется сумма произведений всех ее возможных значений x_j на их вероятность p_j:

$$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_n p_n = \sum_{j=1}^{n} x_j p_j$$

Пример. Найти математическое ожидание случайной величины x, зная закон ее распределения:

x	-1	0	1	2	2
p	0,2	0,1	0,25	0,15	0,3

M(X) = -1*0,2+0*0,1+1*0,25+2*0,15+3*0,3=1,25

Свойства математического ожидания:

1. Постоянный множитель может быть вынесен за знак математического ожидания.

$$M(CX) = CM(X)$$

2.Математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме их математических ожиданий:

$$M(X + У) = M(X) + M(У)$$

3.Математическое ожидание постоянной величины С равно самой этой величине:

$$M(C) = C$$

4.Математическое ожидание произведения независимых случайных событий равно произведению их математических ожиданий:

$$M(X * У) = M(X) * M(У)$$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Что такое математическое ожидание?
2. Сформулируйте свойства матеатического ожидания.

Тренажер

Задание: Найти математическое ожидание случайной величины X, если закон ее распределения задан таблицей:

X	**1**	**2**	**3**	**4**
p	**0,3**	**0,1**	**0,2**	**0,4**

X	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
p	**0,2**	**0,4**	**0,3**	**0,08**	**0,02**

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Для студентов

Башмаков М.И. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия*:* учебник для студентов профессиональных образовательных организаций, осваивающих профессии и специальности СПО. – М., 2017

Башмаков М.И Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия: Сборник задач профильной направленности: учеб. Пособие для студентов профессиональных образовательных организаций, осваивающих профессии и специальности СПО. – М., 2017

Башмаков М.И. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия*:*Задачник: учеб. пособие для студентов профессиональных образовательных организаций, осваивающих профессии и специальности СПО.- М., 41

Башмаков М.И. Математика:алгебра и начала анализа, геометрия: Электронный учеб.- метод. Комплекс для студентов профессональных образовательных организаций. осваивающих профессии и специальности СПО.-М.,2017

Башмаков М.И. Математика (базовый уровень). 10 класс. — М., 2014. *Башмаков М.И*. Математика (базовый уровень). 11 класс. — М., 2014. *Башмаков М.И*. Алгебра и начала анализа, геометрия. 10 класс. — М., 2013.

Башмаков М.И. Математика (базовый уровень). 10 класс. Сборник задач: учеб. пособие. — М., 2008.

Башмаков М.И. Математика (базовый уровень). 11 класс. Сборник задач: учеб. пособие. — М., 2012.

Гусев В.А., *Григорьев С.Г., Иволгина С.В*. Математика: алгебра и начала анализа математического анализа, геометрия: учебник для студентов профессиональных образовательных организаций, осваивающих профессии и специальности СПО.-2017.

Колягин Ю.М., Ткачева М.В, Федерова Н.Е. и др. Математика: алгебра и начала мате-

матического анализа. Алгебра и начала математического анализа (базовый и углубленный уровни). 10 класс / под ред. А.Б.Жижченко. — М., 2014.

Колягин Ю.М., Ткачева М.В., *Федерова Н.Е. и др*. Математика: алгебра и начала математического анализа. Алгебра и начала математического анализа (базовый и углубленный уровни). 11 класс / под ред. А.Б.Жижченко. — М., 2014.

Мордкович А.Г., Смирнова И.М. Математика: алгебра и начала математического анализа; геометрия. (базовый уровень). М., Мнемозина, 2015 г.

Для преподавателей

Об образовании в Российской Федерации: федер. Закон от 29.12.2012 № 273-ФЗ (в ред. Федеральных законов от 07.05.2013№ 99-ФЗ, от 07.06.2013 № 120-ФЗ, от 02.07.2013 № 170-ФЗ, от23.07.2013 № 203-ФЗ, от 25.11.2013 № 317 ФЗ, от 03.02.2014 № 11-ФЗ, от 03.02.2014 № 15-ФЗ, от 05.05.2014 № 84-ФЗ, от 27.05.2014 № 135-ФЗ, от 04.06.2014 №148-ФЗ, с изм., внесенными Федеральным законом от 04.06.2014 № 145-ФЗ, в ред. От 03.07.2016, с изм. От 19.12.2016)

Федеральный закон от 29.12.2012 № 273-ФЗ «Об образовании в Российской Федерации». Приказ Министерства образования и науки РФ от 17.05.2012 № 413 «Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта среднего (полного) общего образования».

Приказ Министерства образования и науки РФ от 31 декабря 2015 г. № 1578 «Овнесении изменений в федеральный государственный стандарт среднего общего образования, утвержденный приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 17 мая 2012 г. № 413»

Письмо Департамента государственной политики в сфере подготовки рабочих кадров и ДПО Министерства образования и науки РФ от 17.03.2015 № 06-259 «Рекомендации по организации получения среднего общего образования в пределах освоения образовательных программ среднего профессионального образования на базе основного общего образования с учетом требований федеральных государственных образовательных стандартов и получаемой профессии или специальности среднего профессионального образования».

Примерная основная образовательная программа среднего бщего образования, одобренная решением федерального учебно- методического объединения по общему образованию (протокол от 28 июня 2016 г. № 2/16-3)

Башмаков М.И. Математика: кн. для преподавателя: метод. пособие. — М., 2013

Башмаков М.И., Цыганов Ш.И. Методическое пособие для подготовки к ЕГЭ. — М., 2014.

Богомолов Н.В. Сборник задач по математике (для ССУЗов) м., Дрофа,2003 г.

Интернет-ресурсы

www.fcior.edu.ru (Информационные, тренировочные и контрольные материалы)

www.school-collection.edu.ru (Единая коллекции цифровых образовательных ресурсов).

http://www.mathnet.spb.ru/

http://www.exponenta.ru/educat/class/class.asp

http://www.bymath.net/studyguide/tri/tri_topics.html

http://www.mathem.h1.ru/index.html

http://www.mathnet.spb.ru/

http://www.exponenta.ru/educat/class/class.asp

http://www.bymath.net/studyguide/tri/tri_topics.html

http://www.mathem.h1.ru/index.html

http://festival.1september.ru/