МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФГБОУ ВО «Брянский государственный технический университет»(БГТУ)

Политехнический колледж (ПК БГТУ)

УТВЕРЖДАЮ
Ректор ФГБОУ ВО БГТУ

_____________ О.Н.Федонин

«30» августа 2020 г.

Методические рекомендации для проведения практических работ

по учебной дисциплине

ЕН.01 Математика

Специальность:	**15.02.07 Автоматизация технологических процессов и производств (по отраслям)**
Уровень образования выпускника:	среднее профессиональное образование (СПО)
Программа подготовки специалиста среднего звена (ППССЗ):	Базовая
Присваиваемая квалификация:	Техник
Форма обучения:	Очная
Срок получения СПО по ППССЗ:	3 года 10 месяцев
Уровень образования, необходимый для приема на обучение по ППССЗ:	основное общее образование
Год приема на обучение на 1-й курс:	2020

Брянск 2020

Методические рекомендации для проведения практических работ по учебной дисциплине ЕН.01 Математика для специальности 15.02.07 Автоматизация технологических процессов и производств (по отраслям), предназначены для закрепления знаний по изучаемому материалу и формированию умений, а также для проверки усвоения теоретического материала и умений решать различные математические задачи.

Разработали:

Преподаватель ПК БГТУ И.П. Парфёнова

Методическая разработка рассмотрена одобрена предметной комиссией «Математических и общих естественно научных дисциплин»

Протокол № 1 от «30» августа 2020 г.

Председатель Л.А Лазарева

Область применения методических указаний

Методические указания для выполнения практических работ являются частью примерной основной профессиональной образовательной программы в соответствии с ФГОС по специальности СПО **15.02.14 «Оснащение средствами автоматизации технологических процессов и производств (по отраслям)».**

1.2. Цель и планируемые результаты освоения дисциплины:

Код **ПК, ОК**	**Умения**	**Знания**
ОК 1 ОК 2	Выполнять операции над матрицами и решать системы линейных уравнений Решать задачи, используя уравнения прямых и кривых второго порядка на плоскости Применять методы дифференциального и интегрального исчисления Решать дифференциальные уравнения Пользоваться понятиями теории комплексных чисел	Основы математического анализа, линейной алгебры и аналитической геометрии Основы дифференциального и интегрального исчисления Основы теории комплексных чисел

1.3. Рекомендуемое количество часов на освоение рабочей программы учебной дисциплины:

максимальной учебной нагрузки обучающегося 70 часов, в том числе:

обязательной аудиторной учебной нагрузки обучающегося 64 часа;

практические работы 30 часов

самостоятельной работы обучающегося 4 часа.

ПЕРЕЧЕНЬ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

1	Действия с комплексными числами в алгебраической форме
2	Действия с комплексными числами в тригонометрической форме
3	Элементы векторной алгебры Вычисление пределов
4	Исследование функции на непрерывность. Классификация точек разрыва
5	Нахождение производных сложных функций
6	Уравнение касательной и нормали
7	Полное исследование функции. Построениеграфика
8	Вычисление первообразной и определенных интегралов. Физическое и геометрическое приложение интегралов
9	Дифференцирование функций двух переменных. Исследование функции двух переменных на экстремум
10	Вычисление двойных интегралов. Практическоеприменение двойных интегралов.
11	Исследование рядов на сходимость
12	Решение дифференциальных уравнений
13	Действия с матрицами
14	Вычисление определителей матриц
15	Нахождение обратной матрицы. Решение простейших матричных уравнений
16	Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера и с помощью обратной матрицы

17	Решение систем линейных уравнений методом Гаусса
18	Элементы векторной алгебры
19	Составление уравнения прямой на плоскости. Угол между прямыми
20	Составление уравнений кривых второго порядка (окружности, эллипса, гиперболы, параболы)

Практическая работа № 1 по теме

«Действия скомплексными числами в алгебраической форме»

Цель: научить выполнять действия с комплексными числами в алгебраической форме

Время выполнения 90 минут

Материальное обеспечение

1.Теоретические сведения

2.Задание

3.Лист А 4

4.Калькуляторы

Порядок выполнения работы

1.Изучить задание

2. Изучить теоретические сведения

3. Выполнить и оформить работу

4.Показать результаты преподавателю

Домашнее задание

1.Подготовить ответы на контрольные вопросы

Теоретические сведения

Определение.Комплексным числом *z*называется выражение $z = a + ib$, где *a*и *b* – действительные числа, *i* – мнимая единица, которая определяется соотношением: $i^2 = -1;\quad i = \sqrt{-1}.$

При этом число *a* называется **действительной частью** числа *z* (*a* = *Rez*), а *b*- **мнимой частью** (*b* = *Imz*).

Если *a =Rez =0,* то число *z* будет чисто мнимым, если *b* = *Imz* = *0*, то число *z* будет действительным.

Определение. Числа $z = a + ib$ и $\bar{z} = a - ib$ называются **комплексно – сопряженными.**

Определение. Два комплексных числа $z_1 = a_1 + ib_1$ и $z_2 = a_2 + ib_2$ называются равными, если соответственно равны их действительные и мнимые части:

$$a_1 = a_2;\qquad b_1 = b_2;$$

Определение. Комплексное число равно нулю, если соответственно равны нулю действительная и мнимая части.

$$a = b = 0.$$

Действия над комплексными числами в алгебраической форме.

Основные действия с комплексными числами вытекают из действий с многочленами.

Сложение и вычитание

Рассмотрим два комплексных числа, заданных в общем виде $z_1 = a_1 + ib_1$;

$z_2 = a_2 + ib_2$, тогда $z = z_1 \pm z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = (a_1 \pm a_2) + i(b_1 \pm b_2) = a \pm ib$

Можно сформулировать правило сложения и вычитания комплексных чисел: при сложении (вычитании) комплексных чисел соответственно складываются (вычитаются) их действительные и мнимые части.

Умножение

$z = z_1 z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1 a_2 + i a_1 b_2 + i b_1 a_2 + i^2 b_1 b_2 = a + ib$

$z = z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i\,(a_1 b_2 + b_1 a_2)$

(т.е. можно говорить, что перемножаются комплексные числа как многочлены, учитывая, что $i^2 = -1$). Значит, чтобы перемножить два комплексных числа необходимо перемножить их как многочлены, учитывая, что $i^2 = -1$.

Деление

При выполнении деления комплексных чисел пользуются искусственным приёмом: числитель и знаменатель дроби умножают на число, комплексно - сопряженное знаменателю дроби, и поступают далее так, как и при умножении комплексных чисел.

Пример.

$z_1 = 5 - i$;

$z_2 = -2 + 3i$;

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{5-i}{-2+3i} = \frac{(5-i)*(-2-3i)}{(-2+3i)*(-2-3i)} = \frac{-10+2i-15i+3i^2}{4-9i^2} = \frac{-13-13i}{13} = -1-i$$

Задания практической работы

1.Даны комплексные числа вычислить у $z = z_1 + z_2$; $z_1 - z_2$; $z_1 \cdot z_2$; $\frac{z_1}{z_2}$

1. $z_1 = 5 - i$; $z_2 = 1 + 3i$

16. $z_1 = 5 + i$; $z_2 = 1 - 2i$

2. $z_1 = 3 - 4i;\quad z_2 = 1 + i$

3. $z_1 = 1 - 5i;\quad z_2 = 1 + 4i$

4. $z_1 = 1 + 3i;\quad z_2 = 7 - i$

5. $z_1 = 1 - i;\quad z_2 = 7 + 3i$

6. $z_1 = 1 - i;\quad z_2 = 5 - 4i$

7. $z_1 = 3 + 4i;\quad z_2 = -2 + i$

8. $z_1 = -i;\quad z_2 = 7 + 4i$

9. $z_1 = 6 - 5i;\quad z_2 = 1 + i$

10. $z_1 = -1 + 5i;\quad z_2 = 2 - 5i$

11. $z_1 = 5 - 7i;\quad z_2 = 1 - 3i$

12. $z_1 = -3 - 2i;\quad z_2 = -1 + 7i$

13. $z_1 = 5 + 2i;\quad z_2 = 2 - i$

14. $z_1 = 1 + 5i;\quad z_2 = 2 - 3i$

15. $z_1 = 1 - 4i;\quad z_2 = 1 + 2i$

17. $z_1 = 3 + i;\quad z_2 = 5 - 2i$

18. $z_1 = 1 - 5i;\quad z_2 = 1 + 3i$

19. $z_1 = 5 - i;\quad z_2 = 1 + 3i$

20. $z_1 = 1 + 3i;\quad z_2 = -2 + 5i$

21. $z_1 = 3 + 4i;\quad z_2 = -2 + i$

22. $z_1 = 5 - 2i;\quad z_2 = -2 + i$

23. $z_1 = 7 - 2i;\quad z_2 = 5 + 3i$

24. $z_1 = 7 - 3i;\quad z_2 = -1 + 4i$

25. $z_1 = -2 + 3i;\quad z_2 = 5 - 4i$

26. $z_1 = -3 + 2i;\quad z_2 = 6 + 5i$

27. $z_1 = -1 + 7i;\quad z_2 = 4 - 5i$

28. $z_1 = 4 + 5i;\quad z_2 = 1 - 2i$

29. $z_1 = -1 + 3i;\quad z_2 = 6 - 5i$

30. $z_1 = -3 - 2i;\quad z_2 = 4 + 3i$

2. Выполнить действия над комплексными числами в алгебраической форме

1)11)21) $\dfrac{1+i}{1-2i} - \left(\dfrac{4}{5} - \dfrac{2}{5}i\right);$

2)12)22) $\dfrac{2(1-i\sqrt{3})}{1+i\sqrt{3}};$

3)13)23) $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{20} + i^{17};$

4)14)24) $\dfrac{(1-2i)(1+2i)}{2+i} - i^{12};$

5)15)25) $\dfrac{2(1+i\sqrt{3})}{1-i} - (1+i\sqrt{3});$

6)16)26) $\dfrac{(-2+i)^2}{1+3i} - (0{,}1 - 0{,}3i);$

7)17)27) $\dfrac{2(1-i\sqrt{3})}{i(\sqrt{3}-i)}$;

8)18)28) $\dfrac{(1-3i)(1+3i)}{-3-i}-2i^{19}$;

9) 19)29) $\dfrac{(1+i\sqrt{3})^2}{2i^5}$;

10)20)30) $\dfrac{(4-i)^2}{i^8}-8(2-i^{13})$;

Контрольные вопросы

1. Что такое комплексное число: действительная часть числа, мнимая часть числа?
2. Что такое мнимая единица?
3. Какие числа называются сопряженными?
4. Как представить комплексное число графически?
5. Что такое модуль числа?
6. Что такое аргумент числа?
7. Сколько может быть модулей и аргументов у комплексного числа?
8. Как найти аргумент числа?

Как найти сумму, разность, произведение, частное комплексных чисел

Практическая работа № 2 по теме «Действия над комплексными числами в тригонометрической форме»

Цель: научить выполнять действия с комплексными числами в тригонометрической форме

Время выполнения 90 минут

Материальное обеспечение
1.Теоретические сведения
2.Задание
3.Лист А 4
4.Калькуляторы

Порядок выполнения работы
1.Изучить задание
2. Изучить теоретические сведения
3. Выполнить и оформить работу
4.Показать результаты преподавателю

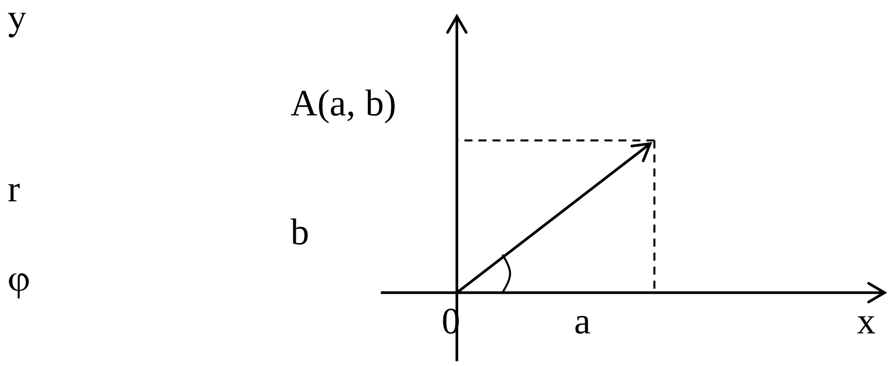
Домашнее задание
1.Подготовить ответы на контрольные вопросы

Теоретические сведения

Геометрическое изображение комплексных чисел.

Понятие комплексного числа имеет геометрическое истолкование. Множество комплексных чисел является расширением множества действительных чисел за счет включения множества мнимых чисел. Комплексные числа включают в себя все множества чисел, которые изучались ранее. Так натуральные, целые, рациональные, иррациональные, действительные числа являются, вообще говоря, частными случаями комплексных чисел.

Если любое действительное число может быть геометрически представлено в виде точки на числовой прямой, то комплексное число представляется точкой на плоскости, координатами которой будут соответственно действительная и мнимая части комплексного числа. При этом горизонтальная ось будет являться действительной числовой осью, а вертикальная - мнимой осью.



Таким образом, на оси OX располагаются действительные числа, а на оси OY – чисто мнимые.

С помощью подобного геометрического представления можно представлять числа в так называемой тригонометрической форме.

Тригонометрическая форма числа.

Из геометрических соображений видно, что $a = r\cos\varphi;\quad b = r\sin\varphi$. Тогда комплексное число можно представить в виде:

$$z = a + ib = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Такая форма записи называется **тригонометрической формой записи комплексного числа.**

При этом величина r называется **модулем** комплексного числа, а угол наклона φ - **аргументом** комплексного числа.

$r = |z|; \qquad \varphi = Arg\, z$.

Из геометрических соображений видно:

$$r = |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}; \quad \varphi = Arg\, z = arctg\frac{b}{a};$$

Очевидно, что комплексно – сопряженные числа имеют одинаковые модули и противоположные аргументы.

$|z| = |\bar{z}|; \qquad Arg\, z = -Arg\, \bar{z}.$

Действия с комплексными числами в тригонометрической форме.

$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$.

Умножение $z = z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$

В случае комплексно – сопряженных чисел:

$$z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 = |z|^2 = |\bar{z}|^2.$$

Деление $z = \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$

Возведение в степень

Из операции умножения комплексных чисел следует, что

$$z^2 = zz = r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)$$

В общем случае получим:

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),$$

где n – целое положительное число.

Это выражение называется **формулой Муавра.** (Абрахам де Муавр (1667 – 1754) – английский математик).

Извлечение корня из комплексного числа

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$$

Возводя в степень, получим:

$$\rho^n(\cos n\psi + i\sin n\psi) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Отсюда: $\rho = \sqrt[n]{r}$; $n\psi = \varphi + 2\pi k$; $k \in Z$.

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)$$

Таким образом, корень n –ой степени из комплексного числа имеет n различных значений.**Задания для практической работы**

Задание. Выполнить действия с данными комплексными :
1) Z1+Z2; Z1-Z2; Z1·Z2, Z1:Z2

1. $z_1 = 8(\cos 55^0 + \sin 55^0)$, $z_2 = 2(\cos 5^0 + \sin 5^0)$,
2. $z_1 = 5(\cos 48^0 + \sin 48^0)$, $z_2 = 2(\cos 12^0 + \sin 12^0)$,
3. $z_1 = 3(\cos 70^0 + \sin 70^0)$, $z_2 = 2(\cos 20^0 + \sin 20^0)$,
4. $z_1 = 10(\cos 105^0 + \sin 105^0)$, $z_2 = 2(\cos 15^0 + \sin 15^0)$,
5. $z_1 = 12(\cos 145^0 + \sin 145^0)$, $z_2 = 2(\cos 5^0 + \sin 5^0)$,
6. $z_1 = 7(\cos 255^0 + \sin 255^0)$, $z_2 = 2(\cos 15^0 + \sin 15^0)$,
7. $z_1 = 9(\cos 168^0 + \sin 168^0)$, $z_2 = 2(\cos 12^0 + \sin 12^0)$,
8. $z_1 = 6(\cos 40^0 + \sin 40^0)$, $z_2 = 2(\cos 20^0 + \sin 20^0)$,
9. $z_1 = 3(\cos 40^0 + \sin 40^0)$, $z_2 = 2(\cos 5^0 + \sin 5^0)$,
10. $z_1 = 10(\cos 75^0 + \sin 75^0)$, $z_2 = 2(\cos 15^0 + \sin 15^0)$,

11. $z_1 = 9(\cos 123^0 + \sin 123^0)$, $z_2 = 2(\cos 12^0 + \sin 12^0)$,
12. $z_1 = 5(\cos 160^0 + \sin 160^0)$, $z_2 = 2(\cos 20^0 + \sin 20^0)$,
13. $z_1 = 3(\cos 235^0 + \sin 235^0)$, $z_2 = 2(\cos 5^0 + \sin 5^0)$,
14. $z_1 = 4(\cos 30^0 + \sin 30^0)$, $z_2 = 2(\cos 15^0 + \sin 15^0)$,
15. $z_1 = 2(\cos 258^0 + \sin 258^0)$, $z_2 = 2(\cos 12^0 + \sin 12^0)$,
16. $z_1 = 7(\cos 115^0 + \sin 115^0)$, $z_2 = 2(\cos 20^0 + \sin 20^0)$,
17. $z_1 = 14(\cos 310^0 + \sin 310^0)$, $z_2 = 2(\cos 5^0 + \sin 5^0)$,
18. $z_1 = 8(\cos 45^0 + \sin 45^0)$, $z_2 = 2(\cos 15^0 + \sin 15^0)$,
19. $z_1 = 6(\cos 213^0 + \sin 213^0)$, $z_2 = 2(\cos 12^0 + \sin 12^0)$,
20. $z_1 = 9(\cos 70^0 + \sin 70^0)$, $z_2 = 2(\cos 20^0 + \sin 20^0)$,
21. $z_1 = 4(\cos 40^0 + \sin 40^0)$, $z_2 = 2(\cos 5^0 + \sin 5^0)$,
22. $z_1 = 6(\cos 300^0 + \sin 300^0)$, $z_2 = 2(\cos 15^0 + \sin 15^0)$,
23. $z_1 = 3(\cos 33^0 + \sin 33^0)$, $z_2 = 2(\cos 12^0 + \sin 12^0)$,
24. $z_1 = 5(\cos 250^0 + \sin 250^0)$, $z_2 = 2(\cos 20^0 + \sin 20^0)$,
25. $z_1 = 8(\cos 85^0 + \sin 85^0)$, $z_2 = 2(\cos 5^0 + \sin 5^0)$,
26. $z_1 = 10(\cos 165^0 + \sin 165^0)$, $z_2 = 2(\cos 15^0 + \sin 15^0)$,
27. $z_1 = 9(\cos 48^0 + \sin 48^0)$, $z_2 = 2(\cos 12^0 + \sin 12^0)$,
28. $z_1 = 5(\cos 100^0 + \sin 100^0)$, $z_2 = 2(\cos 20^0 + \sin 20^0)$,
29. $z_1 = 4(\cos 175^0 + \sin 175^0)$, $z_2 = 2(\cos 5^0 + \sin 5^0)$,
30. $z_1 = 16(\cos 120^0 + \sin 120^0)$, $z_2 = 2(\cos 15^0 + \sin 15^0)$,

2.Выполнить действия над комплексными числами в тригонометрической форме.

1,11,21. $\frac{i-1}{1+i}$

6,16,26. $\sqrt[3]{-1+i}$

2,12,22. $\left(\frac{1-i}{-2-2i}\right)^{-6}$

7,17,27. $\left(\left(\sqrt{3}-i\right)\left(-1+i\right)\right)^4$

3,13.23. $\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-i}\right)^6$

8,18,28. $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{12}$

4,14,24. $\left(\frac{0{,}5-0{,}5\sqrt{3}i}{0{,}5\sqrt{3}-0{,}5i}\right)^4$

9,19,29. $\left(\frac{2\sqrt{3}-2i}{\sqrt{3}+i}\right)^3$

5,15,25. $\left(2+\sqrt{12}i\right)^5$

10,20,30. $\left(-3-\sqrt{3}i\right)^3$

3.Выполнить действия над комплексными числами в тригонометрической форме:

1) $\sqrt[3]{z_1}$; 2) z_2^5;

1. $z_1 = 1+i,\ z_2 = -\sqrt{3}+i;$

6. $z_1 = 1-\sqrt{3}i,\ z_2 = 2+2i;$

2. $z_1 = 1-i,\ z_2 = -\sqrt{3}-i;$

7. $z_1 = -1+\sqrt{3}i,\ z_2 = -2-2i;$

3. $z_1 = -1+i,\ z_2 = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i;$

8 . $z_1 = -1-\sqrt{3}i,\ z_2 = -2+2i;$

4. $z_1 = -1-i,\ z_2 = \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i;$

9. $z_1 = \sqrt{3}+i,\ z_2 = -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i;$

5. $z_1 = 1+\sqrt{3}i,\ z_2 = 2-2i;$

10. $z_1 = \sqrt{3}-i,\ z_2 = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i;$

Контрольные вопросы

1. Что такое тригонометрическая форма записи комплексного числа?
2. Как перевести число в тригонометрическую форму?
3. Как найти произведение, частное чисел в тригонометрической форме?
4. Как найти возвести число в тригонометрической форме в целую степень?
5. Как найти корень n-ной степени из числа в тригонометрической форме?

Практическая работа № 3

Тема « Вычисление пределов»

Цель: научиться вычислять пределы, раскрывать неопределенности.

Время выполнения 90 минут

Материальное обеспечение

1.Теоретические сведения

2.Задание

3.Лист А 4

4.Калькуляторы

Порядок выполнения работы

1.Изучить задание

2. Изучить теоретические сведения

3. Выполнить и оформить работу

4.Показать результаты преподавателю

Домашнее задание

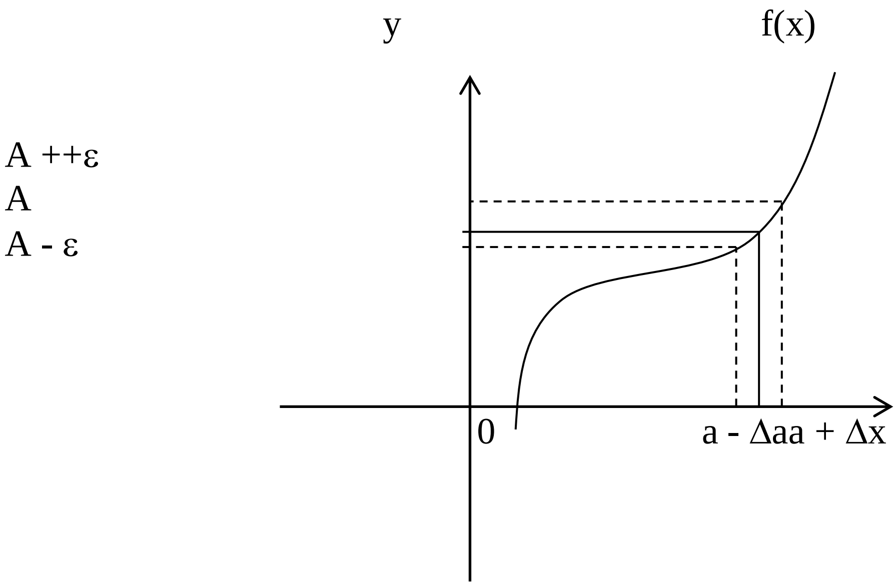
1.Подготовить ответы на контрольные вопросы

Ход работы

Теоретические положения

Переменная и предел – это основные понятия математического анализа. Достаточно напомнить, что ключевым словом в определениях таких известных со школы понятий как производная и интеграл является слово предел.

Предел функции в точке.



Пусть функция f(x) определена в некоторой окрестности точки x = a (т.е. в самой точке x = a функция может быть и не определена)

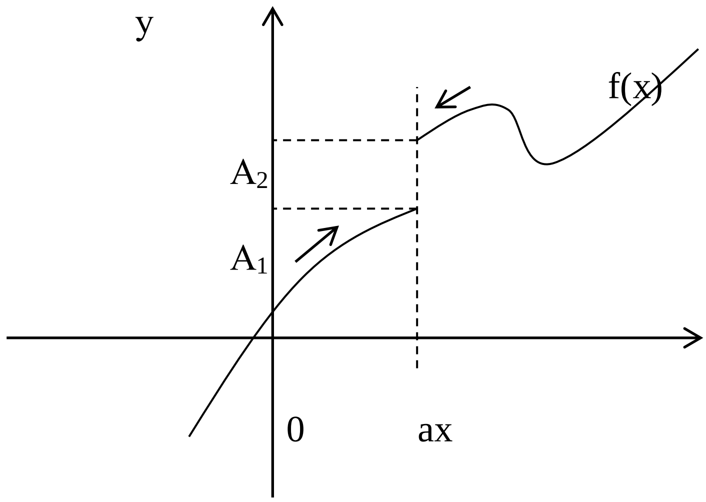
Определение. Число А называется **пределом** функции f(x) при $x \to a$, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое число $\Delta>0$, что для всех х таких, что $0 < |x - a| < \Delta$ верно неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

То же определение может быть записано в другом виде:

Если $a - \Delta < x < a + \Delta$, $x \neq a$, то верно неравенство $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$.

Запись предела функции в точке: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$

Определение. Если $f(x) \to A_1$ при $x \to a$ только при $x<a$, то $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = A_1$ - называется **пределом** функции f(x) в точке x = a **слева**, а если $f(x) \to A_2$ при $x \to a$ только при $x>a$, то $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = A_2$ называется **пределом** функции f(x) в точке x = a **справа**.



Приведенное выше определение относится к случаю, когда функция f(x) не определена в самой точке x = a, но определена в некоторой сколь угодно малой окрестности этой точки.

Пределы A_1 и A_2 называются также **односторонними пределами** функции f(x) в точке x = a. Также говорят, что А – **конечный предел** функции f(x).

Предел функции при стремлении аргумента к бесконечности.

Определение. Число А называется **пределом** функции f(x) при $x \to \infty$, если для любого числа $\varepsilon>0$ существует такое число $M>0$, что для всех х, $|x|>M$ выполняется неравенство

$$\left|A - f(x)\right| < \varepsilon$$

При этом предполагается, что функция f(x) определена в окрестности бесконечности.

Записывают: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A.$ Аналогично можно определить пределы

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$ для любого x>M и

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$ для любого x<M.

Основные теоремы о пределах.

Теорема 1. $\lim\limits_{x\to a} C = C$, где C = const.

Следующие теоремы справедливы при предположении, что функции f(x) и g(x) имеют конечные пределы при x→a.

Теорема 2. $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$

Теорема 3. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$

Следствие. $\lim\limits_{x\to a} C\cdot f(x) = C\cdot \lim\limits_{x\to a} f(x)$

Теорема 4. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ при $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$

Теорема 5. *Если f(x)>0 вблизи точки x = a и* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$*, то A>0.*

Аналогично определяется знак предела при f(x) < 0, f(x) ≥ 0, f(x) ≤ 0.

Теорема 6. *Если g(x) ≤ f(x) ≤ u(x) вблизи точки x = a и* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} u(x) = A$*, то и*

$\lim\limits_{x\to a} = A$.

Определение. Функция f(x) называется **ограниченной** вблизи точки x = a, если существует такое число M>0, что |f(x)|<M вблизи точки x = a.

Теорема 7. *Если функция f(x) имеет конечный предел при x→a, то она ограничена вблизи точки x = a.* **Бесконечно малые функции.**

Определение. Функция f(x) называется **бесконечно малой** при x→a, где a может быть числом или одной из величин ∞, +∞ или -∞, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.

Свойства бесконечно малых функций:

1) Сумма фиксированного числа бесконечно малых функций при $x \to a$ тоже бесконечно малая функция при $x \to a$.
2) Произведение фиксированного числа бесконечно малых функций при $x \to a$ тоже бесконечно малая функция при $x \to a$.
3) Произведение бесконечно малой функции на функцию, ограниченную вблизи точки $x = a$ является бесконечно малой функцией при $x \to a$.
4) Частное от деления бесконечно малой функции на функцию, предел которой не равен нулю есть величина бесконечно малая.

Бесконечно большие функции и их связь с бесконечно малыми.

Определение. Функция называется **бесконечно большой** при $x \to a$, где a – число или одна из величин ∞, $+\infty$ или $-\infty$, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, где А – число или одна из величин ∞, $+\infty$ или $-\infty$.

Связь бесконечно больших и бесконечно малых функций осуществляется в соответствии со следующей теоремой.

Теорема. *Если $f(x) \to 0$ при $x \to a$ (если $x \to \infty$) и не обращается в ноль, то*

$$y = \frac{1}{f(x)} \to \infty$$

Пример. Найти предел $\lim\limits_{x \to 0} \frac{tg5x}{\sin 7x}$

Так как tg5x ~ 5x и sin7x ~ 7x при x → 0, то, заменив функции эквивалентными бесконечно малыми, получим:

$$\lim_{x \to 0} \frac{tg5x}{\sin 7x} = \lim_{x \to 0} \frac{5x}{7x} = \frac{5}{7}$$

Пример. Найти предел $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^3}{1 - \cos x}$.

Так как $1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2} \sim 2\left(\frac{x}{2}\right)^2$ при $x \to 0$, то $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^3}{1 - \cos x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x^3}{\frac{x^2}{2}} = \lim\limits_{x \to 0} 2x = 0$.

Пример. Найти предел $\lim\limits_{x \to 0} \frac{tgx}{\sin x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{x^2} = \infty$.

Если α и β - бесконечно малые при $x \to a$, причем β - бесконечно малая более высокого порядка, чем α, то $\gamma = \alpha + \beta$ - бесконечно малая, эквивалентная α. Это можно доказать следующим равенством $\lim\limits_{x \to a} \frac{\gamma}{\alpha} = \lim\limits_{x \to a}\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right) = 1$.

Тогда говорят, что α - **главная часть** бесконечно малой функции γ.

Пример. Функция $x^2 + x$ – бесконечно малая при $x \to 0$, x – главная часть этой функции. Чтобы показать это, запишем $\alpha = x^2$, $\beta = x$, тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x} = 0, \quad \lim_{x\to 0}\frac{x^2 + x}{x} = \lim_{x\to 0}(x+1) = 1.$$

Некоторые замечательные пределы.

Первый замечательный предел. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$,

$Q(x) = b_0x^m + b_1x_{m-1} + \ldots + b_m$ - многочлены.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^n(a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_n}{x^n})}{x^m(b_0 + \frac{b_1}{x} + \ldots. + \frac{b_m}{x^m})} = x^{n-m}\frac{a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_n}{x^n}}{b_0 + \frac{b_1}{x} + \ldots + \frac{b_m}{x^m}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_n}{x^n}}{b_0 + \frac{b_1}{x} + \ldots + \frac{b_m}{x^m}} = \frac{a_0}{b_0}$$

Итого: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} 0, & при \quad n < m \\ \frac{a_0}{b_0}, & при \quad n = m \\ \infty, & при \quad n > m \end{cases}$

Второй замечательный предел. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$

Третий замечательный предел. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

Часто если непосредственное нахождение предела какой – либо функции представляется сложным, то можно путем преобразования функции свести задачу к нахождению замечательных пределов.

Кроме трех, изложенных выше, пределов можно записать следующие полезные на практике соотношения:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1; \qquad \lim_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x} = \ln a; \qquad \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^m - 1}{x} = m.$$

Пример. Найти предел.

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgmx}{\sin nx} = \lim_{x\to 0}\frac{mx}{nx} = \frac{m}{n}$$

Пример. Найти предел.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{tgx-tgx_0}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\sin(x-x_0)}{(x-x_0)\cos x\cos x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\sin(x-x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\cos x\cos x_0}=1\cdot\frac{1}{\cos^2 x_0}=\frac{1}{\cos^2 x_0}$$

Пример. Найти предел.

$$\lim_{x\to\pi/4}\frac{\sin x-\cos x}{\pi-4x}=\lim_{x\to\pi/4}\frac{-\frac{2}{\sqrt{2}}\sin(\pi/4-x)}{\pi-4x}=\lim_{x\to\pi/4}\frac{-\sin(\pi/4-x)}{2\sqrt{2}(\pi/4-x)}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Пример. Найти предел.

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{\cos x}{\pi-2x}=\left\{\begin{aligned}&y=\pi/2-x\\&x=\pi/2-y\\&\pi-2x=\pi-\pi+2y\end{aligned}\right\}=\lim_{y\to 0}\frac{\cos(\pi/2-y)}{2y}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=\frac{1}{2}$$

Пример. Найти предел.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+3}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1+4}{x-1}\right)^{x+3}=\left\{\begin{aligned}&y=x-1\\&x\to\infty\\&y\to\infty\end{aligned}\right\}=\lim_{y\to\infty}\left(\frac{y+4}{y}\right)^{y+4}=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{4}{y}\right)^{y}\cdot\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{4}{y}\right)^{4}=$$

$$=\left\{z=\frac{y}{4}\right\}=\lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{4z}=\left(\lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{z}\right)^{4}=e^4$$

Пример. Найти предел $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-6x+8}{x^2-8x+12}$.

Для нахождения этого предела разложим на множители числитель и знаменатель данной дроби.

$x^2 - 6x + 8 = 0;$ $x^2 - 8x + 12 = 0;$

D = 36 – 32 = 4; D = 64 – 48 = 16;

$x_1 = (6 + 2)/2 = 4;$ $x_1 = (8 + 4)/2 = 6;$

$x_2 = (6 - 2)/2 = 2\ ;$ $x_2 = (8 - 4)/2 = 2;$

Тогда $\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-4)}{(x-2)(x-6)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-4}{x-6}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

Пример. Найти предел. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}}{x^2-x}$ домножим числитель и знаменатель дроби на сопряженное выражение:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+x+x^2-1+x-x^2}{x(x-1)(\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2})}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x(x-1)(\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2})}=$$

$$=\frac{2}{-1\cdot(1+1)}=-1.$$

Пример. Найти предел.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-9}=\left\{x^2-5x+6=(x-2)(x-3)\right\}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-3)(x+3)}=\frac{3-2}{3+3}=\frac{1}{6}$$

Пример. Найти предел $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2-3x+2}$.

Разложим числитель и знаменатель на множители.

$$x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$$

$$x^3-6x^2+11x-6=(x-1)(x-2)(x-3),\ \text{т.к.}$$

$$\begin{array}{l|l} x^3-6x^2+11x-6 & x-1 \\ \underline{x^3-x^2} & x^2-5x+6 \\ \quad -5x^2+11x & \\ \quad \underline{-5x^2+5x} & \\ \qquad 6x-6 & \\ \qquad \underline{6x-6} & \\ \qquad\quad 0 & \end{array}$$

$x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$

Тогда $\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x-1)(x-2)}=-2$

Пример. Найти предел.

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(a+2h)-2\sin(a+h)+\sin a}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{2\sin\frac{2a+2h}{2}\cos\frac{2h}{2}-2\sin(a+h)}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{2\sin(a+h)(\cosh-1)}{h^2}=$$

$$=2\lim_{h\to 0}\sin(a+h)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{-2\sin^2(h/2)}{4(h/2)^2}=2\sin a\cdot(-1/2)=-\sin a$$

Задания практической работы

1.Найти указанные пределы.

1.1. $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$ *ответ*: $\frac{1}{8}$

1.2. $\lim_{x\to 0}\frac{x^3-x^2+2x}{x^2+x}$ *ответ*: 1

1.3. $\lim_{x\to 3}\frac{6+x-x^2}{x^3-27}$ *ответ*: $-\frac{5}{27}$

1.4. $\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-x-1}{3x^2-x-2}$ *ответ*: $\frac{3}{5}$

1.5. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-7x+4}{x^2-5x+6}$ *ответ: нет решения*

1.6. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{12+x-x^2}{x^3-27}$ *ответ: нет решения*

1.7. $\lim\limits_{x\to 1/3}\dfrac{3x^2+2x-1}{27x^3-1}$ *ответ*: $\dfrac{4}{9}$

1.8. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-4x-5}{x^2-2x-3}$ *ответ*: $\dfrac{11}{4}$

1.9. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+2x-1}{-x^2+x+2}$ *ответ*: $-\dfrac{4}{3}$

1.10. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2-11x+6}{2x^2-5x-3}$ *ответ*: 1

1.11. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^2+x-6}$ *ответ*: $\dfrac{12}{5}$

1.12. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-2}{x^3+1}$ *ответ*: -1

1.13. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x^2+x-20}$ *ответ*: $\dfrac{8}{9}$

1.14. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{4x^2+11x-3}{x^2+2x-3}$ *ответ*: $\dfrac{13}{4}$

1.15. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2-7x-6}{2x^2-7x+3}$ *ответ*: $\dfrac{1}{5}$

1.16. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{4x^2+7x-2}{3x^2+8x+4}$ *ответ*: $\dfrac{9}{4}$

1.17. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{5x^2+4x-1}{3x^2+x-2}$ *ответ*: $\dfrac{6}{5}$

1.18. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-4x-5}{3x^2+2x-2}$ *ответ*: 0

1.19. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{7x^2+4x-3}{2x^2+3x+1}$ *ответ*: 1

1.20. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3x^2-3x+2}{x^2-x-12}$ *ответ: нет решения*

1.21. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-9x+10}{x^2+3x-10}$ *ответ*: $-\dfrac{1}{7}$

1.22. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x^2+x-5}{x^2-2x+1}$ *ответ: нет решения*

1.23. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{-5x^2+11x-2}{3x^2-x-10}$ *ответ*: $-\dfrac{9}{11}$

1.24. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2-5x-14}{2x^2-9x-35}$ *ответ*: $\dfrac{9}{19}$

1.25. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3x^2-6x-45}{2x^2-3x-35}$ *ответ*: $\dfrac{24}{17}$

1.26. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{4x^2+3x+15}{x^2-6x-27}$ *ответ: нет решения*

1.27. $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2-2x-35}{2x^2+11x+5}$ *ответ*: $\dfrac{4}{3}$

1.28. $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{2x^2+15x-8}{3x^2+25x+8}$ *ответ*: $\dfrac{17}{23}$

1.29. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3x^2-2x-40}{x^2-3x-4}$ *ответ*: $\dfrac{22}{5}$

1.30. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2+5x-3}{3x^2+10x+3}$ *ответ*: $\dfrac{7}{8}$

2. Найти указанные пределы

2.1. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2+11x+15}{3x^2+5x-12}$ *ответ*: $\dfrac{1}{13}$

2.2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+5x-10}{x^3-1}$ *ответ: нет решения*

2.3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^2-4x+3}$ *ответ*: 0

2.4. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2+2x+1}{x^3-8}$ *ответ: нет решения*

2.5. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^4-x^2+x+1}{x^4+1}$ *ответ*: 0

2.6. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-3x-1}{x^4-1}$ *ответ*: *нет решения*

2.7. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x+3}{5x^2+3x-3}$ *ответ*: $\dfrac{5}{23}$

2.8. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+2x}{x^2+4x+4}$ *ответ*: *нет решения*

2.9. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x^2+3x+2}$ *ответ*: -2

2.10. $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{2x^2+7x-4}{x^3+64}$ *ответ*: $-\dfrac{3}{16}$

2.11. $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{4x^2+19x-5}{2x^2+11x+5}$ *ответ*: $\dfrac{7}{3}$

2.12. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2+x-1}{x^3+x-2}$ *ответ*: $\dfrac{1}{2}$

2.13. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{2x^2-7x+5}$ *ответ*: 0

2.14. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{2x^2-9x+10}$ *ответ*: -12

2.15. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{9x^2+17x-2}{x^2+2x}$ *ответ*: $\dfrac{19}{2}$

2.16. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x-2}{x^3-x^2-x+1}$ *ответ*: *нет решения*

2.17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^3-2x^2+5x}{3x^2+7x}$ *ответ*: $\dfrac{5}{7}$

2.18. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x^4-5x^2+1}{x^2-1}$ *ответ*: 3

2.19. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2+5x-1}{x^2-5x+6}$ *ответ*: *нет решения*

2.20. $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2-x-30}{x^3+125}$ *ответ*: $-\dfrac{11}{75}$

2.21. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2+3x-28}{x^3-64}$ *ответ*: $\dfrac{11}{48}$

2.22. $\lim\limits_{x\to 1/2}\dfrac{8x^3-1}{x^2-1/4}$ *ответ*: 6

2.23. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2+3x-28}{x^2-4x}$ *ответ*: $\dfrac{11}{4}$

2.24. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x^2+11x+10}{x^2-5x+14}$ *ответ*: 0

2.25. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{3x^2+x-10}$ *ответ*: $\dfrac{4}{11}$

2.26. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2+x}{4x^2-5x+1}$ *ответ*: 0

2.27. $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{2x^2-11x-6}{3x^2-20x+12}$ *ответ*: $\dfrac{13}{16}$

2.28. $\lim\limits_{x\to -6}\dfrac{x^2+2x-24}{2x^3+15x+18}$ *ответ*: 0

2.29. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x-4}{x^2-11x+18}$ *ответ*: $-\dfrac{10}{7}$

2.30. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^3-64}{7x^2-27x-4}$ *ответ*: $\dfrac{48}{29}$

3. Найти указанные пределы

3.1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-5x^2+2}{2x^3+5x^2-x}$

3.2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+7x}{2x^3-4x^2+5}$

3.3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^4-3x^2+7}{x^4+2x^3+1}$

3.4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3-2x^2+4x}{2x^3+5}$

3.5. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-4x^2+28x}{5x^3+3x^2+x-1}$

3.6. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+10x+3}{2x^2+5x-3}$

3.7. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-3x^4+x^2+x}{x^4+3x-2}$

3.8. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+7x+3}{5x^2-3x+4}$

3.9. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-x^2+3x+1}{3x^2+x-5}$

3.10. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-3x^2+10}{7x^3+2x+1}$

3.11. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^2+5x-7}{2x^2-x+10}$

3.12. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^4+2x+1}{x^4-x^3+2x}$

3.13. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+2x+9}{2x^2-x+4}$

3.14. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+5x-7}{3x^2+x+1}$

3.15. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3+7x-2}{3x^3-x-4}$

3.16. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{18x^2+5x}{8-3x-9x^2}$

3.17. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^4-6x^2+2}{x^4+4x-3}$

3.18. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8x^2+4x-5}{4x^2-3x+2}$

3.19. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8x^4-4x^2+3}{2x^4+1}$

3.20. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-4x+2}{6x^2+5x+1}$

3.21. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^3+4x}{x^3-3x+2}$

3.22. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+4x-x^4}{x+3x^2+2x^4}$

3.23. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3+7x^2-2}{6x^3-4x+3}$

3.24. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x+14x^2}{1+2x+7x^2}$

3.25. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-2x^2+5x^4}{2+3x^2+x^4}$

3.26. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^4-2x^2-7}{3x^4+3x+5}$

3.27. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4-5x^2-3x^5}{x^5+6x+8}$

3.28. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^3-7x^2+3}{2+2x-x^3}$

3.29. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^3-2x+1}{2x^3+3x^2+2}$

3.30. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^2-3x+1}{3x^2+x-5}$

4. Найти указанные пределы

4.1. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^5-2x+4}{2x^4+3x^2+1}$

4.2. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^4+2x-5}{2x^2+x+7}$

4.3. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x^2+7x-4}{x^5+2x-1}$

4.4. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x-x^6}{x^2-2x+5}$

4.5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+7x-1}{3x^4+2x+5}$ 4.6. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3+7x^2+4}{x^4+5x-1}$

4.7. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^6-5x^2+2}{2x^3+4x-5}$ 4.8. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^7+5x^2-4x}{3x^2+11x-7}$

4.9. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{7x^2+5x+9}{1+4x-x^3}$ 4.10. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+x^2-6}{2x^2+3x+1}$

4.11. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2+5x+7}{3x^4-2x^2+x}$ 4.12. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+4x^2-7x}{2x^2+7x-3}$

4.13. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x^3-3x^2+7}{2x^4+3x^2+1}$ 4.14. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-3x+1}{1+2x-x^4}$

4.15. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3+3x^2+5}{3x^2-4x+1}$ 4.16. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^2-5x+2}{4x^3+2x-1}$

4.17. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{11x^3+3x}{2x^2-2x+1}$ 4.18. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^2+3x+5}{4x^3-2x^2+1}$

4.19. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{6x^3+5x^2-3}{2x^2-x+7}$ 4.20. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+4x-7}{x^4-2x^3+1}$

4.21. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{8x^5-4x^3+3}{2x^3+x-7}$ 4.22. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-7x+1}{x^3+4x^2-3}$

4.23. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x^4-2x^3+3}{2x^2+3x-7}$ 4.24. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^3+x^2-7}{2x^2-5x+3}$

4.25. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^4+2x^2-8}{8x^3-4x+5}$ 4.26. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+2x-4}{3x^2-4x+1}$

4.27. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{7x^3-2x+4}{2x^2+x-5}$ 4.28. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+5x^2-3x}{3x^2+x-10}$

4.29. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2+10x-11}{3x^4-2x+5}$ 4.30. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3+3x-4}{2x^2-5x+1}$

5.Найти указанные пределы

5.1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+3x-5}{7x^3-2x^2+1}$ 5.2. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^2-7x+2}{x^4+2x-4}$

5.3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^4-3x+4}{3x^2-2x+1}$ 5.4. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2-x+7}{3x^4-5x^2+10}$

5.5. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x^3-2x^2+x}{3x^2-x}$

5.6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-2x+1}{3x^2+2x-5}$

5.7. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-5x+2}{x^4+3x^2-9}$

5.8. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x^2-4x+2}{4x^3+2x-5}$

5.9. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-3x^2+2x}{x^2+7x+1}$

5.10. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^2-7x+5}{4x^5-3x^3+2}$

5.11. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^5+6x^4-x^3}{2x^2+6x+1}$

5.12. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4-3x-2x^2}{3x^4+5x}$

5.13. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{7-3x^4}{2x^3+3x^2-5}$

5.14. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^4+7x^3-3}{3x^2-5x+1}$

5.15. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x+7}{2-3x+4x^2}$

5.16. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3-3x+1}{7x+5}$

5.17. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10x-7}{3x^4+2x^3+1}$

5.18. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x^4-3x^2}{1+2x+3x^2}$

5.19. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x+3}{x^3-4x^2-x}$

5.20. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^4+5x}{2x^2-3x-7}$

5.21. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-5x+3}{3x^4-2x^2+x}$

5.22. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^5-x^3}{4x^2+3x-6}$

5.23. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+1}{x^3-5x^2+4x}$

5.24. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2-x-3x^2}{x^3-16}$

5.25. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-10x+7}{2x^3-3x}$

5.26. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3-3x+1}{x^5+4x^3}$

5.27. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-13}{x^7-3x^5-4x}$

5.28. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2-3x+1}{x^3+2x^2+5}$

5.29. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-81}{3x^2+4x+2}$

5.30. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{7x+4}{3x^3-5x+1}$

6. Найти указанные пределы

6.1. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2+x-12}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}$ $ответ:7$

6.2. $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{\sqrt{x+12}-\sqrt{4-x}}{x^2+2x-8}$ $ответ:-\dfrac{\sqrt{8}}{48}$

6.3. $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{\sqrt{x+10}-\sqrt{4-x}}{2x^2-x-21}$ $ответ:-\dfrac{\sqrt{7}}{91}$

6.4. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x+6}}{x^2-x-6}$ $ответ:\dfrac{1}{10}$

6.5. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3+2x}-\sqrt{x+4}}{3x^2-4x+1}$ $ответ: \dfrac{\sqrt{5}}{20}$ 6.6. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x+1}}$ $ответ: -\sqrt{3}$

6.7. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+4x+1}{\sqrt{x+3}-\sqrt{5+3x}}$ $ответ: 2\sqrt{2}$ 6.8. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^2-9x+4}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x-3}}$ $ответ: -7$

6.9. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+6}}{2x^2-7x-15}$ $ответ: \dfrac{\sqrt{11}}{286}$ 6.10. $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{\sqrt{3x+17}-\sqrt{2x+12}}{x^2+8x+15}$ $ответ: -\dfrac{\sqrt{2}}{8}$

6.11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1}-1}$ $ответ: 2$ 6.12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{7-x}-\sqrt{7+x}}{\sqrt{7}x}$ $ответ: -\dfrac{1}{7}$

6.13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$ $ответ: 3$ 6.14. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$ $ответ: \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

6.15. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{5+x}-2}{\sqrt{8-x}-3}$ $ответ: -\dfrac{3}{2}$ 6.16. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x+4}-3}{\sqrt{x-1}-2}$ $ответ: \dfrac{3}{2}$

6.17. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x-3}-2}{\sqrt{x+2}-3}$ $ответ: \dfrac{3}{2}$ 6.18. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{4x-3}-3}{x^2-9}$ $ответ: \dfrac{1}{9}$

6.19. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{5x+1}-4}{x^2+2x-15}$ $ответ: \dfrac{5}{64}$ 6.20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-\sqrt{x^2+4}}{3x^2}$ $ответ: -\dfrac{1}{12}$

6.21. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+16}-4}$ $ответ: 2$ 6.22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}}$ $ответ: -3\sqrt{5}$

6.23. $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{2x+7}-5}{3-\sqrt{x}}$ $ответ: -\dfrac{6}{5}$ 6.24. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{6x+1}-5}$ $ответ: -\dfrac{25}{24}$

6.25. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{\sqrt{3x}-x}$ $ответ: -5$ 6.26. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x^2}-1}{x^3+x^2}$ $ответ: \dfrac{3}{2}$

6.27. $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{\sqrt{x+20}-4}{x^3+64}$ $ответ: \dfrac{1}{384}$ 6.28. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-2}{\sqrt{8+x}-3}$ $ответ: \dfrac{10}{\sqrt{10}-3}$

6.29. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{9+x}-3}{x^2+x}$ $ответ: \dfrac{1}{16}$ 6.30. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{4x+1}-3}{x^3-8}$ $ответ: \dfrac{1}{18}$

7.Найти указанные пределы

7.1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x+8}\right)^{-3x}$ Ответ: e^{12} 7.2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{2x-3}$ Ответ: e^{-12}

7.3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{1+2x}\right)^{-4x}$ Ответ: e^{2}

7.4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)^{2-3x}$ Ответ: e^{3}

7.5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+5}{2x+1}\right)^{5x}$ Ответ: e^{10}

7.6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x}\right)^{-5x}$ Ответ: e^{-15}

7.7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^{1+2x}$ Ответ: e^{2}

7.8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x-4}$ Ответ: e^{4}

7.9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{2x-3}\right)^{3x}$ Ответ: $e^{9/2}$

7.10. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-7}{x}\right)^{2x+1}$ Ответ: e^{-14}

7.11. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+4}\right)^{3x+2}$ Ответ: e^{-15}

7.12. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{x+2}$ Ответ: e

7.13. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2x-3}$ Ответ: e^{-6}

7.18. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+5}{x}\right)^{3x+4}$ Ответ: e^{15}

7.19. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-7}{x+1}\right)^{4x-2}$ Ответ: e^{-32}

7.20. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x}\right)^{3-2x}$ Ответ: e^{-4}

7.21. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2-3x}{5-3x}\right)^{x}$ Ответ: e

7.22. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1-x}{2-x}\right)^{3x}$ Ответ: e^{3}

7.23. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x-1}{4x+1}\right)^{2x}$ Ответ: e^{-1}

7.24. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+4}{3x}\right)^{-2x}$ Ответ: $e^{-8/3}$

7.25. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+4}\right)^{-x}$ Ответ: $e^{5/2}$

7.26. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+4}{3x+5}\right)^{x+1}$ Ответ: $e^{-1/3}$

7.27. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1+2x}{3+2x}\right)^{-x}$ Ответ: e

7.28. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x}{3x+2}\right)^{x-2}$ Ответ: $e^{-2/3}$

7.29. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x-1}\right)^{3-2x}$ Ответ: e^{-2}

7.30. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4-2x}{1-2x}\right)^{x+1}$ Ответ: $e^{-3/2}$

8. Найти указанные пределы

8.1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{5x+7}\right)^{x+1}$ Ответ: 0

8.2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^{x}$ Ответ: ∞

8.3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{2x-1}\right)^{3x}$ Ответ: 0

8.4. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2x-1}{4x+1}\right)^{3x-1}$ Ответ: 0

8.5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x+8}{x-2}\right)^{x+4}$ Ответ: ∞

8.6. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x+1}{3x-1}\right)^{2x+1}$ Ответ: 0

8.7. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^{4x}$ Ответ: ∞

8.8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{2x-1}\right)^{5x}$ Ответ: 0

8.9. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x+3}{2x-4}\right)^{x+2}$ Ответ: 0

8.10. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2x+1}{3x-1}\right)^{x-1}$ Ответ: 0

8.11. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x-3}{x+4}\right)^{x+3}$ Ответ: ∞

8.12. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2x-3}{7x+4}\right)^{x}$ Ответ: 0

8.13. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x-5}{3x+4}\right)^{2x}$ Ответ: 0

8.14. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{4x-5}\right)^{2x}$ Ответ: 0

8.15. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x-2}{3x+1}\right)^{5x}$ Ответ: 0

8.16. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{3x-4}{x+6}\right)^{x-1}$ Ответ: ∞

8.17. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{3x+10}\right)^{3x}$ Ответ: 0

8.18. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2x-3}{x+4}\right)^{6x+1}$ Ответ: ∞

8.19. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x+3}{3x-1}\right)^{2x}$ Ответ: 0

8.20. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{6x+5}{x-10}\right)^{5x}$ Ответ: ∞

8.21. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{3x+7}{x+4}\right)^{4x}$ Ответ: ∞

8.22. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{4x+5}\right)^{3x}$ Ответ: 0

8.23. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{5x-7}{x+6}\right)^{2x}$ Ответ: ∞

8.24. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3-4x}{2-x}\right)^{6x}$ Ответ: ∞

8.25. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1-2x}{3-x}\right)^{-x}$ Ответ: 0

8.26. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{4+3x}{5+x}\right)^{7x}$ Ответ: ∞

8.27. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{3x-1}{2x+5}\right)^{3x}$ Ответ: ∞

8.28. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1-x}{2-10x}\right)^{5x}$ Ответ: 0

8.29. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3+x}{9x-4}\right)^{2x}$ Ответ: 0

8.30. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x+5}{4x-2}\right)^{3x}$ Ответ: 0

9.Найти указанные пределы

Найти пределы.

k – порядковый номер в журнале

1). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{(k+2)x}$, 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{k\,x^2}{\sin^2 5x}$, 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\,(kx+3x)\,x^2}{5x}$,

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^x$, 5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin kx-\sin 5x}{kx}$, 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos kx}{x}$

Контрольные вопросы

1. Дайте определения предела функции в точке.
2. Какие типы неопределенностей вам известны?
3. Как избавиться о неопределенности $\frac{0}{0}$?

4.Чему равно значение предела функции при неопределенности $\frac{c}{0}$?

5.Чему равно значение предела функции при неопределенности $\frac{0}{c}$?

6. Записать замечательные пределы.

Практическая работа № 4 по теме

Тема «Исследование функции на непрерывность. Классификация точек разрыва»

Цель: научиться вычислять исследовать функцию на непрерывность, классифицировать точки разрыва .

Теоретические положения

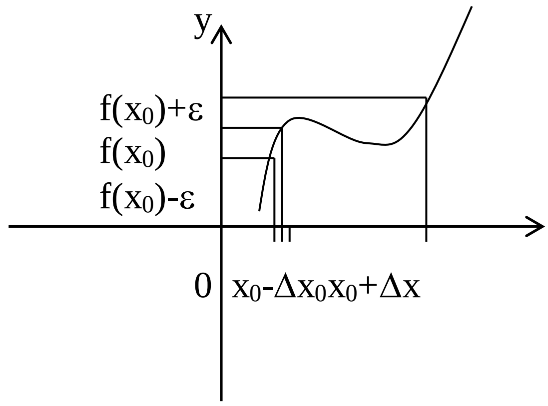
Непрерывность функции и ее разрывы.
Определение. Функция f(x), определенная в окрестности некоторой точки x_0, называется **непрерывной в точке** x_0, если предел функции и ее значение в этой точке равны, т.е.

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

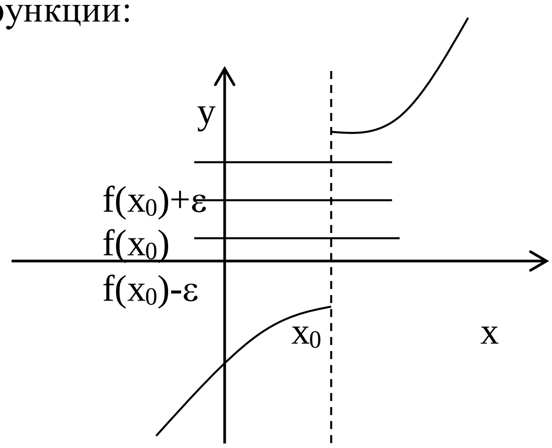
Тот же факт можно записать иначе: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(\lim\limits_{x\to x_0} x)$

Определение. Если функция f(x) определена в некоторой окрестности точки x_0, но не является непрерывной в самой точке x_0, то она называется **разрывной** функцией, а точка x_0 – точкой разрыва.

Пример непрерывной функции:



Пример разрывной функции:



Свойства непрерывных функций.

1) Сумма, разность и произведение непрерывных в точке x_0 функций – есть функция, непрерывная в точке x_0.

2) Частное двух непрерывных функций $\frac{f(x)}{g(x)}$ – есть непрерывная функция при условии, что g(x) не равна нулю в точке x_0.

3) Суперпозиция непрерывных функций – есть непрерывная функция.

Это свойство может быть записано следующим образом:

Если $u = f(x)$, $v = g(x)$ – непрерывные функции в точке $x = x_0$, то функция $v = g(f(x))$ – тоже непрерывная функция в этой точке.

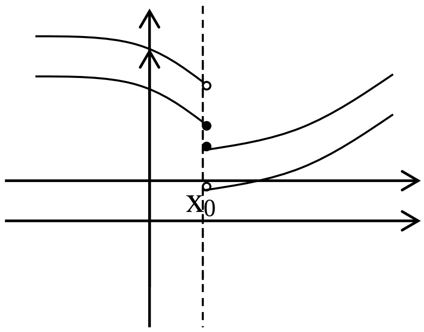
Точки разрыва и их классификация.

Рассмотрим некоторую функцию f(x), непрерывную в окрестности точки x_0, за исключением может быть самой этой точки. Из определения точки разрыва функции следует, что $x = x_0$ является точкой разрыва, если функция не определена в этой точке, или не является в ней непрерывной.

Следует отметить также, что непрерывность функции может быть односторонней. Поясним это следующим образом.

Если односторонний предел (см. выше) $\lim\limits_{x \to x+0} f(x) = f(x_0)$, то функция называется непрерывной справа.

.



Если односторонний предел (см. выше) $\lim\limits_{x \to x-0} f(x) = f(x_0)$, то функция называется непрерывной слева.

Определение. Точка x_0 называется **точкой разрыва** функции f(x), если f(x) не определена в точке x_0 или не является непрерывной в этой точке.

Определение. Точка x_0 называется **точкой разрыва 1- го рода**, если в этой точке функция f(x) имеет конечные, но не равные друг другу левый и правый пределы.

$$\lim_{x \to x_0+0} f(x) \neq \lim_{x \to x_0-0} f(x)$$

Для выполнения условий этого определения не требуется, чтобы функция была определена в точке $x = x_0$, достаточно того, что она определена слева и справа от нее.

Из определения можно сделать вывод, что в точке разрыва 1 – го рода функция может иметь только конечный скачок. В некоторых частных случаях точку разрыва 1 – го рода еще иногда называют **устранимой** точкой разрыва, но подробнее об этом поговорим ниже.

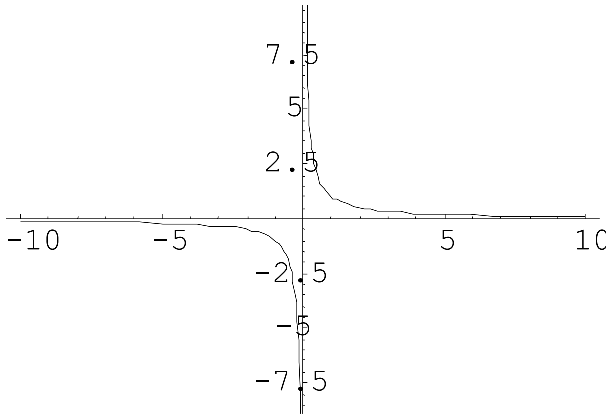
Определение. Точка x_0 называется **точкой разрыва 2 – го рода**, если в этой точке функция f(x) не имеет хотя бы одного из односторонних пределов или хотя бы один из них бесконечен.

Пример. Функция Дирихле (Дирихле Петер Густав(1805-1859) – немецкий математик, член- корреспондент Петербургской АН 1837г)

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x - \textit{рациональное число} \\ 0, & x - \textit{иррациональное число} \end{cases}$$

не является непрерывной в любой точке x_0.

Пример. Функция f(x) = $\frac{1}{x}$ имеет в точке $x_0 = 0$ точку разрыва 2 – го рода, т.к. $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x) = +\infty;\quad \lim\limits_{x\to 0-0} f(x) = -\infty$.

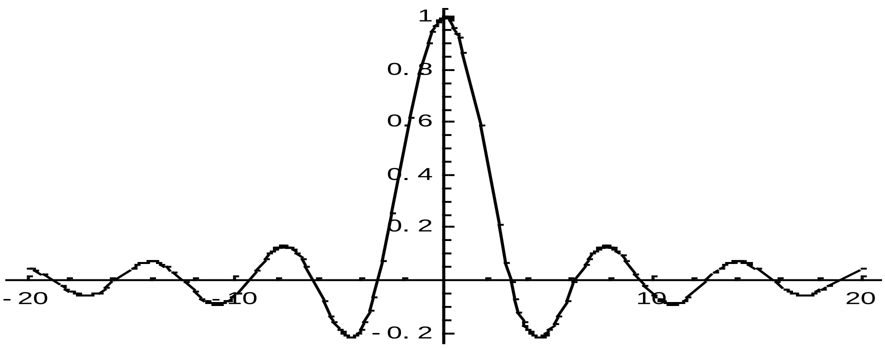


Пример. f(x) = $\frac{\sin x}{x}$

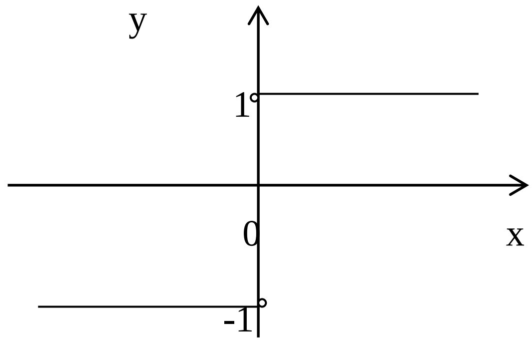
Функция не определена в точке x = 0, но имеет в ней конечный предел $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$, т.е. в точке x = 0 функция имеет точку разрыва 1 – го рода. Это – устранимая точка разрыва, т.к. если доопределить функцию:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & при \quad x \neq 0 \\ 1, & при \quad x = 0 \end{cases}$$

График этой функции:



Пример. f(x) = $\frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1, & при \quad x > 0 \\ -1, & при \quad x < 0 \end{cases}$



Эта функция также обозначается sign(x) – знак x. В точке x = 0 функция не определена. Т.к. левый и правый пределы функции различны, то точка разрыва – 1 – го рода. Если доопределить функцию в точке x = 0, положив f(0) = 1, то функция будет непрерывна справа, если положить f(0) = -1, то функция будет непрерывной слева, если положить f(x) равное какому- либо числу, отличному от 1 или –1, то функция не будет непрерывна ни слева, ни справа, но во всех случаях тем не менее будет иметь в точке x = 0 разрыв 1 – го рода. В этом примере точка разрыва 1 – го рода не является устранимой.

Таким образом, для того, чтобы точка разрыва 1 – го рода была устранимой, необходимо, чтобы односторонние пределы справа и слева были конечны и равны, а функция была бы в этой точке не определена.

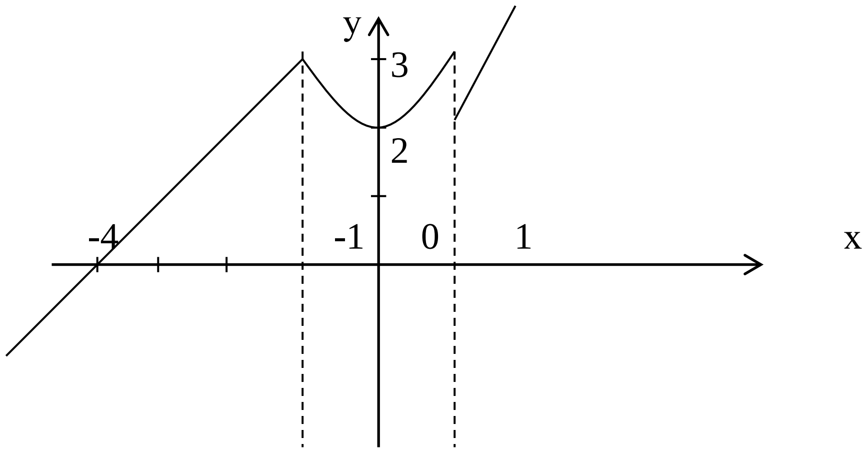
Пример. Исследовать на непрерывность функцию и определить тип точек разрыва, если они есть.

$$f(x) = \begin{cases} x+4, & x < -1 \\ x^2+2, & -1 \le x \le 1 \\ 2x, & x \ge 1 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to -1-0} f(x) = 3$ $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x) = 3$

$\lim\limits_{x\to -1+0} f(x) = 3$ $\lim\limits_{x\to 1+0} f(x) = 2$

в точке x = -1 функция непрерывна в точке x = 1 точка разрыва 1 – го рода

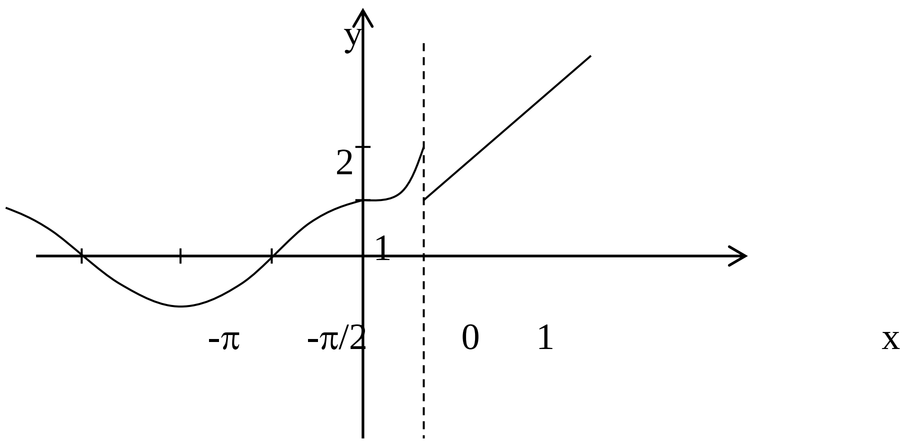


Пример. Исследовать на непрерывность функцию и определить тип точек разрыва, если они есть.

$$f(x)=\begin{cases}\cos x, & x\le 0\\ x^2+1, & 0<x<1\\ x, & x\ge 1\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0-0} f(x)=1 \quad \lim_{x\to 1-0} f(x)=2$$
$$\lim_{x\to 0+0} f(x)=1 \quad \lim_{x\to 1+0} f(x)=1$$

в точке x = 0 функция непрерывна, в точке x = 1 точка разрыва 1 – го рода



4.4.10. Таблица эквивалентных бесконечно малых.

Здесь мы с помощью рассмотренных в **4.4.7** пределов составим таблицу эквивалентных БМ функций и выпишем следующие из них выражения для главных частей (они подчёркнуты).

Эквивалентность при $x\to 0$	Главная часть при $x\to 0$
1. $\sin x \sim x$	1. $\sin x = \underline{x}+o(x)$
2. $1 - \cos x \sim x^2/2$	2. $1 - \cos x = \underline{x^2/2}+o(x^2) \Rightarrow \cos x = 1 - x^2/2+o(x^2)$
3. $\mathrm{tg}\, x \sim x$	3. $\mathrm{tg}\, x = \underline{x}+o(x)$
4. $\arcsin x \sim x$	4. $\arcsin x = \underline{x}+o(x)$
5. $\mathrm{arctg}\, x \sim x$	5. $\mathrm{arctg}\, x = \underline{x}+o(x)$
6. $a^x - 1 \sim x \ln a$; $e^x - 1 \sim x$	6. $a^x - 1 = \underline{x \ln a}+o(x) \Rightarrow a^x = 1 + x \ln a + o(x)$ $e^x - 1 = \underline{x}+o(x)) \Rightarrow e^x = 1 + x + o(x)$
7. $\log_a(1+x) \sim x \log_a e$; $\ln(1+x) \sim x$	7. $\log_a(1+x) = \underline{x \log_a e}+o(x)$; $\ln(1+x) = x+o(x)$
8. $(1+x)^a - 1 \sim a x$	8. $(1+x)^a - 1 = \underline{a x}+o(x) \Rightarrow (1+x)^a = 1 + a x + o(x)$
9. $\mathrm{sh}\, x \sim x$	9. $\mathrm{sh}\, x = \underline{x}+o(x)$
10. $\mathrm{ch}\, x - 1 \sim x^2/2$	10. $\mathrm{ch}\, x - 1 = \underline{x^2/2}+o(x^2) \Rightarrow \mathrm{ch}\, x = 1 + x^2/2 + o(x^2)$

Пример. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg5x}{\sin 7x}$

Так как tg5x ~ 5x и sin7x ~ 7x при x $\to$ 0, то, заменив функции эквивалентными бесконечно малыми, получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg5x}{\sin 7x} = \lim_{x\to 0}\frac{5x}{7x} = \frac{5}{7}$$

Пример. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3}{1-\cos x}$.

Так как 1 – cosx = $2\sin^2\frac{x}{2} \sim 2\left(\frac{x}{2}\right)^2$ при x$\to$0, то $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3}{1-\cos x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3}{\frac{x^2}{2}} = \lim\limits_{x\to 0} 2x = 0$.

Пример. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx}{\sin x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x^2} = \infty$.

Задания практической работы

Задание 1. Найти пределы, используя эквивалентные бесконечно малые функции.

2.1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x^2)}{x^3-5x^2}$ $\mathit{ответ}:-\dfrac{3}{5}$

2.2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 5x}{tg3x}$ $\mathit{ответ}:\dfrac{5}{3}$

2.3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{tg2x}$ $\mathit{ответ}:\dfrac{7}{2}$

2.4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{x^3+27x}$ $\mathit{ответ}:\dfrac{1}{9}$

2.5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg6x}{2x^2-3x}$

2.6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{2x}$ $\mathit{ответ}:\dfrac{3}{2}$

2.7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{arctg2x}$ $\mathit{ответ}:\dfrac{5}{2}$

2.8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x)}{\sin 2x}$ $\mathit{ответ}:\dfrac{3}{2}$

2.9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{tg3x}$ $\mathit{ответ}:\dfrac{2}{3}$

2.10. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sin(x-3)}{x^2-5x+6}$ $\mathit{ответ}:1$

2.11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos x}{2x^2}$ $\mathit{ответ}:-2$

2.12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{4x^2}$ $\mathit{ответ}:\dfrac{9}{2}$

2.13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg3x}{\ln(1+2x)}$ $\mathit{ответ}:\dfrac{3}{2}$

2.14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 4x}{tg5x}$ $\mathit{ответ}:\dfrac{4}{5}$

2.15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-1}{\sin 2x}$ $\mathit{ответ}:\dfrac{5}{2}$

2.16. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{tg(x+2)}{x^2-4}$ $\mathit{ответ}:-\dfrac{1}{4}$

2.17. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sin(x+2)}{x^3+8}$ $\mathit{ответ}:\dfrac{1}{12}$

2.18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{tg4x}$ $\mathit{ответ}:\dfrac{1}{2}$

2.19. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^3-64}{tg(x-4)}$ $\mathit{ответ}:48$

2.20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos 4x}{3x^2}$ $\mathit{ответ}:2$

2.21. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+4x^3)}{2x^3}$ $\mathit{ответ}:2$

2.22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg5x}{tg2x}$ $\mathit{ответ}:\dfrac{5}{2}$

2.23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\ln(1+2x)}$ $\mathit{ответ}:\dfrac{3}{2}$

2.24. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 8x}{tg4x}$ $\mathit{ответ}:2$

2.25. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-1}{tg2x}$ $\mathit{ответ}:\dfrac{5}{2}$

2.26. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+4x)}{\sin 2x}$ $\mathit{ответ}:\dfrac{4}{2}$

2.27. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sin(x-3)}{x^3-27}$ $\mathit{ответ}:\dfrac{1}{27}$

2.28. $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{tg(x+5)}{x^2-25}$

2.29. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 8x}{2x^2}$ *ответ*: 1 2.30. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+5x)}{\sin 3x}$ *ответ*: $\dfrac{5}{3}$

Задание 2. Исследовать данные функции на непрерывность и построить их графики.

2.1. $f(x)=\begin{cases} x+4, x<-1, \\ x^2+2, -1\le x\le 1, \\ 2x, x\ge 1. \end{cases}$

2.2. $f(x)=\begin{cases} x+1, x\le 0 \\ (x+1)^2, 0\le x\le 2 \\ -x+4, x>2 \end{cases}$

2.3. $f(x)=\begin{cases} x+2, x\le -1 \\ x^{2+1}, -1<x\le 1 \\ -x+3, x>1 \end{cases}$

2.4 . $f(x)=\begin{cases} -x, x\le 0 \\ -(x-1)^2, 0<x<2 \\ x-3, x\ge 2 \end{cases}$

2.5. $f(x)=\begin{cases} -2(x+1), x\le -1 \\ (x+1)^3, -1<x<0 \\ x, x\ge 0 \end{cases}$

2.6. $f(x)=\begin{cases} -x, x\le 0 \\ x^2, 0<x\le 2 \\ x+1, x>2 \end{cases}$

2.7. $f(x)=\begin{cases} x^2+1, x\le 1 \\ 2x, 1<x\le 3 \\ x+2, x>3 \end{cases}$

2.8. $f(x)=\begin{cases} x-3, x<0 \\ x+1, 0\le x\le 4 \\ 3+x, x>4 \end{cases}$

2.9. $f(x)=\begin{cases} \sqrt{1-x}, x\le 0 \\ 0, 0<x\le 2 \\ x-2, x>2 \end{cases}$

2.10. $f(x)=\begin{cases} 2x^3, x\le 0 \\ x, 0<x\le 1 \\ 2+x, x>1 \end{cases}$

2.11. $f(x)=\begin{cases} \sin x, x<0 \\ x, 0\le x\le 2 \\ 0, x>2 \end{cases}$

2.12. $f(x)=\begin{cases} \cos x, x\le \dfrac{\pi}{2} \\ 0, \dfrac{\pi}{2}<x<\pi \\ 2, x\ge \pi \end{cases}$

23.13. $f(x)=\begin{cases} x-1, x\le 0 \\ x^2, 0<x<2 \\ 2x, x\ge 2 \end{cases}$

2.14. $f(x)=\begin{cases} x+1, x<0 \\ x^2-1, 0\le x<1 \\ -x, x\ge 1 \end{cases}$

2.15. $f(x)=\begin{cases} -x, x<0 \\ x^2+1, 0\le x<2 \\ x+1, x\ge 2 \end{cases}$

2.16. $f(x)=\begin{cases} x+3, x\le 0 \\ 1, 0<x\le 2 \\ x^2-2, x>2 \end{cases}$

2.17. $f(x)=\begin{cases} x-1, x<0 \\ \sin x, 0\le x<\pi \\ 3, x\ge\pi \end{cases}$

2.18. $f(x)=\begin{cases} -x+1, x<-1 \\ x^2+1, -1\le x\le 2 \\ 2x, x>2 \end{cases}$

2.19. $f(x)=\begin{cases} 1, x\le 0 \\ 2, 0<x\le 2 \\ x+3, x>2 \end{cases}$

2.20. $f(x)=\begin{cases} -x+2, x\le -2 \\ x^3, -2<x\le 1 \\ 2, x>1 \end{cases}$

2.21. $f(x)=\begin{cases} 3x+4, x\le -1 \\ x^2-2, -1<x<2 \\ x, x\ge 2 \end{cases}$

2.22. $f(x)=\begin{cases} x, x\le 1 \\ (x-2)^2, 1<x<3 \\ -x+6, x\ge 3 \end{cases}$

2.23. $f(x)=\begin{cases} x-1, x<1 \\ x^2+2, 1\le x\le 2 \\ -2x, x>2 \end{cases}$

2.24. $f(x)=\begin{cases} x^3, x<-1 \\ x-1, -1\le x\le 3 \\ -x+5, x>3 \end{cases}$

2.25. $f(x)=\begin{cases} x, x<-2 \\ -x+1, -2\le x\le 1 \\ x^2-1, x>1 \end{cases}$

2.26. $f(x)=\begin{cases} x+3, x\le 0 \\ -x^2+4, 0<x<2 \\ x-2, x\ge 2 \end{cases}$

2.27. $f(x)=\begin{cases} 0, x\le -1 \\ x^2-1, -1<x\le 2 \\ 2x, x>2 \end{cases}$

2.28. $f(x)=\begin{cases} -1, x<0 \\ \cos x, 0\le x\le\pi \\ 1-x, x>\pi \end{cases}$

2.29. $f(x)=\begin{cases} 2, x<-1 \\ 1-x, -1\le x\le 1 \\ \ln x, x>1 \end{cases}$

2.30. $f(x)=\begin{cases} -x, x\le 0 \\ x^3, 0<x\le 2 \\ x+4, x>2 \end{cases}$

Задание 3. Исследовать данные функции на непрерывность в указанных точках

3.1. $f(x)=2^{\frac{1}{x-3}}+1, \quad x_1=3, \ x_2=4$

3.2. $f(x)=5^{\frac{1}{x-3}}-1, \quad x_1=3, \ x_2=4$

3.3. $f(x)=\dfrac{x+7}{x-2}, \quad x_1=2, \ x_2=3$

3.4. $f(x)=\dfrac{x-5}{x+3}, \quad x_1=-2, \ x_2=-3$

3.5. $f(x)=4^{\frac{1}{3-x}}+2, \quad x_1=3, \; x_2=2$

3.6. $f(x)=9^{\frac{1}{2-x}}, \quad x_1=0, \; x_2=2$

3.7. $f(x)=2^{\frac{1}{x-5}}+1, \quad x_1=5, \; x_2=4$

3.8. $f(x)=5^{\frac{1}{x-4}}-1, \quad x_1=3, \; x_2=4$

3.9. $f(x)=6^{\frac{1}{x-3}}+3, \quad x_1=3, \; x_2=4$

3.10. $f(x)=7^{\frac{1}{5-x}}+1, \quad x_1=5, \; x_2=4$

3.11. $f(x)=\dfrac{x-3}{x+4}, \quad x_1=-5, \; x_2=-4$

3.12. $f(x)=\dfrac{x+5}{x-2}, \quad x_1=3, \; x_2=2$

3.13. $f(x)=5^{\frac{2}{x-3}}, \quad x_1=3, \; x_2=4$

3.14. $f(x)=4^{\frac{2}{x-1}}-3, \quad x_1=1, \; x_2=2$

3.15. $f(x)=2^{\frac{5}{1-x}}-1, \quad x_1=0, \; x_2=1$

3.16. $f(x)=8^{\frac{4}{x-2}}-1, \quad x_1=2, \; x_2=3$

3.17. $f(x)=5^{\frac{4}{3-x}}+1, \quad x_1=2, \; x_2=3$

3.18. $f(x)=\dfrac{3x}{x-4}, \quad x_1=5, \; x_2=4$

3.19. $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-1}, \quad x_1=1, \; x_2=2$

3.20. $f(x)=2^{\frac{3}{x+2}}+1, \quad x_1=-2, \; x_2=-1$

3.21. $f(x)=4^{\frac{3}{x-2}}+2, \quad x_1=2, \; x_2=3$

4.22. $f(x)=3^{\frac{2}{x+1}}-2, \quad x_1=-1, \; x_2=0$

3.23. $f(x)=5^{\frac{3}{x+4}}+1, \quad x_1=-5,\ x_2=-4$

3.24. $f(x)=\dfrac{x-4}{x+2}, \quad x_1=-2,\ x_2=-1$

3.25. $f(x)=\dfrac{x-4}{x+3}, \quad x_1=-3,\ x_2=-2$

3.26. $f(x)=\dfrac{x+5}{x-3}, \quad x_1=3,\ x_2=4$

3.27. $f(x)=3^{\frac{4}{1-x}}+1, \quad x_1=1,\ x_2=2$

3.28. $f(x)=\dfrac{4x}{x+5}, \quad x_1=-5,\ x_2=-4$

3.29. $f(x)=6^{\frac{2}{4-x}}, \quad x_1=3,\ x_2=4$

3.30. $f(x)=\dfrac{x+1}{x-2}, \quad x_1=2,\ x_2=3$

Контрольные вопросы

1.Какие величины называют бесконечно малыми одного порядка малости?

2. Какие величины называют эквивалентными бесконечно малыми ?

3. Какая функция называется непрерывной в точке?

4.Сколько известно вам точек разрыва функции, какие?

Практическая работа № 5 по теме
Тема «Нахождение производной сложной функции »

Цель: научиться находить производные элементарных и сложных функций.

Время выполнения 90 минут

Материальное обеспечение

1.Теоретические сведения

2.Задание

3.Лист А 4

4.Калькуляторы

Порядок выполнения работы

1.Изучить задание

2. Изучить теоретические сведения
3. Выполнить и оформить работу
4.Показать результаты преподавателю

Домашнее задание

1.Подготовить ответы на контрольные вопросы

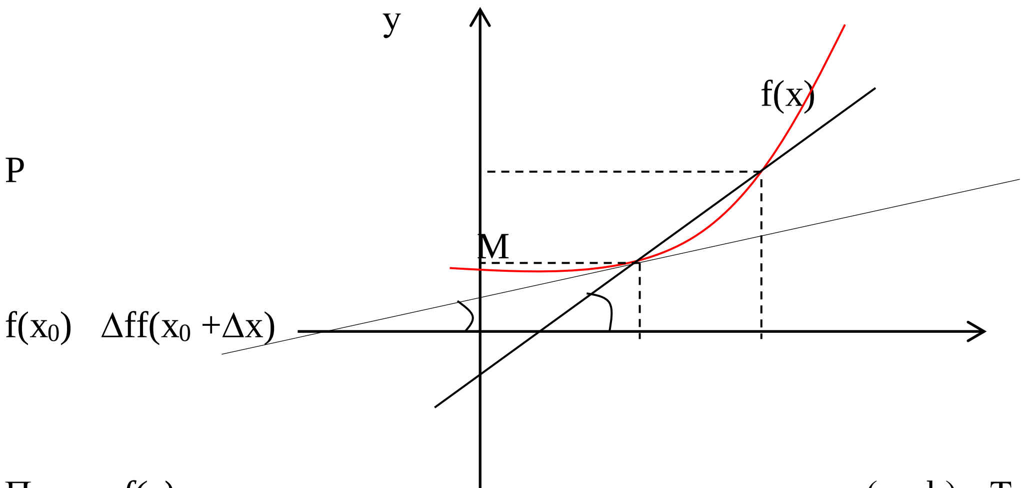
Ход работы

Краткие теоретические сведения.

Производная функции, ее геометрический и физический смысл.

<u>Определение.</u>Производной функции *f(x)* в точке $x = x_0$ называется предел отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента, если он существует.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$



Пусть *f(x)* определена на некотором промежутке (a, b). Тогда $tg\beta = \frac{\Delta f}{\Delta x}$ – тангенс угла наклона секущей MP к графику функции.

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0) = tg\alpha$=к – **геометрический смысл производной**

где α - угол наклона касательной к графику функции *f(x)* в точке (x_0, $f(x_0)$).

К –угловой коэффициент касательной.

Угол между кривыми может быть определен как угол между касательными, проведенными к этим кривым в какой- либо точке.

Уравнение касательной к кривой $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

Уравнение нормали к кривой $y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$.

Фактически производная функции показывает как изменяется функция при изменении переменной.**Физический смысл производной функции**f(t), где t- время, а f(t)- закон движения (изменения координат) – ***мгновенная скорость движения.***Соответственно, вторая производная функции- скорость изменения скорости, т.е. ***ускорение.Основные правила дифференцирования.***

Обозначим $f(x) = u$, $g(x) = v$- функции, дифференцируемые в точке x.

1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$

2) $(u \cdot v)' = u \cdot v' + u' \cdot v$

3) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$, если $v \neq 0$

Производные основных элементарных функций.

1) $C' = 0$;

2) $(x^m)' = mx^{m-1}$;

3) $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

4) $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

5) $\left(e^x\right)' = e^x$

6) $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$

7) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

8) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$

9) $(\sin x)' = \cos x$

10) $(\cos x)' = -\sin x$

11) $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

12) $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

13) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

14) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

15) $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$

16) $(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Производная сложной функции.

Пусть $y = f(x)$; $u = g(x)$, причем область значений функции ***u*** *входит в область определения функции**f**.*

Тогда $y' = f'(u) \cdot u'$

Логарифмическое дифференцирование.

Рассмотрим функцию $y = \ln|x| = \begin{cases} \ln x, & при \quad x > 0 \\ \ln(-x), & при \quad x < 0 \end{cases}$.

Тогда $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$, т.к. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$; $(\ln(-x))' = \frac{(-x)'}{x} = \frac{1}{x}$.

Учитывая полученный результат, можно записать $\left(\ln|f(x)|\right)' = \frac{f'(x)}{f(x)}$.

Отношение $\frac{f'(x)}{f(x)}$ называется **логарифмической производной** функции f(x).

Способ **логарифмического дифференцирования** состоит в том, что сначала находят логарифмическую производную функции, а затем производную самой функции по формуле

$$\boxed{f'(x) = (\ln|f(x)|)' \cdot f(x)}$$

Способ логарифмического дифференцирования удобно применять для нахождения производных сложных, особенно показательных функций, для которых непосредственное вычисление производной с использованием правил дифференцирования представляется трудоемким.

Производная показательно- степенной функции. Функция называется показательной, если независимая переменная входит в показатель степени, и степенной, если переменная является основанием. Если же и основание и показатель степени зависят от переменной, то такая функция будет показательно – степенной.

Пусть u = f(x) (f(x)>0)и v = g(x) – функции, имеющие производные в точке x.

Найдем производную функции $y = u^v$. Логарифмируя, получим:

lny = vlnu

$$\frac{y'}{y} = v' \ln u + v\frac{u'}{u}$$

$$y' = u^v\left(v\frac{u'}{u} + v' \ln u\right)$$

$$\left(u^v\right)' = vu^{v-1}u' + u^v v' \ln u$$

Пример. Найти производную функции $f(x)=(x^2+3x)^{x\cos x}$.

По полученной выше формуле получаем: $u=x^2+3x;\qquad v=x\cos x;$

Производные этих функций: $u'=2x+3;\quad v'=\cos x - x\sin x;$

Окончательно:

$$f'(x)=x\cos x\cdot(x^2+3x)^{x\cos x-1}\cdot(2x+3)+(x^2+3x)^{x\cos x}(\cos x-x\sin x)\ln(x^2+3x)$$

Пример. Найти производную функции $y=\cos x\sin x+\frac{1}{2}\cos^2 x$.Сначала преобразуем данную функцию: $y=\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\cos^2 x$

$y'=\frac{1}{2}2\cos 2x+\frac{1}{2}2\cos x(-\sin x)=\cos 2x-\sin x\cos x.$ **Пример.** Найти производную функции $y=\frac{x^2e^{x^2}}{x^2+1}$.

$$y'=\frac{(2xe^{x^2}+x^2 2xe^{x^2})(x^2+1)-(2x)x^2e^{x^2}}{(x^2+1)^2}=\frac{2x^3e^{x^2}+2x^5e^{x^2}+2xe^{x^2}+2x^3e^{x^2}-2x^3e^{x^2}}{(x^2+1)^2}=$$

$$=\frac{2xe^{x^2}(x^4+1+x^2)}{(x^2+1)^2}$$

Задание 1.Наити производные функций

В1 У=x^5-5x^2+11, У=x^2ctgx

Y=$\frac{arctgx}{x}$, Y=$\sqrt[3]{x^3+5}$

Y=$e^{-x^2}lnx$, Y=$(cosx-1)^{2x}$

В2 У=2x^3-x^2+1, У=x^5tgx

Y=$\frac{artgx}{4x}$, Y=$\sqrt[3]{x^2-3}$

Y=$ln\frac{x}{x+1}$, Y=$(sinx-2)^{3x}$

В3 У=7x^3+3x^2-2, У=xarctgx

Y=$\frac{x+5}{lnx}$, Y=$\frac{1}{(2x+11)^5}$

Y=$sin^3(4x^2+\frac{x}{2}-1)$

В16 У=x^5-5x^2+1, У=x^2ctgx

Y=$\frac{arctgx}{x}$, Y=$\sqrt[3]{x^3+5}$

Y=$e^{-x^2}lnx$, Y=$(x-1)^{2x}$

В17 У=2x^3-x^2+17, У=x^5tgx

Y=$\frac{artgx}{4x}$, Y=$\sqrt[3]{x^2-3}$

Y=$ln\frac{x}{x+1}$, Y=$(lnx+8)^{2x}$

В18 У=7x^3+3x^2-2, У=xarctgx

Y=$\frac{x+5}{lnx}$, Y=$\frac{1}{(2x+11)^5}$

Y=$sin^3(4x^2+\frac{x}{2}-1)$

Y=$(5x+4)^{4x}$

B4 У=-3x^3+5x^4-81, У=2xsinx

Y=$\frac{x}{sinx}$,Y=$\sqrt[4]{x^2-3}$

Y=$cos\frac{x}{x+1}$,Y=$(tgx-3)^{3x}$

B5 У=7x^6-3x^2+32 У=$x^3arcsinx$

Y=$\frac{2}{(3-6x)^6}$, Y=$\frac{cosx}{3x}$

Y=$\ln(x-x^2-6)$

Y=$(cosx+4)^x$

B6 У=-x^5+3x^3-11, У=3x^2ctgx

Y=$\frac{arccosx}{3x}$. Y=$\sqrt[5]{x^2-3}$

Y=$e^{3x^2}ln2x$

Y=$(7x+6)^{2x}$

B7 У=3x^4-6x^2+19, У=x^3sinx

Y=$\frac{tgx}{3x}$, Y=$\sqrt[3]{2x^3-6}$

Y=$e^{-x^2}lnx$, Y=$(3x+1)^{9x}$

B8 У=-4X^6+9X^2-12, У=x^3tgx

Y=$\frac{arcctgx}{6x}$, Y=$\sqrt[3]{3x+6}$

Y=$2^{-x^2}lnx$, Y=$(sinx-4)^x$

B9 У=5x^4-2x^3+65,У=x^2arcsinx

Y=$\frac{5}{(6x-4)^3}$, Y=$\sqrt[5]{x^2-5}$

Y=$3^{2x^2}ln$,Y=$(cosx+1)^{2x}$

B10 У=-2x^6-3x^2+19, У=x^2ctgx

Y=$(lnx-2)^{2x}$

B19У=-3x^3+5x^4-81, У=2xsinx

Y=$\frac{x}{sinx}$, Y=$\sqrt[4]{x^2-3}$

Y=$cos\frac{x}{x+1}$, Y=$(lnx+9)^{5x}$

B20 У=7x^6-3x^2+3,У=$x^3arcsinx$

Y=$\frac{2}{(3-6x)^6}$,Y=$\frac{cosx}{3x}$

Y=$\ln(x-x^2-6)$

Y=$(tgx+2)^x$

B21 У=-x^5+3x^3-11,У=3x^2ctgx

Y=$\frac{arccosx}{3x}$, Y=$\sqrt[5]{x^2-3}$

Y=$e^{3x^2}ln2x$

Y=$(tgx-6)^{2x}$

B22 У=3x^4-6x^2+1, У=x^3sinx

Y=$\frac{tgx}{3x}$, Y=$\sqrt[3]{2x^3-6}$

Y=$e^{-x^2}lnx$,Y=$(tgx+3)^{5x}$

B23 У=-4X^6+9X^2-12,У=x^3tgx

Y=$\frac{arcctgx}{6x}$, Y=$\sqrt[3]{3x+6}$

Y=$2^{-x^2}lnx$, Y=$(cosx+3)^{6x}$

B24 У=5x^4-2x^3+65, У=x^2arcsinx

Y=$\frac{5}{(6x-4)^3}$, Y=$\sqrt[5]{x^2-5}$

Y=$3^{2x^2}lnx$, Y=$(sinx+2)^{8x}$

B25 У=-2x^6-3x^2+1, У=x^2ctgx

Y=$\frac{arctgx}{x}$,Y=$\sqrt[3]{x^3+5}$

Y=$e^{2x^2}lnx$,Y=$(3x-1)^x$

В11 У=8x^4-6X^5+1,У=2x^{3}arccosx

Y=$\frac{tgx}{5x}$, Y=$\frac{9}{(6x-5)^4}$

Y=$4^{-x^2}lnx$, Y=$(9x+3)^{4x}$

В12 У=3X^2+11x^3-87,У=3x^{3}ctgx

Y=$\frac{cosx}{2x}$, Y=$\frac{-3}{(4x+9)^5}$

Y=$5^{6x^2}lnx$, Y=$(cosx-2)^{3x}$

В13 У=x^5+9X^2-51, У=x^{2}arcsinx

Y=$\frac{x}{cosx}$,Y=$\sqrt[4]{8x^3-3}$

Y=$e^{2x^2}lnx$, Y=$(8x-2)^x$

В14 У=3x^7-9X^3+11, У=5x^{3}tgx

Y=$\frac{2x}{arcsinx}$, Y=$\sqrt[5]{2x^4-6}$

Y=$e^{3x^3}lnx$, Y=$(tgx-3)^{2x}$

В15 У=x^5-8X^2+16, У=4x^{2}ctgx

Y=$\frac{actgx}{3x}$, Y=$\frac{9}{(2x-15)^6}$

Y=$6^{2x^2}lnx$, Y=$(lnx+2)^{6x}$

Y=$\frac{arctgx}{x}$, Y=$\sqrt[3]{x^3+5}$

Y=$e^{2x^2}lnx$, Y=$(sinx-1)^{3x}$

В26 У=8x^4-6X^5+1, У=2x^{3}arccosx

Y=$\frac{tgx}{5x}$, Y=$\frac{9}{(6x-5)^4}$

Y=$4^{-x^2}lnx$, Y=$(sinx+5)^{4x}$

В27 У=3X^2+11x^3-87, У=3x^{3}ctgx

Y=$\frac{cosx}{2x}$, Y=$\frac{-3}{(4x+9)^5}$

Y=$5^{6x^2}lnx$,Y=$(sinx-2)^{2x}$

В28 У=x^5+9X^2-51, У=x^{2}arcsinx

Y=$\frac{x}{cosx}$, Y=$\sqrt[4]{8x^3-3}$

Y=$e^{2x^2}lnx$,Y=$(cosx+6)^{6x}$

В29 У=3x^7-9X^3+11, У=5x^{3}tgx

Y=$\frac{2x}{arcsinx}$, Y=$\sqrt[5]{2x^4-6}$

Y=$e^{3x^3}lnx$, Y=$(sinx+2)^{3x}$

В30 У=x^5-8X^2+16, У=4x^{2}ctgx

Y=$\frac{actgx}{3x}$, Y=$\frac{9}{(2x-15)^6}$

Y=$6^{2x^2}lnx$,Y=$(sinx-6)^{6x}$

2.Найти производные функции.

а – порядковый номер в журнале

1. $y = a\,x^a - \frac{a}{x^a} + \sqrt[a]{x^{a+6}} - ax + a$ 2. $y = \sqrt[2a]{(ax^2-3ax+5)^3} - \frac{a}{(x+a)^{a-4}}$

3. $y = tg^a(x+a)\cdot \arccos ax^2$ 4. $y = \arcsin^a ax \cdot \log_a(x-a)$

5. $y = a^{-x^4} \cdot ctg\, ax^3$ 6. $y = ctg^2 ax \cdot arctg\sqrt{x^a}$

7. $y = \dfrac{\sqrt{ax^2 - 3ax + 5a}}{e^{-x^6}}$ 8. $y = \dfrac{\lg(ax^2 - 2ax + 3a)}{arcctg^2 ax}$

Контрольные вопросы

1.Сформулировть определение производной, правила дифференцирования.

2.Знать таблицу производных элементарных функций.

3.Сформулировать правило нахождения производной сложной функции.

Практическая работа № 7 по теме«Исследования функции и построение графика»

Цель: научиться исследовать функцию и по результатам исследования строить график.

Время выполнения 90 минут

Материальное обеспечение
1.Теоретические сведения
2.Задание
3.Лист А 4
4.Калькуляторы
Порядок выполнения работы
1.Изучить задание
2. Изучить теоретические сведения
3. Выполнить и оформить работу
4.Показать результаты преподавателю
Домашнее задание
1.Подготовить ответы на контрольные вопросы
Теоретические сведения.

Схема исследования функций

1) Область существования функции.

Это понятие включает в себя и область значений и область определения функции.

2) Точки разрыва. (Если они имеются).
3) Интервалы возрастания и убывания.
4) Точки максимума и минимума.
5) Максимальное и минимальное значение функции на ее области определения.

6) Области выпуклости и вогнутости.
7) Точки перегиба.(Если они имеются).
8) Асимптоты.(Если они имеются).
9) Построение графика.

Пример. Исследовать функцию $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$ и построить ее график.

Находим область существования функции. Очевидно, что *областью определения* функции является область (-∞; -1) ∪ (-1; 1) ∪ (1; ∞).

В свою очередь, видно, что прямые x = 1, x = -1 являются *вертикальными асимптотами* кривой.

Областью значений данной функции является интервал (-∞; ∞).

Точками разрыва функции являются точки x = 1, x = -1.

Находим *критические точки*.

Найдем производную функции $y' = \frac{3x^2(x^2-1) - 2x \cdot x^3}{(x^2-1)^2} = \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2}$

Критические точки: x = 0; x = $-\sqrt{3}$; x = $\sqrt{3}$; x = -1; x = 1.

Находим промежутки *возрастания* и *убывания* функции. Для этого определяем знаки производной функции на промежутках.

$-\infty < x < -\sqrt{3}$, $y' > 0$, функция возрастает $-\sqrt{3} < x < -1$, $y' < 0$, функция убывает

$-1 < x < 0$, $y' < 0$, функция убывает $0 < x < 1$, $y' < 0$, функция убывает

$1 < x < \sqrt{3}$, $y' < 0$, функция убывает $\sqrt{3} < x < \infty$, $y' > 0$, функция возрастает

Видно, что точка x = $-\sqrt{3}$ является точкой *максимума*, а точка x = $\sqrt{3}$ является точкой *минимума*. Значения функции в этих точках равны соответственно $3\sqrt{3}/2$ и $-3\sqrt{3}/2$.

Найдем вторую производную функции

$$y'' = \frac{(4x^3-6x)(x^2-1)^2 - (x^4-3x^2)4x(x^2-1)}{(x^2-1)^4} = \frac{(4x^3-6x)(x^4-2x^2+1) - (x^4-3x^2)(4x^3-4x)}{(x^2-1)^4} =$$

$$= \frac{4x^7 - 8x^5 + 4x^3 - 6x^5 + 12x^3 - 6x - 4x^7 + 4x^5 + 12x^5 - 12x^3}{(x^2-1)^4} =$$

$$= \frac{2x^5 + 4x^3 - 6x}{(x^2-1)^4} = \frac{2x(x^4 + 2x^2 - 3)}{(x^2-1)^4} = \frac{2x(x^2+3)(x^2-1)}{(x^2-1)^4} = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}.$$

Определим выпуклость и вогнутость кривой на промежутках.

$-\infty < x < -\sqrt{3}$, $y'' < 0$, кривая выпуклая $-\sqrt{3} < x < -1$, $y'' < 0$, кривая выпуклая

$-1 < x < 0$, $y'' > 0$, кривая вогнутая $0 < x < 1$, $y'' < 0$, кривая выпуклая

$1 < x < \sqrt{3}$, $y'' > 0$, кривая вогнутая $\sqrt{3} < x < \infty$, $y'' > 0$, кривая вогнутая

Находим промежутки *возрастания* и *убывания* функции. Для этого определяем знаки производной функции на промежутках.

-∞<x< -$\sqrt{3}$, y′> 0, функция возрастает -$\sqrt{3}$ <x< -1, y′< 0, функция убывает
-1 <x< 0, y′< 0, функция убывает 0 <x< 1, y′< 0, функция убывает
1 <x< $\sqrt{3}$, y′< 0, функция убывает $\sqrt{3}$ <x<∞, y′> 0, функция возрастает
Видно, что точка x = -$\sqrt{3}$ является точкой *максимума*, а точка x = $\sqrt{3}$ является точкой *минимума*. Значения функции в этих точках равны соответственно 3$\sqrt{3}$/2 и -3$\sqrt{3}$/2.

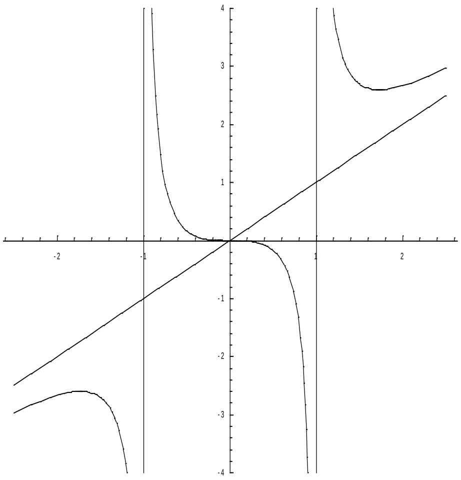
Про вертикальные *асимптоты* было уже сказано выше. Теперь найдем *наклонные асимптоты*. $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x^2}} = 1;$

$$b = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-1} - x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3 - x^3 + x}{x^2-1}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2-1} = \lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{1}{x^2}} = 0$$

Итого, уравнение наклонной асимптоты – y = x.

Строим *график* функции:



Задание 1.Исследовать функцию по предложенной схеме и построить ее график:

1. Найти область определения функции.

2. Исследовать на четность и нечетность.

3. Исследовать на периодичность.

4. Найти стационарные и критические точки первого рода.

5. Найти промежутки возрастания и убывания функции, экстремум.

6. Найти стационарные и критические точки второго рода.

7. Найти промежутки выпуклости функции, точки перегиба.

8. Найти асимптоты (вертикальные, горизонтальные, наклонные).

9. Найти точки пересечения графика функции с осями координат.

10. Найти дополнительные точки.

11. По результатам исследования построить график функции.

В1. а) $y = x^2(2-x)^2$; б) $y = \frac{x^2-2x-8}{x+1}$

В2. а) $y = x\sqrt{1-x}$; б) $y = \frac{x^2+2x-8}{x+3}$

В3. а) y = x - arctgx ; б) $y = \frac{x^2-3x-10}{x-1}$

В4. а) $y = \frac{8}{4-x^2}$; б) $y = \frac{x^2+3x-10}{x+3}$

В5. а) $y = \sqrt{\frac{1-x}{x}}$; б) $y = \frac{x^2-4x-12}{x+3}$

В6. а) $y = \frac{x^2}{1+x^2}$; б) $y = \frac{x^2+4x-12}{x-3}$

В16. а) $y = x^3 - 12x^2 - 9x + 1$;

б) $y = \frac{x^2}{x^2+1}$

В17. а) $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x - 1$; б) $y = \frac{x^2}{x-2}$

В18. а) $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + \frac{1}{3}$; б) $y = \frac{x^2}{x^2-3}$

В19. а) $y = -x^3 + 3x^2 + 9x$;

б) $y = \frac{x^2-1}{3x+5}$

В20. а) $y = x^5 - 20x$; б) $y = 1 - \frac{4}{x^2}$

В21. а) $y = x^3 + 15x^2 - x - 250$ б) $y = \frac{x^2-1}{x}$

B7. а) $y = \frac{x}{x^2+16}$; б) $y = \frac{x^2-x-20}{x+2}$

B8. а) $y = e^{\frac{x^2}{4}}$; б) $y = \frac{x^2+x-20}{x-2}$

B9. а) $y = \frac{x}{x+1}$; б) $y = \frac{x^2-2x-15}{x+4}$

B10. а) $y = 2x-x^2$; б) $y = \frac{x^2+2x-15}{x-1}$

B11. а) $y = x^3 - 3x^2 + 4$; б) $y = \frac{5-2x}{x^2-4}$

B12. а) $y = -x^3 + 3x^2 - 2$; б) $y = \frac{x^2}{x^2-1}$

B13. а) $y = x^3 - 12x + 6$; б) $y = \frac{x}{x^2+4}$

B14. а) $y = x^3 + 9x^2 + 24x + 12$

б) $y = \frac{x^2}{6x^{\square} + 18}$

B15. а) $y = -x^3 + 3x^2 - 2$; б) $y = \frac{x^3}{x^2-1}$

B22. а) $y = \sqrt[3]{x+2}$; б) $y = \frac{x}{x^2+9}$

B23. а) $y = x^2-4x$; б) $y = 3x + \frac{3}{x} + 5$

B24. а) $y = 3x-x^3$; б) $y = \frac{x^2-2x-8}{x+1}$

B25. а) $y = 2/3x^3-2x=1$; б) $y = -\frac{x}{x^2+9}$

B26. а) $y = 2x^2-x^4$; б) $y = \frac{1-x^2}{x}$

B27. а) $y = 2x^2-8$; б) $y = \frac{x}{x^2-1}$

B28. а) $y = x^4-8x^2+3$; б) $y = \frac{1}{x^2-1}$

B29. а) $y = \frac{3}{4-x^2}$; б) $y = \frac{x^2+3x-10}{x+3}$

B30. а) $y = x\sqrt{4-x}$; б) $y = \frac{x^2-2x-8}{x+3}$

Контрольные вопросы:

1.Что такое область определения функции?
2.Какие функции называются четными , нечетными, общего вида?
3.Виды точек разрыва.
4.Что такое нули функции?
5.Как определить промежутки выпуклости?
6.Виды асимптот.

Тема «Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера и методом Гаусса»

Цель:научиться вычислять определители второго и третьего порядка

Материальное обеспечение
1.Теоретические сведения
2.Задание
3.Лист А 4
4.Калькуляторы
Порядок выполнения работы
1.Изучить задание
2. Изучить теоретические сведения
3. Выполнить и оформить работу
4.Показать результаты преподавателю
Домашнее задание
1.Подготовить ответы на контрольные вопросы
Ход работы
Теоретические сведения

Практическая работа № 8 по теме

Тема «Вычисление первообразной и определенных интегралов. Физическое и геометрическое приложение интегралов»

Цель: проверить умение вычисления определенных интегралов, нахождение площадей.

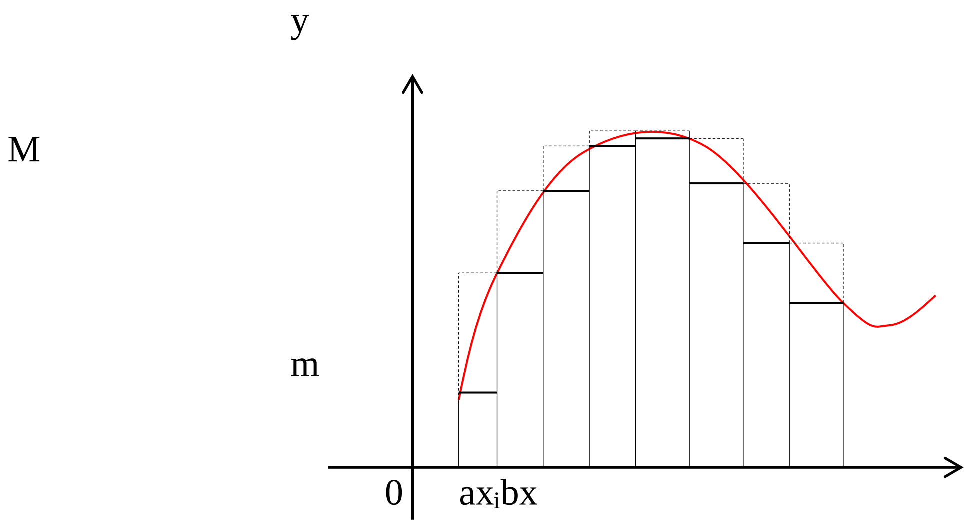
Время выполнения 90 минут

Материальное обеспечение
1.Теоретические сведения
2.Задание
3.Лист А 4
4.Калькуляторы
Порядок выполнения работы
1.Изучить задание
2. Изучить теоретические сведения
3. Выполнить и оформить работу
4.Показать результаты преподавателю
Домашнее задание
1.Подготовить ответы на контрольные вопросы

Теоретические сведения

Определенный интеграл.

Пусть на отрезке [a, b] задана непрерывная функция f(x).



Обозначим m и M наименьшее и наибольшее значение функции на отрезке [a, b]

Разобьем отрезок [a, b] на части (не обязательно одинаковые) n точками.

$$x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$$

Тогда $x_1 - x_0 = \Delta x_1$, $x_2 - x_1 = \Delta x_2$, … ,$x_n - x_{n-1} = \Delta x_n$;

На каждом из полученных отрезков найдем наименьшее и наибольшее значение функции.

$[x_0, x_1] \to m_1, M_1$; $[x_1, x_2] \to m_2, M_2$; … $[x_{n-1}, x_n] \to m_n, M_n$.

Составим суммы:

$$\underline{S}_n = m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2 + \ldots + m_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$$

$$\overline{S}_n = M_1\Delta x_1 + M_2\Delta x_2 + \ldots + M_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

Сумма $\underline{S}$ называется **нижней интегральной суммой**, а сумма $\overline{S}$ – **верхней интегральной суммой**.

Т.к. $m_i \le M_i$, то $\underline{S}_n \le \overline{S}_n$, а $m(b - a) \le \underline{S}_n \le \overline{S}_n \le M(b - a)$

Внутри каждого отрезка выберем некоторую точку ε.

$$x_0 < \varepsilon_1 < x_1, \quad x_1 < \varepsilon < x_2, \quad \ldots \quad , x_{n-1} < \varepsilon < x_n.$$

Найдем значения функции в этих точках и составим выражение, которое называется **интегральной суммой** для функции f(x) на отрезке [a, b].

$$S_n = f(\varepsilon_1)\Delta x_1 + f(\varepsilon_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\varepsilon_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i$$

Тогда можно записать: $m_i\Delta x_i \le f(\varepsilon_i)\Delta x_i \le M_i\Delta x_i$

Следовательно, $\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i$

$$\underline{S_n} \le S_n \le \overline{S_n}$$

Геометрически это представляется следующим образом: график функции f(x) ограничен сверху описанной ломаной линией, а снизу – вписанной ломаной.

Обозначим $max\Delta x_i$ – наибольший отрезок разбиения, а $min\Delta x_i$ – наименьший. Если $max\Delta x_i \to 0$, то число отрезков разбиения отрезка [a, b] стремится к бесконечности.

Если $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i$, то $\lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i = S.$

<u>**Определение:**</u> Если при любых разбиениях отрезка [a, b] таких, что $max\Delta x_i \to 0$ и произвольном выборе точек ε_i интегральная сумма $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i$ стремится к пределу S, который называется определенным интегралом от f(x) на отрезке [a, b].

Обозначение : $\int\limits_a^b f(x)dx.$

a – нижний предел, b – верхний предел, x – переменная интегрирования, [a, b] – отрезок интегрирования.

<u>**Определение:**</u> Если для функции f(x) существует предел $\lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i = \int\limits_a^b f(x)dx$, то функция называется **интегрируемой** на отрезке [a, b].

Также верны утверждения: $\lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i = \int\limits_a^b f(x)dx$

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$

Теорема: Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b], то она интегрируема на этом отрезке.

Свойства определенного интеграла.

1) $\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx;$

2) $\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx$

3) $\int_a^a f(x)dx = 0$

4) Если f(x) ≤φ(x) на отрезке [a, b] a<b, то $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b \varphi(x)dx$

5) Для произвольных чисел a, b, c справедливо равенство:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Разумеется, это равенство выполняется, если существует каждый из входящих в него интегралов.

6) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

Вычисление определенного интеграла.

Пусть в интеграле $\int_a^b f(x)dx$ нижний предел a = const, а верхний предел b изменяется. Очевидно, что если изменяется верхний предел, то изменяется и значение интеграла.

Обозначим $\int_a^x f(t)dt$ = Φ(x). Найдем производную функции Φ(x) по переменному верхнему пределу x.

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

Аналогичную теорему можно доказать для случая переменного нижнего предела.

Теорема: Для всякой функции f(x), непрерывной на отрезке [a, b], существует на этом отрезке первообразная, а значит, существует неопределенный интеграл.

Теорема: (Теорема Ньютона – Лейбница)

Если функция F(x) – какая- либо первообразная от непрерывной функции f(x), то

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

это выражение известно под названием формулы Ньютона – Лейбница.

Иногда применяют обозначение $F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$.

Формула Ньютона – Лейбница представляет собой общий подход к нахождению определенных интегралов.

Что касается приемов вычисления определенных интегралов, то они практически ничем не отличаются от всех тех приемов и методов, которые были рассмотрены выше при нахождении неопределенных интегралов.

Точно так же применяются методы подстановки (замены переменной), метод интегрирования по частям, те же приемы нахождения первообразных для тригонометрических, иррациональных и трансцендентных функций. Особенностью является только то, что при применении этих приемов надо распространять преобразование не только на подынтегральную функцию, но и на пределы интегрирования. Заменяя переменную интегрирования, не забыть изменить соответственно пределы интегрирования.

Замена переменных.

Пусть задан интеграл $\int_a^b f(x)dx$, где f(x) – непрерывная функция на отрезке [a, b].

Введем новую переменную в соответствии с формулой $x = \varphi(t)$.

Тогда если

1) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$
2) $\varphi(t)$ и $\varphi'(t)$ непрерывны на отрезке $[\alpha, \beta]$
3) $f(\varphi(t))$ определена на отрезке $[\alpha, \beta]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

Тогда $\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = F[\varphi(t)]\Big|_\alpha^\beta = F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] = F(b) - F(a)$

<u>Пример.</u>

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \left\{\begin{array}{l} x = \sin t; \\ \alpha = 0; \beta = \pi/2 \end{array}\right\} = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2t)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\sin\pi = \frac{\pi}{4}.$$

При замене переменной в определенном интеграле следует помнить о том, что вводимая функция (в рассмотренном примере это функция sin) должна быть непрерывна на отрезке интегрирования. В противном случае формальное применение формулы приводит к абсурду.

Пример.

$\int\limits_0^{\pi} dx = x \Big|_0^{\pi} = \pi$, с другой стороны, если применить тригонометрическую подстановку,

$$\int\limits_0^{\pi} dx = \int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{\cos^2 x(1 + tg^2 x)} = \{tgx = t\} = \int\limits_0^0 \frac{dt}{1 + t^2} = 0$$

Т.е. два способа нахождения интеграла дают различные результаты. Это произошло из-за того, что не был учтен тот факт, что введенная переменная tgx имеет на отрезке интегрирования разрыв (в точке x = π/2). Поэтому в данном случае такая подстановка неприменима. При замене переменной в определенном интеграле следует внимательно следить за выполнением перечисленных выше условий.

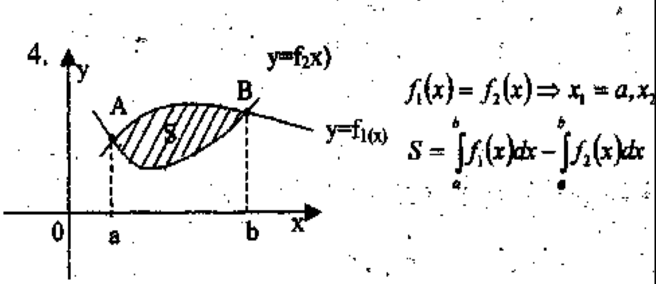
Интегрирование по частям.

Если функции u = φ(x) и v = ψ(x) непрерывны на отрезке [a, b], а также непрерывны на этом отрезке их производные, то справедлива формула интегрирования по частям:

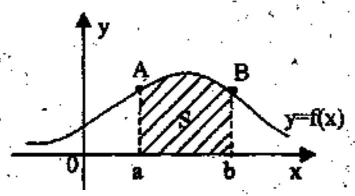
$$\int\limits_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu.$$

Вывод этой формулы абсолютно аналогичен выводу формулы интегрирования по частям для неопределенного интеграла, который был весьма подробно рассмотрен выше, поэтому здесь приводить его нет смысла.

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной кривой *y=f(x)*, двумя прямыми *x=a* и *x=b* и осью абсцисс, вычисляется с помощью определенного интеграла по формулам:



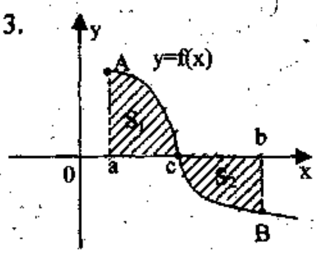
1.



$$S=\int_a^b f(x)dx$$

21

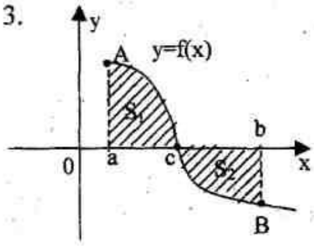
3.



$f(x)=0 \Rightarrow x=c$

$$S=S_1+S_2=\int_a^c f(x)dx+\left|\int_c^b f(x)d\right.$$

3.

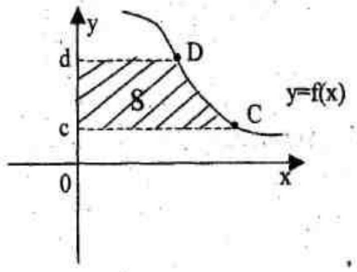


$f(x)=0 \Rightarrow x=c$

$$S=S_1+S_2=\int_a^c f(x)dx+\left|\int_c^b f(x)dx\right|$$

5.

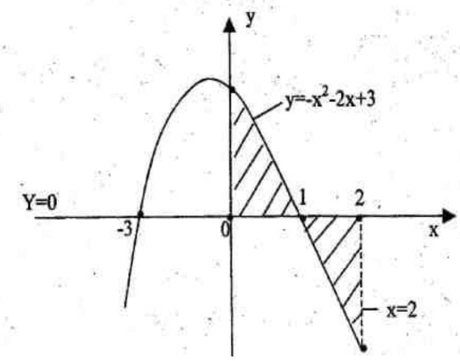
$y=f(x) \Rightarrow x=\varphi(y$



$$S=\int_c^d \varphi(y)dy$$

Пример 4: Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=-x^2-2x+3$, осями координат и прямой *x=2*.

Решение: Построимданные линии



Найдем точки пересечения графика функции с осью Ох: $y=-x^2-2x+3$,

$-x^2-2x+3=0$, $x_1=1,\ x_2=-3$

$$S=\int_0^1(-x^2-2x+3)dx-\int_1^2(-x^2-2x+3)dx=\left.\left(-\frac{x^3}{3}-x^2+3x\right)\right|_0^1+\left.\left(-\frac{x^3}{3}-x^2+3x\right)\right|_1^2=$$

$$=-\frac{1}{3}-1+3-\left(-\frac{8}{3}-4+6\right)+\left(-\frac{1}{3}-1+3\right)=\frac{5}{3}+\frac{2}{3}+\frac{5}{3}=\frac{12}{3}=4(кв.ед.)$$

Задания практической работыВычислить определенный интеграл

1.

1. $a)\int_1^2\left(3x^2-2x\right)dx$ $b)\int_{\Pi}^{2\Pi}\frac{\cos x}{6}dx$

2. $a)\int_{-2}^1\left(x^2-x\right)dx$ $b)\int_{-\Pi/6}^{\Pi/6}\frac{6dx}{cos^2 2x}$

3. $a)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}3\cos x dx$ $b)\int_0^2(1-\frac{x}{2})^4 dx$

4. $a)\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{3}{\cos^2 x}dx$ $b)\int_{-1}^4(1+\frac{x}{2})^8 dx$

5. $a)\int_1^2\left(4x^3+2x\right)dx$ $b)\int_0^{\Pi}\frac{3dx}{\cos^2(\frac{x}{2}-\frac{\Pi}{3})}$

11. $a)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{3}{\cos^2\frac{1}{2}x}dx$ $b)\int_2^3(1-x)^4 dx$

12. $a)\int_0^{\frac{3}{2}\pi}\cos\frac{1}{3}xdx$ $b)\int_{-1}^4(1+\frac{x}{2})^8 dx$

13. $a)\int_2^3\left(3x^2-2x\right)dx$ $b)\int_{-\Pi/2}^{\Pi/2}3\sin xdx$

14. $a)\int_0^{\pi}\left(3\sin\frac{1}{2}x\right)dx$ $b)\int_1^0(1-2x)^4 dx$

15. $a)\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(36\cos 2x\right)dx$ $b)\int_{-2}^3\frac{2dx}{(3-x^2)}dx$

21. $a)\int_1^2\left(4x^3-3x^2\right)dx$ $b)\int_0^4\frac{dx}{\sqrt{x+3}}$

22. $a)\int_0^{\frac{\pi}{9}}\left(2\cos 3x\right)dx$ $b)\int_0^2(1-\frac{x}{2})^4 dx$

23. $a)\int_0^{\frac{\pi}{12}}\left(108\sin 6x\right)dx$ $b)\int_{-1}^1(7-5x)dx$

24. $a)\int_0^{\frac{\pi}{8}}\frac{4}{\cos^2 2x}dx$ $b)\int_{-2}^1(4x^3+6x)dx$

25. $a)\int_1^2\left(5x^4-6x^2\right)dx$ $b)\int_1^9\sqrt{8x-5}dx$

6. $a)\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}(4\cos 2x)dx$

$b)\int_{1}^{5}\sqrt{9x-1}dx$

16. $a)\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\cos x dx$

$b)\int_{2}^{3}(1-2x)^4 dx$

26. $a)\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{5}{\sin^2 x}dx$

$b)\int_{-2}^{0}(x^5-3x^2)$

7. $a)\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(6\sin 2x)dx$

$b)\int_{1}^{2}(3-2x)^4 dx$

17. $a)\int_{0}^{\frac{\pi}{8}}\frac{36}{\cos^2 2x}dx$

$b)\int_{2}^{3}(3-x^2)dx$

27. $a)\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}(2\sin x)dx$

$b)\int_{1}^{2}(\frac{x^2}{2}-\frac{2}{x^3})dx$

8. $a)\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\frac{5}{\cos^2 x}dx$

$b)\int_{-3}^{1}\frac{dx}{5-3x}$

18. $a)\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(2\sin x)dx$

$b)\int_{0}^{4}(x^2+1)dx$

28. $a)\int_{1}^{3}(3x^2+4x^3)dx$

$b)\int_{\Pi/4}^{\Pi/8}\frac{\cos 4x}{2}dx$

9. $a)\int_{0}^{2}(x^3-x^2+3)dx$

$b)\int_{1}^{2}e^{2x+3}dx$

19. $a)\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\sin x dx$

$b)\int_{2}^{3}(7-2x)^4 dx$

29. $a)\int_{2}^{3}(2x^3-2x)dx$

$b)\int_{0}^{\Pi/6}\frac{4dx}{\cos^2 2x}$

10. $a)\int_{1}^{2}(x^4-x^3+2)dx$

$b)\int_{0}^{1}5^{4-3x}dx$

20. $a)\int_{0}^{2}(x^3-x)dx$

$b)\int_{0}^{\Pi/3}3\sin 3x dx$

30. $a)\int_{\frac{\pi}{18}}^{\frac{\pi}{6}}(2\sin 3x)dx$

$b)\int_{0}^{1}\frac{dx}{x^2+4}$

2.

1. $\int_{0}^{\sqrt{3}}x\sqrt[3]{1+x^2dx}$

11. $\int_{0}^{1}x^3\sqrt{4+5x^4}dx$

21. $\int_{1}^{2}\frac{e^{1/x}}{x^2}dx$

2. $\int_{0}^{1/2}\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$

12. $\int_{1}^{e}\frac{1+\ln x}{x}dx$

22. $\int_{1}^{\sqrt{2}}\frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}}$

3. $\int_{1}^{e}\frac{\ln^2 x}{x}dx$

13. $\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{2-4x}}$

23. $\int_{0}^{1}\frac{x^3dx}{\sqrt{16x^4+1}}$

4. $\int_{-\infty}^{0}\frac{xdx}{\sqrt{(x^2+4)^3}}$

14. $\int_{1/3}^{1}\frac{\ln(3x-1)}{3x-1}dx$

24. $\int_{0}^{1}\frac{x^2dx}{\sqrt[3]{(x^3+8)^4}}$

5. $\int_{0}^{1}\frac{xdx}{\sqrt[4]{(16+x^2)^5}}$

15. $\int_{0}^{2/3}\frac{\sqrt[3]{\ln(2-3x)}}{2-3x}dx$

25. $\int_{0}^{\pi/6}\frac{\cos 3x}{\sqrt[6]{(1-\sin 3x)^5}}dx$

6. $\int\limits_{3/4}^{1} \frac{dx}{\sqrt[5]{3-4x}}$

7. $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^4dx}{\sqrt[3]{1-x^5}}$

8. $\int\limits_{0}^{4} \frac{10xdx}{\sqrt[4]{(16-x^2)^3}}$

9. $\int\limits_{0}^{2} \frac{x^3dx}{\sqrt{(x^4+4)}}$

10. $\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$

16. $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin xdx}{\sqrt[7]{\cos^2 x}}$

17. $\int\limits_{1/2}^{1} \frac{dx}{\sqrt[9]{1-2x}}$

18. $\int\limits_{0}^{1/4} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-4x}}$

19. $\int\limits_{1}^{e} \frac{1+\ln x}{x}dx$

20. $\int\limits_{1}^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$

26. $\int\limits_{-3/4}^{0} \frac{dx}{\sqrt{4x+3}}$

27. $\int\limits_{1}^{5} \frac{x^2dx}{\sqrt{31(x^3-1)}}$

28. $\int\limits_{0}^{1/2} \frac{dx}{(2x-1)^2}$

29. $\int\limits_{0}^{1} x^3\sqrt{4+5x^4}dx$

30. $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin xdx}{\sqrt[7]{\cos^2 x}}$

3.

1. $\int\limits_{0}^{1} \frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1}dx$

2. $\int\limits_{2}^{3} \frac{2x^4-5x^2+3}{x^2-1}dx$

3. $\int\limits_{2}^{3} \frac{x+2}{x^2(x-1)}dx$

4. $\int\limits_{2}^{3} \frac{dx}{x^2(x-1)}$

5. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{y^5dy}{y+2}$

6. $\int\limits_{2}^{3} \frac{3x^2+2x-3}{x^3-x}dx$

7. $\int\limits_{1/3}^{1/2} \frac{xdx}{(x-1)^3}$

8. $\int\limits_{4}^{5} \frac{dx}{(x-1)(x+2)}$

9. $\int\limits_{3}^{4} \frac{dx}{(x+1)(x-2)}$

10. $\int\limits_{0}^{1} \frac{(2x+3)dx}{(x-3)^3}$

11. $\int\limits_{2}^{3} \frac{dx}{(x-1)^2(x+1)}$

12. $\int\limits_{3}^{5} \frac{(x^2+2)dx}{(x^2+1)(x-1)}$

13. $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^4+3x^3-1}{(x+1)^2}dx$

14. $\int\limits_{0}^{1} \frac{xdx}{x^2+3x+2}$

15. $\int\limits_{8}^{10} \frac{(x^2+3)dx}{x^3-x^2-6x}$

16. $\int\limits_{1}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^4+x^2}$

17. $\int\limits_{2}^{3} \frac{x^7dx}{1-x^4}$

18. $\int\limits_{2}^{3} \frac{dx}{x^4-1}$

19. $\int\limits_{-1}^{0} \frac{xdx}{x^3-1}$

20. $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}/3} \frac{2x^2+4}{x^3-x^2+x+1}dx$

21. $\int\limits_{4}^{5} \frac{dx}{x^2(x-1)}$

22. $\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{(x+1)(x^2+4)}$

23. $\int\limits_{7}^{9} \frac{x^2-x+2}{x^4-5x^2+4}dx$

24. $\int\limits_{4}^{6} \frac{xdx}{x^3-6x^2+16-6}$

25. $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{x^3+1}$

26. $\int\limits_{1}^{\sqrt{3}} \frac{x^5+1}{x^6+x^4}dx$

27. $\int\limits_{2}^{3} \frac{x^3+x^2+2}{x(x^2-1)^2}dx$

28. $\int\limits_{3}^{5} \frac{x^3-2x^2+4}{x^3(x-2)^2}dx$

29. $\int\limits_{0}^{1/\sqrt{3}} \frac{x^2dx}{x^4-1}$

30. $\int\limits_{-1}^{0} \frac{x^5-2x^2+3}{(x-2)^2}dx$

4.

1.1

$a)\int_{0}^{\sqrt{3}} x\sqrt[3]{1+x^2dx}$

$b)\int_{0}^{2}(2-x)^2dx$

1.2

$a)\int_{1}^{3}\frac{dx}{\sqrt[3]{(3-x)^3}}$

$b)\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos xdx}{(3-\sin x)^2}$

1.3

$a)\int_{-1/3}^{0}\frac{dx}{\sqrt[3]{1+3x}}$

$b)\int_{1}^{2}\frac{(2x^2+1)dx}{x}$

1.4

$a)\int_{3/4}^{1}\frac{dx}{\sqrt[5]{3-4x}}$

$b)\int_{1}^{2}\frac{xdx}{(2x^2+4)^4}$

1.5

$a)\int_{0}^{1}\frac{x^4dx}{\sqrt[3]{1-x^5}}$

$b)\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{Cosxdx}{(5-\sin x)^2}$

1.6

$a)\int_{3/4}^{4/3}\frac{dx}{x^2+1}$

$b)\int_{0}^{\sqrt{3}} x\sqrt[5]{1+x^2}dx$

1.7

$a)\int_{0}^{-3}\frac{dx}{\sqrt{25+3x}}$

$b)\int_{0}^{\pi/6}\frac{\cos 3x}{\sqrt[6]{(1-\sin 3x)^5}}dx$

1.8

$a)\int_{0}^{2}\frac{x^3dx}{\sqrt{x^4+4}}$

$b)\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}3\cos 2xdx$

1.11

$a)\int_{-1}^{2}\frac{6x^2dx}{(x^3-5)^2}$

$b)\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{2}\cos xdx$

1.12

$a)\int_{0}^{1}\frac{x^3dx}{\sqrt{16x^4+1}}$

$b)\int_{0}^{\sqrt{3}} x\sqrt{25-3x^2}dx$

1.13

$a)\int_{0}^{1}x^3\sqrt{4+5x^4}dx$

$b)\int_{1}^{2}\frac{(x-1)dx}{x^3}$

1.14

$a)\int_{0}^{3}6x^3(3x^4-1)^2dx$

$b)\int_{0}^{1}\frac{x^2dx}{\sqrt[3]{8-7x^3}}$

1.15

$a)\int_{0}^{1}(2x^3+1)^4x^2dx$

$b)\int_{0}^{2}\frac{x^2dx}{\sqrt[3]{9+2x^3}}$

1.16

$a)\int_{0}^{1/2}\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$

$b)\int_{4}^{9}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}dx$

1.17

$a)\int_{0}^{1}(e^x-1)^4e^xdx$

$b)\int_{0}^{1/4}\frac{dx}{\sqrt[3]{1-4x}}$

1.18

$a)\int_{-3/4}^{0}\frac{dx}{\sqrt{4x+3}}$

$b)\int_{0}^{4}\frac{10xdx}{\sqrt[4]{(16-x^2)^3}}$

1.21

$a)\int_{2\sqrt{2}}^{4}3x\sqrt{x^2-7}dx$

$b)\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}2\sin xdx$

1.22

$a)\int_{1/2}^{1}\frac{dx}{\sqrt[9]{1-2x}}$

$b)\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos xdx}{(8-7\sin x)^2}$

1.23

$a)\int_{1}^{\sqrt{2}}\frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}}$

$b)\int_{1}^{e^{e^3}}\frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$

1.24

$a)\int_{-1}^{0}\frac{dx}{4x^2-9}$

$b)\int_{1}^{3}\sqrt{(2x+1)^3}dx$

1.25

$a)\int_{0}^{1/4}\frac{dx}{\sqrt[3]{1-4x}}$

$b)\int_{4}^{5}(4-x)^3dx$

1.26

$a)\int_{0}^{1/2}\frac{dx}{(2x-1)^2}$

$b)\int_{1}^{e}\frac{5\ln^2 x}{x}dx$

1.27

$a)\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{4-3x}}$

$b)\int_{0}^{1}(x^3-4)dx$

1.28

$a)\int_{3}^{8}\sqrt{x+1}dx$

$b)\int_{0}^{2}\frac{xdx}{(x^2-1)^3}$

1.9 $a)\int_1^e \frac{3\ln^2 x}{x}dx$ $b)\int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt[5]{8-7x^3}}$

1.19 $a)\int_0^1 \left(4x^3+1\right)^5 x^2dx$ $b)\int_0^1 x^2e^{x^3+1}dx$

1.29 $a)\int_0^4 \frac{10xdx}{\sqrt[4]{(16-x^2)^3}}$ $b)\int_{\frac{2\pi}{9}}^{\frac{\pi}{3}} \sin\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)$

1.10 $a)\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{2-4x}}$ $b)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos xdx}{(8-\sin x)^2}$

1.20 $a)\int_0^{\pi/6} \frac{\cos 3x}{\sqrt[6]{(1-\sin 3x)^5}}dx$ $b)\int_1^{\sqrt{3}} \frac{32xdx}{\left(x^2+1\right)^5}$

1.30 $a)\int_1^5 \frac{x^2dx}{\sqrt{31(x^3-1)}}$ $b)\int_0^1 e^{x^2}xdx$

5.

2.1	$\int_2^3 x\ln(x-1)dx$	$\int_1^{e^2} \sqrt{x}\ln xdx$	$\int_2^3 (3-x)e^xdx$
2.2	$\int_{-2}^0 x^2e^{-x/2}dx$	$\int_0^1 arctg\sqrt{x}dx$	$\int_{1/2}^1 \arcsin(1-x)dx$
2.3	$\int_0^{\pi/2} x\cos xdx$	$\int_0^{\pi} (x+2)\cos\frac{x}{2}dx$	$\int_1^{\sqrt{3}} arctg\frac{1}{x}dx$
2.4	$\int_0^{\pi/2} x^2\sin xdx$	$\int_0^{\pi/8} x^2\sin 4xdx$	$\int_{-1}^0 x\ln(1-x)dx$
2.5	$\int_{-1/2}^{1/2} \arccos 2xdx$	$\int_1^2 x^2\ln xdx$	$\int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{\sin x}\cos xdx$
2.6	$\int_1^2 (x-1)\ln xdx$	$\int_1^e (x+1)\ln xdx$	$\int_{-1}^0 (2x+3)e^{-x}dx$
2.7	$\int_{-1/2}^0 xe^{-2x}dx$	$\int_{3/2}^2 arctg(2x-3)dx$	$\int_{-1}^0 (x+1)e^{-2x}dx$
2.8	$\int_1^2 xe^xdx$	$\int_0^{\pi/2} (x+3)\sin xdx$	$\int_{-1/2}^{1/2} \arccos 2xdx$
2.9	$\int_{-1/3}^{-2/3} \frac{x}{e^{3x}}dx$	$\int_0^{\ln 2} xe^{-x}dx$	$\int_0^1 xarctgxdx$
2.10	$\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x^2}dx$	$\int_{-3}^0 (x-2)e^{-x/3}dx$	$\int_1^2 \ln(3x+2)dx$

Задания практической работыНайти площадь фигуры, ограниченной данными линиями

Задание 1

1,11,21. $y=8x-x^2-7$ и осью ох

2,12,22. $y = x^3 - 1$, y = 0, x = 0

3,13,23. $y = x^2 - 3x - 4$ и осью ОХ

4,14,24. $y^2 = 4x$ и $x^2 = 4y$

5,15,25. $y = 5x - x^2 + 6$ и осью ОХ

6,16,26. $y = x^3$, $y = x^2$, x = −1, x = 0

7,17,27. $y = x^2 - 6x + 8$ и осью ОХ

8,18,28. $y = x^2$ и $y = x + 2$

9,19,29 $y = x^2 - 4x - 5$ и осью ОХ

10,20,30. *y = 6x−3x² и осью OX*

Задание 2

1,11,21. $y = x^2 + 2$ и $y = 2x + 2$ 2,12,22.y = x^2 и $y = 2 - x^2$
3,13,23. $xy = 6$ и $y + x - 7 = 0$ 4,14,24. $y = 2^x$, $y = 2x - x^2$, x = 0, x=1
5,15,25. $y = \ln x$, x =e , y =0 6,16,26. $y = \frac{4}{x^2}$, x =1, y = x – 17,17,27.
$y = x^2 + x$, $y = 1 - x^2$, x = 0 , x = 1 8,18,28. $y = x^3$, x = 2 9,19,29.
$y = \cos x$, x = 0, x = 2π, y = 010,20,30.y = $\sqrt{x}$, y = 2, x = 0 Задание 3

1,11,21.x − y + 3=0, x + y −1= 0, y = 0

2,12,22.2x − 3y + 6 = 0, y =0 и x = 3

3,13,23. $y = x^2 - 2x + 3$ и y = 3x −1

4,14,24. x − y +2 = 0, y =0, x = −1, x = 2

5,15,25. y^2 = 4x, x = 1 и осью ОХ

6,16,36. $y = x^2$ и y = −3x

7,17,37. x − y +3 =0 , x + y −1= 0, y = 0

8,18,28. x^2 = 3y и y = x

9,19,29. x − y -2=0, x + y +1= 0, y = 0

10,20,30. y^2 = 9x, x = 3 и осью ОХ

Контрольные вопросы

1.Что называют определенным интегралом функции $f(x)$?
2.В чем состоит геометрический смысл определенного интеграла?
3.Сформулируйте необходимое условие интегрируемости функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$.
4.Сформулируйте необходимое и достаточное условия интегрируемости функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.
5.Запишите свойства определенного интеграла.
6Запишите формулу Ньютона-Лейбница.
7Расскажите об основных методах интегрирования определенного интеграла.
8.Что такое криволинейная трапеция?
9.Формула Ньютона-Лейбница
10.Графики элементарных функций.
11. Различные виды плоских фигур и способы вычисления их площадей.

Практическая работа 9 по теме
«Нахождение частных производных. Полный дифференциал»

Цель: проверить умение находить и строить область определения сложной функции, находить частные производные.

Время выполнения 90 минут

Материальное обеспечение
1.Теоретические сведения
2.Задание
3.Лист А 4
4.Калькуляторы
Порядок выполнения работы
1.Изучить задание
2. Изучить теоретические сведения
3. Выполнить и оформить работу
4.Показать результаты преподавателю
Домашнее задание
1.Подготовить ответы на контрольные вопросы
Теоретические сведения
Ход работы
Определение функции двух переменных

Если каждой паре (x;y) значений двух независимых друг от друга переменных величин x и y из некоторого множества D соответствует единственное значение величины, то говорят, что z есть функция двух независимых переменных x и y, определенная на множестве D. Обозначается: z=f(x;y) или z=z(x;y).

Например, S=ab, S=S(a;b)- функции двух переменных; V=abc, V=V(a,b.c) – функция трех переменных;

Способы задания функций нескольких переменных

Чтобы задать функцию двух (трех) переменных, нужно указать способ, с помощью которого для каждой пары (тройки) значений аргументов можно найти соответствующее значение функции. Наиболее часто функция задается аналитически - это явное задание функции или неявное задание

Частные производные первого порядка

Пусть функция двух переменных z = f(x, y) определена в некоторой окрестности точки M(x, y) евклидова пространства E2. Частная производная функции z = f(x, y) по аргументу x является обыкновенной производной функции одной переменной x при фиксированном значении переменной y и обозначается как

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}, \quad z'_x, \quad f'_x.$$

Аналогичным образом определяется частная производная функции f(x, y) по переменной y в точке M, обозначаемая как

$$\frac{\partial z}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad z'_y, \quad f'_y.$$

Функция, имеющая частные производные, называется дифференцируемой.

Совершенно аналогично определяются частные производные функций трех и более переменных. Частная производная функции нескольких переменных характеризует скорость ее изменения по данной координате при фиксированных значениях других координат.

Пример: $z = 2x^2y^3 + 3x + 5y - 7$ – функция двух переменных.

Иногда используют запись $f(x;y) = 2x^2y^3 + 3x + 5y - 7$. Также встречаются задания, где вместо буквы z используется буква u.

Найти частные производные первого и второго порядка функции $z = 2x^2y^3 + 3x^4 + 5y - 7$

Сначала найдем частные производные первого порядка. Их две.

Обозначения:

z'_x или $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ – частная производная по «икс»

z'_y или $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ – частная производная по «игрек»

Начнем с z'_x. **Когда мы находим частную производную по «икс», то переменная y считается константой (постоянным числом)**.

$$z'_x \overset{(1)}{=} (2x^2y^3 + 3x^4 + 5y - 7)'_x \overset{(2)}{=} 2y^3(x^2)'_x + 3(x^4)'_x + (5y)'_x - (7)'_x \overset{(3)}{=}$$
$$= 2y^3 \cdot 2x + 3 \cdot 4x^3 + 0 - 0 \overset{(4)}{=} 4xy^3 + 12x^3$$

Комментарии к выполненным действиям:

(1) Первое, что мы делаем при нахождении частной производной – заключаем **всю** функцию в скобки под штрих **с подстрочным индексом**.

(2) Используем правила дифференцирования $(u \pm v)' = u' \pm v'$, $(Cu)' = Cu'$. Для простого примера, как этот, оба правила вполне можно применить на одном шаге. Обратите внимание на первое слагаемое: так как y **считается константой, а любую константу можно вынести за знак производной**, то y^3 мы выносим за скобки. То есть в данной ситуации y^3 ничем не лучше обычного числа. Теперь посмотрим на третье слагаемое $5y$: здесь, наоборот, выносить нечего. Так как y константа, то $5y$ – тоже константа, и в этом смысле она ничем не лучше последнего слагаемого – «семерки».

(3) Используем табличные производные $(C)' = 0$ и $(x^n)' = nx^{n-1}$.

(4) Теперь z'_y. **Когда мы находим частную производную по «игрек», то переменная x считается константой (постоянным числом)**.

$$z'_y = (2x^2y^3 + 3x^4 + 5y - 7)'_y \overset{(1)}{=} 2x^2(y^3)'_y + (3x^4)'_y + 5(y)'_y - (7)'_y \overset{(2)}{=}$$
$$= 2x^2 \cdot 3y^2 + 0 + 5 \cdot 1 - 0 = 6x^2y^2 + 5$$

(1) Используем те же правила дифференцирования $(u \pm v)' = u' \pm v'$, $(Cu)' = Cu'$. В первом слагаемом выносим константу x^2 за знак производной, во втором слагаемом ничего вынести нельзя поскольку $3x^4$ – уже константа.

(2) Используем таблицу производным элементарных функций. **Мысленно поменяем в таблице все «иксы» на «игреки».** В

частности, используемые нами формулы выглядят так: $(C)' = 0$ и $(y^n)' = ny^{n-1}$
Итак, частные производные первого порядка найдены

Подведем итог, чем же отличается нахождение частных производных от нахождения «обычных» производных функции одной переменной:

1) Когда мы находим частную производную z'_x, переменная y считается константой.

2) Когда мы находим частную производную z'_y, переменная x считается константой.

3) Правила и таблица производных элементарных функций справедливы и применимы для любой переменной (x, y либо какой-нибудь другой), по которой ведется дифференцирование.

Шаг второй. Находим частные производные второго порядка. Их четыре.

Обозначения:

z''_{xx} или $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ – вторая производная по «икс»

z''_{yy} или $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ – вторая производная по «игрек»

z''_{xy} или $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ – *смешанная* производная «икс по игрек»

z''_{yx} или $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ – *смешанная* производная «игрек по икс»

В понятии второй производной нет ничего сложного. Говоря простым языком, **вторая производная – это производная от первой производной**.

Частные производные первого порядка:

$z'_x = 4xy^3 + 12x^3$

$z'_y = 6x^2y^2 + 5$

Сначала найдем смешанные производные:

$z''_{xy} = (z'_x)'_y = (4xy^3 + 12x^3)'_y = 4x(y^3)'_y + (12x^3)'_y = 4x \cdot 3y^2 + 0 = 12xy^2$

Как видите, всё просто: берем частную производную z'_x и дифференцируем ее еще раз, но в данном случае – уже по «игрек».

Аналогично:

$z''_{yx} = (z'_y)'_x = (6x^2y^2 + 5)'_x = 6y^2(x^2)'_x + (5)'_x = 6y^2 \cdot 2x + 0 = 12xy^2$

В практических примерах можно ориентироваться на следующее равенство:

$z''_{xy} = z''_{yx}$

Таким образом, через смешанные производные второго порядка очень удобно проверить, а правильно ли мы нашли частные производные первого порядка.

Находим вторую производную по «икс».
Никаких изобретений, берем $z'_x = 4xy^3 + 12x^3$ и дифференцируем её по «икс» еще раз:
$$z''_{xx} = (z'_x)'_x = (4xy^3 + 12x^3)'_x = 4y^3(x)'_x + 12(x^3)'_x = 4y^3 \cdot 1 + 12 \cdot 3x^2 = 4y^3 + 36x^2$$

Аналогично:
$$z''_{yy} = (z'_y)'_y = (6x^2y^2 + 5)'_y = 6x^2(y^2)'_y + (5)'_y = 6x^2 \cdot 2y + 0 = 12x^2y$$

Следует отметить, что при нахождении z''_{xx}, z''_{yy} нужно проявить <u>повышенное внимание</u>, так как никаких чудесных равенств для их проверки не существует.

Примеры нахождения частных производных первого порядка.
Пример 1. $z = x^2 - 2xy + 2y^2$.

Решение. Дифференцируем функцию z = f(x, y) сначала по x, полагая y фиксированной величиной, потом повторяем эту же процедуру, меняя роли x и y. Получаем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 2y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 4y - 2x.$$

Пример 2. $z = \operatorname{arctg} xy$, $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{y}{1 + (xy)^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{x}{1 + (xy)^2}$.

Пример 3. $u = ye^{yz} + \ln(x^2 - 2y + z)$.

Решение. Частные производные этой функции трех переменных выражаются следующими формулами:

Находим частные производные второго порядка. Их четыре.

Обозначения:

z''_{xx} или $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ – вторая производная по «икс»

z''_{yy} или $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ – вторая производная по «игрек»

z''_{xy} или $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ – *смешанная* производная «икс по игрек»

z''_{yx} или $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ – *смешанная* производная «игрек по икс»

В понятии второй производной нет ничего сложного. Говоря простым языком, **вторая производная – это производная от первой производной**.

Частные производные первого порядка:

$$z'_x = 4xy^3 + 12x^3$$

$$z'_y = 6x^2y^2 + 5$$

Сначала найдем смешанные производные:

$$z''_{xy} = (z'_x)'_y = (4xy^3 + 12x^3)'_y = 4x(y^3)'_y + (12x^3)'_y = 4x \cdot 3y^2 + 0 = 12xy^2$$

Как видите, всё просто: берем частную производную z'_x и дифференцируем ее еще раз, но в данном случае – уже по «игрек».

Аналогично:

$$z''_{yx} = (z'_y)'_x = (6x^2y^2 + 5)'_x = 6y^2(x^2)'_x + (5)'_x = 6y^2 \cdot 2x + 0 = 12xy^2$$

В практических примерах можно ориентироваться на следующее равенство:

$$z''_{xy} = z''_{yx}$$

Таким образом, через смешанные производные второго порядка очень удобно проверить, а правильно ли мы нашли частные производные первого порядка.

Находим вторую производную по «икс».

Никаких изобретений, берем $z'_x = 4xy^3 + 12x^3$ и дифференцируем её по «икс» еще раз:

$$z''_{xx} = (z'_x)'_x = (4xy^3 + 12x^3)'_x = 4y^3(x)'_x + 12(x^3)'_x = 4y^3 \cdot 1 + 12 \cdot 3x^2 = 4y^3 + 36x^2$$

Аналогично:

$$z''_{yy} = (z'_y)'_y = (6x^2y^2 + 5)'_y = 6x^2(y^2)'_y + (5)'_y = 6x^2 \cdot 2y + 0 = 12x^2y$$

Следует отметить, что при нахождении z''_{xx}, z''_{yy} нужно проявить повышенное внимание, так как никаких чудесных равенств для их проверки не существует.

Алгоритм исследования функции двух переменных на экстремум

Функция $z = f(x,y)$ имеет **максимум** в точке $M_0(x_0;y_0)$, если $f(x_0;y_0) > f(x;y)$ для всех точек $(x;y)$, достаточно близких к точке $(x_0;y_0)$ и отличных от неё.

Функция $z = f(x,y)$ имеет **минимум** в точке $M_0(x_0;y_0)$, если $f(x_0;y_0) < f(x;y)$ для всех точек $(x;y)$, достаточно близких к точке $(x_0;y_0)$ и отличных от неё.

Максимум и минимум функции называются **экстремумами функции**.

Исследование функции двух переменных на экстремум проводят по следующей схеме.

1. Находят частные производные *dz/dx* и *dz/dy*.
2. Решают систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

и таким образом находят критические точки функции.

3. Находят частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

4. Вычисляют значения этих частных производных второго порядка в каждой из найденных в п.2 критических точках $M(x_0;y_0)$.

$$A = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_M, B = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)_M, C = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_M$$

5. Делают вывод о наличии экстремумов:

а) если $AC - B^2 > 0$ и $A < 0$, то в точке M имеется максимум;

б) если $AC - B^2 > 0$ и $A > 0$, то в точке M имеется минимум;

в) если $AC - B^2 < 0$, то экстремума нет;

г) если $AC - B^2 = 0$, то вопрос о наличии экстремума остается открытым;

Примеры исследования функций двух переменных на экстремум.

Пример №1. Исследовать на экстремум функцию

$$z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y.$$

Решение.

1) Найдем частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 15,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 6xy - 12y,$$

2) тогда система для отыскания стационарных точек имеет вид

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 5 = 0 \\ xy - 2 = 0 \end{cases}.$$

Решив систему, получим четыре стационарные точки:

$P_1(1,2)$, $P_2(2,1)$, $P_3(-1,-2)$, $P_4(-2,-1)$. Найдем производные 2-го порядка

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x = A, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6x = B, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6y = C$$

и составим дискриминант $\Delta AB\text{-}C^2$ для каждой стационарной точки.

1) Для точки $P_1(1,2)$ Δ=36-144<0, в $P_1(1,2)$ экстремума нет.
2) Для точки $P_2(-1,-2)$, Δ =144 – 36 >0, A>0, в $P_2(2,1)$функция имеет минимум, z_{min} = -28
3) Для точки $P_3(-1,-2)$, Δ = 36-144 <0, в $P_3(-1,-2)$ экстремума нет.
4) Для точки $P_4(-2,-1)$, Δ=144 – 36 >0, A<0 в $P_4(-2,-1)$ функция имеет максимум z_{max}=28

Пример №2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + 4xy - y^2 - 6x - 2y$ в треугольнике, ограниченном осями координат и прямой $2x + 3y - 6 = 0$.
Решение.
Найдем критические точки локального экстремума внутри указанной области и значения данной функции z = f(x,y) в этих точках. Так как $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 4y - 6$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 4x - 2y - 2$, то система для отыскания критических точек имеет вид

$$\begin{cases} x + 2y - 3 = 0 \\ 2x - y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Точка $P_0(1;1)$ находится внутри области, причем $z(P_0) = -4$. Исследуем функцию z на границе области. На отрезке *OA* имеем : y=0, z = f(x;0) или $g_1(x)=x^2 - 6x$, где $x \in [0;3]$; $g'_1=2x-6$; $g'_1(3)=0$; $g_1(3)=f(3;0)=-9$. На отрезке *OB* имеем: x=0. z=f(0;y) или $z=g_2(y)=-y^2-2y$,
где $y \in [0;2]$; $g'_2(y) = -2y - 2$; $g'_2(-1) = 0$, $-1 \notin [0;2]$. На отрезке AB имеем $y = 2 - \frac{2}{3}x$, $z = f\left(x; 2 - \frac{2}{3}x\right)$ или

$$z = g_3(x) = -\frac{19}{9}x^2 + 6x - 8,$$ где $x \in [0;3]$; $g'_3(x) = -\frac{38}{9}x + 6$;

$$g'_3\left(\frac{27}{19}\right) = 0,$$

$$g_3\left(\frac{27}{19}\right) = f\left(\frac{27}{19}; \frac{20}{19}\right) = -\frac{71}{19}.$$

Найдем значения функции z в точках *O*, *A* и *B*. z(0) = f(0,0) = 0; z(A) = f(3;0) = -9, z(B) = f(0;2) = -8.
Сравнивая значения $f(0;0)$, $f(0;2)$, $f(3;0)$, $f(\frac{27}{19};\frac{20}{19})$, $f(1;1)$, приходим к выводу:
наибольшее значение zmax=0 в т. O(0,0);
наименьшее значение zmin=-9 в т. A(3,0).

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 - 2y + z}, \frac{\partial u}{\partial y} = (1 + yz)e^{yz} - \frac{2}{x^2 - 2y + z},$$
$$\frac{\partial u}{\partial z} = y^2 e^{yz} + \frac{1}{x^2 - 2y + z}.$$

Задания практической работы

1. Найти и построить область определения сложной функции.
2. Вычислить производную сложной функции.

В1 1.$z=\arcsin(1-x^2-y^2)$

2.а) $z=\sqrt{\ln x}\,\frac{y}{x}$, x=e, y=1

б) $u=x^2-y^2+3z^2$, x=1/2,y=1/2,z=1/2

В2 1.z=ln(y-lnx)

2.а) $z=\sqrt{xy}\ln\frac{y}{x}$, x=1, y=2

в)$u=3x^2/2-y^2/2+2z^2$,x=2/3,y=2,z=2/3

В3 1.$z=\sqrt{\ln x+\ln y}$

2.а)$z=x^{y\frac{1}{xy}}$,x=e, y=1

б)$u=x^3/2-y^3/2+8z^3$,x=2,y=2,z=3/2

В4 1.$z=\sqrt{\sqrt{y}-x+2}$

2.а)$z=\sin 1/xe^y$,x=π/2,y=1

б)$u=3/2x^2+3y2-2z^2$, x=2,y=1/3,z=3/2

В5 1.$z=\arcsin\frac{x^2}{y}$

2.а)$z=\mathrm{arcg}(x^2-y^2)+1/\sqrt{xy}$

б)$u=\frac{\sqrt{x}}{y}-\frac{yz}{x+\sqrt{y}}$

В16 1.$z=\ln\frac{x}{y}$

2.а)$z=(x^2+y^2)^{x^2-y^2}$

б)$u=x\sqrt{y}-(z+y)\sqrt{x}$, x=1,y=1,z=-2

В17 1.z=lny-lncosx

2.а)$z= x\sin y+x^2$, x=3,y=π/2

б)$u=\sqrt{xy}-\sqrt{4-z^2}$,x=1,y=1,z=0

В18. 1.$z=\ln\sin x-\sqrt{y}$

2.а)$z=\arcsin\frac{u}{v}-\ln v$, u=0, v=1

б)$u=(x^2+y^2+z^2)^{3/2}$, x=0,y=-3,z=4

В19. 1.$z=\ln(y^2/4-x^2/9-1)$

2.а)$z=\ln\sqrt{x^2+y^2}+1/y$,x=y=$1/\sqrt{2}$

б)$u=2/x+3/2y-\sqrt{6/4z}$,x=2/3,y=3/2,z=1/2

В20. 1.$z=\arcsin\frac{y}{x}$

2.а)$z=\ln y\sqrt{x}$,x=1,y=3/5

б)$u=3/x+4/y-1/\sqrt{6}x$,x=1,y=2,z=$1/\sqrt{6}$

B6 1.z=arcos(2x-y)

2.a)z=arccos$\frac{y}{x}$+$e^{\sqrt{xy}}$, x=2,y=1

б)u=$\sqrt{2}x^2-\frac{3}{\sqrt{2}}-6\sqrt{2}z^2$, x=1,y=2/3,z=1/$\sqrt{6}$

B7 1.Z=$\sqrt{ln(2-x-y)}$,

2.a)z=tg1/x.$e^{\frac{y}{x}}$,x=1/π,y=0

б)u= 2$\sqrt{x+y}$+y.arctgz,x=1,y=1/3,z=1/$\sqrt{6}$

B8 1.z=ln$\frac{x}{y}$

2.a)z=$(x^2+y^2)^{x^2-y^2}$

б)u=x$\sqrt{y}$-(z+y)$\sqrt{x}$, x=1,y=1,z=-2

B9. 1.z=lny-lncosx

2.a)z= xsiny+x^2, x=3,y=π/2

б)u=$\sqrt{xy}-\sqrt{4-z^2}$,x=1,y=1,z=0

B10. 1.z=lnsinx-$\sqrt{y}$

2.a)z=arcsin$\frac{u}{v}$ - lnv, u=0, v=1

б)u=$(x^2+y^2+z^2)^{3/2}$, x=0,y=-3,z=4

B11. 1.z=ln(y^2/4-x^2/9-1)

2.a)z=ln$\sqrt{x^2+y^2}$+1/y,x=y=1/$\sqrt{2}$

б)u=2/x+3/2y-$\sqrt{6/4z}$,x=2/3,y=3/2,z=1/2

B21. 1.z=1+$\sqrt{1-(x-y)^2}$

2.a)z=cos(1/y)-1/$\sqrt{xy}$, x=π/2, y=2/π

б)u=x$\sqrt{y}$-yz^2,x=2,y=1,z=-1

B22. 1.z=ln(x^2+y)

2.a)z=$e^{x^2}\sqrt{x^2-y^2}$, x=1,y=0

б)u=sin$\frac{y}{xz}$, x=2,y=π,z=1

B23. 1.z=$\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}$

2.a)z=yln(x^2-y^2), x=2,y=1

б)u=x^3/16+y^2/9-z^2/8,x=2,y=1/2,z=1/3

B24 1.Z=$\sqrt{ln(2-x-y)}$,

2.a)z=tg1/x.$e^{\frac{y}{x}}$,x=1/π,y=0

б)u= 2$\sqrt{x+y}$+y.arctgz, x=1,y=1/3,z=1/$\sqrt{6}$

B25 1.z=arcos(2x-y)

2.a)z=arccos$\frac{y}{x}$+$e^{\sqrt{xy}}$, x=2,y=1

б)u=$\sqrt{2}x^2-\frac{3}{\sqrt{2}}-6\sqrt{2}z^2$, x=1,y=2/3,z=1/$\sqrt{6}$

B26 1.z=arcsin$\frac{x^2}{y}$

2.a)z=arcg(x^2-y^2)+1/$\sqrt{xy}$

б)u=$\frac{\sqrt{x}}{y}-\frac{yz}{x+\sqrt{y}}$

В12. 1.z=arcsin$\frac{y}{x}$

2.а)z=lny$\sqrt{x}$,x=1,y=3/5

б)u=3/x+4/y-1/$\sqrt{6}$x,x=1,y=2,z=1/$\sqrt{6}$

В13. 1.z=1+$\sqrt{1-(x-y)^2}$

2.а)z=cos(1/y)-1/$\sqrt{xy}$, x=π/2, y=2/π

б)u=x$\sqrt{y}$-yz^2,x=2,y=1,z=-1

В14. 1.z=ln(x^2+y)

2.а)z=$e^{x^2}\sqrt{x^2-y^2}$, x=1,y=0

б)u=sin$\frac{y}{xz}$, x=2,y=π,z=1

В15. 1.z=$\sqrt{1-x^2}$+$\sqrt{1-y^2}$

2.z=yln(x^2-y^2), x=2,y=1

u=x^3/16+y^2/9-z^2/8,x=2,y=1/2,z=1/3

В271.z=$\sqrt{\sqrt{y}-x+2}$

2.а)z=sin1/xe^y,x=π/2,y=1

б)u=3/2x^2+3y2-2z^2, x=2,y=1/3,z=3/2

В28 1.z=$\sqrt{lnx+lny}$

2.а)z=x$^y\frac{1}{xy}$,x=e, y=1

б)u=x^3/2-y^3/2+8z^3,x=2,y=2,z=3/2

В2 9.z=ln(y-lnx)

2.а) z=$\sqrt{xy}$ln$\frac{y}{x}$, x=1, y=2

в)u=3x^2/2-y^2/2+2z^2,x=2/3,y=2,z=2/3

В30 1.z=arcsin(1-x^2-y^2)

2.а) z=$\sqrt{lnx}\,\frac{y}{x}$, x=e, y=1

б) u=x^2-y^2+3z^2,x=1/2,y=1/2,z=1/2

Задание 1.Найти частные производные второго порядка

В1z=x^{2}y^2-4x-5y

В2 z=y^2-x^2+xy-2x-6y

В3 z=xy(1-x-y)

В4 z=y$\sqrt{x}$-y^2-x+6y

В16z=x^3-y^3-3xy

В17z=0,5xy+(47-x-y)(x/3+y/4**)**

В18. Z=x^2+y^2+xy-3x-6y

В19. z=xy^2(1-x-y)

B5 $z=e^{x/2}(x+y^2)$

B6 $z=x^3-y^3-3xy$

B7 $z=0{,}5xy+(47-x-y)(x/3+y/4)$

B8 $z=x^2+y^2+xy-3x-6y$

B9 $z=xy^2(1-x-y)$

B10 $z=x^3+y^3-15xy$

B11 $z=x^2+y^2+xy-4x-5y$

B12 $z=y^2-x^2+xy-2x-6y$

B13 $z=xy(1-x-y)$

B14 $z=y\sqrt{x}-y^2-y+6y$

B15 $z=e^{x/2}(x+y^2)$

B20. $z=x^3+y^3-15xy$

B21. $z=3-2x^2-xy-y^2$

B22. $z=y^2-xy-2$

B23. $z=x^2+2xy-y^2+4x$

B24 $z=2x^2+2xy-y^2/2-4x$

B25 $z=x^2+xy-2$

B26. $z=y^2-2xy-x^2+4y+1$

B27. $z=1-2xy+2x^2$

B28. $z=4x+2y+4x^2+y^2+6$

B29 $z=x^2+2xy-10$

B30. $z=x^2+2xy-y^2-4x$

Задание 2.Исследовать заданную функцию на экстремум

B1. $z=12+2xy-x^2$

B2. $z=5x^2-3xy+y^2+4$

B3. $z=4x^2+9y^2-4x-6y+3$

B4. $z=x^2-2xy-y^2+4x+1$

B5. $z=y^2+2xy-x^2-4y$

B6. $z=x^2+3y^2+x-y$

B7. $z=x^2y$

B8. $z=4-2x^2-y^2$

B9. $z=x^2/2-xy$

B16. $z=x^2+2xy-10$

B17. $z=4x+2y+4x^2+y^2+6$

B18. $z=1-2xy+2x^2$

B19. $z=x^2+2xy-y^2+2x+2y$

B20. $z=y^2-2xy-x^2+4y+1$

B21. $z=x^2+xy-2$

B22. $z=2x^2+2xy-y^2/2-4x$

B23. $z=x^2+2xy-y^2+4x$

B24. $z=3-2x^2-xy-y^2$

B10. $z=1+xy^2$

B11. $z=4-2y^2+x^2$

B12. $z=y^2+2xy-x^2-4y$

B13. $z=x^2-xy$

B14. $z=xy(4-x-y)$

B15. $z=x^2+2xy-y^2-4x$

B25. $z=y^2-xy-2$

B26. $z=x^2+y^2+xy-4x-5y$

B27. $z=y^2-x^2+xy-2x-6y$

B28. $z=x^2+y^2+xy-3x-6y$

B29. $z=x^3-y^3-3xy$

B30. $z= x^3+y^3-15xy$

Контрольные вопросы:

1.Сформулировать определение функции с двумя переменными.
2.Что называется областью определения функции нескольких переменных?
3.Сформулировать правило нахождения производной функции нескольких переменных.
4.Что такое полный дифференциал функции нескольких переменных**?**
5.Сформулировать алгоритм нахождения экстремума функции нескольких переменных

Практическая работа № 10 по теме

Тема «Вычисление двойных интегралов»

Цель: проверить умение вычислять двойные интегралы в декартовых координатах

Время выполнения 90 минут

Материальное обеспечение
1.Теоретические сведения
2.Задание
3.Лист А 4
4.Калькуляторы

Порядок выполнения работы
1.Изучить задание
2. Изучить теоретические сведения
3. Выполнить и оформить работу
4.Показать результаты преподавателю

Домашнее задание

1.Подготовить ответы на контрольные вопросы

Теоретический материал

Пусть в некоторой ограниченной замкнутой области D плоскости xOy задана непрерывная функция $z = f(P)$, где точка $P \in D$. Разобьем эту область произвольным образом на n частичных плоских ячеек $S_1, S_2, ..., S_n$, имеющие площади $\Delta S_1, \Delta S_2, ..., \Delta S_n$. В каждой такой ячейке выберем по одной произвольной точке $P_1, P_2, ..., P_n$ и вычислим значения функции $f(P)$ во взятых точках. Составим так называемую *интегральную сумму* функции $f(P)$ по области D:

$$\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta S_i = f(P_1)\Delta S_1 + f(P_2)\Delta S_2 + ... + f(P_n)\Delta S_n . \qquad (1)$$

Двойным интегралом от функции $f(P)$ по области D называется предел интегральной суммы (1) при стремлении к нулю наибольшего из диаметров всех ячеек данного разбиения:

$$\iint_D f(P)dS = \lim_{\max d(S_i)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta S_i \qquad (2)$$

Основные свойства двойного интеграла

1. Двойной интеграл по области D от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме двойных интегралов от слагаемых функций по этой же области:
$$\iint_D [f_1(P) \pm f_2(P)]dS = \iint_D f_1(P)dS \pm \iint_D f_2(P)dS .$$

2. Постоянный множитель k можно вынести за знак двойного интеграла:
$$\iint_D k \cdot f(P)dS = k \cdot \iint_D f(P)dS .$$

3. Область интегрирования двойного интеграла можно разбить на части, то есть если область D состоит из двух непересекающихся областей D_1 и D_2, то
$$\iint_D f(P)dS = \iint_{D_1} f(P)dS + \iint_{D_2} f(P)dS .$$

Примеры

Задание 1: Вычислить повторный интеграл $\int\limits_1^3 dx \int\limits_2^{x^2+4} \frac{1}{x^2} dy$.

Решение: Вычислим сначала внутренний интеграл по переменной y, считая x постоянным:

$$\int\limits_1^3 dx \int\limits_2^{x^2+4} \frac{1}{x^2} dy = \int\limits_1^3 \left[\int\limits_2^{x^2+4} \frac{1}{x^2} dy \right] dx = \int\limits_1^3 \left[\frac{1}{x^2} \int\limits_2^{x^2+4} dy \right] dx =$$

$$= \int\limits_1^3 \left[\frac{1}{x^2} [y]_2^{x^2+4} \right] dx = \int\limits_1^3 \left[\frac{1}{x^2} \left(x^2 + 4 - 2\right) \right] dx =$$

$$= \int\limits_1^3 \left(1 + 2x^{-2}\right) dx = \left[x - \frac{2}{x} \right]_1^3 = \left(3 - \frac{2}{3}\right) - (1 - 2) = 3\frac{1}{3}.$$

Задание 2: Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D (x+y) dxdy$ по области D, ограниченной прямыми $x = 2$, $x = 6$, $y = 1$ и $y = 4$.

Решение: Область D является простой относительно осей Ox и Oy (рис. 1), поэтому для вычисления интеграла можно использовать любую из формул $\iint\limits_D f(x, y) dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x, y) dy$ или $\iint\limits_D f(x, y) dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x, y) dx$. Сначала вычислим двойной интеграл по первой формуле: $\iint\limits_D (x+y) dxdy = \int\limits_2^6 dx \int\limits_1^4 (x+y) dy$. Вычислив внутренний интеграл по переменной y при постоянном x, находим

$\int\limits_1^4 (x+y) dy = \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_1^4 = (4x+8) - \left(x + \frac{1}{2} \right) = 3x + \frac{15}{2}$. Подставив это выражение во внешний интеграл, получим $\int\limits_2^6 \left(3x + \frac{15}{2} \right) dx = \left[\frac{3x^2}{2} + \frac{15}{2} x \right]_2^6 = 78$.

Теперь вычислим двойной интеграл по второй формуле $\iint\limits_D (x+y) dxdy = \int\limits_1^4 dy \int\limits_2^6 (x+y) dx$. Найдем внутренний интеграл:

$\int_2^6 (x+y)dx = \left[\frac{x^2}{2} + xy\right]_2^6 = (18+6y) - (2+2y) = 4y+16$. Далее найдем внешний интеграл: $\int_1^4 (4x+16)dy = \left[2y^2 + 16y\right]_1^4 78$, то есть получили тот же ответ.

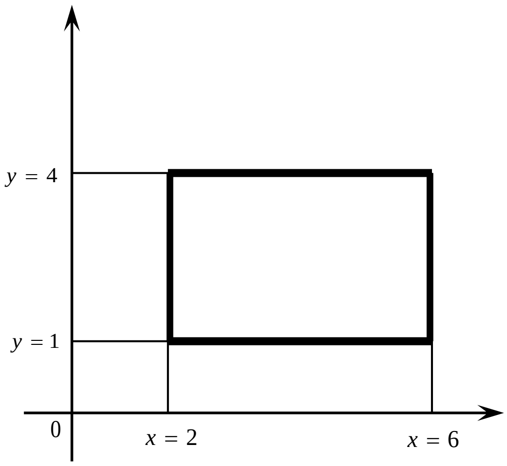


рис. 1

Теоретический сведения

Площадь S плоской области D в прямоугольных координатах вычисляется по формуле

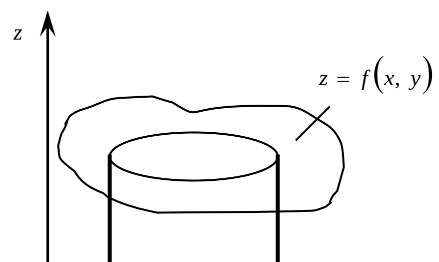
$$S = \iint_D dxdy; \qquad (1)$$

а в полярных координатах – по формуле

$$S = \iint_D rdrd\varphi. \qquad (2)$$

Объем цилиндрического тела, ограниченного сверху поверхностью $z = f(x, y)$, снизу областью $z = 0$ и сбоку прямой цилиндрической поверхностью, вырезающей на плоскости xOy $(z = 0)$ область D (рис. 1), вычисляется по формуле

$$V = \iint_{\geq D} zdxdy \qquad (3)$$



Примеры

Задание: Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z = 2x + 1$, $x = 0$, $y = 4$, $y = x^2$.

Решение: Тело, ограниченное заданными поверхностями, представляет собой вертикальный параболический цилиндр, расположенный в первом октанте. Сверху тело ограничено плоскостью $z = 2x + 1$, сбоку параболическим цилиндром $y = x^2$ и плоскостями $x = 0$ и $y = 4$. Найдем точки пересечения параболы $y = x^2$ и прямой $y = 4$: $\begin{cases} y = x^2 \\ y = 4 \end{cases}$. Таким образом, получим одну точку пересечения $M(2; 4)$.

Значение $x = -2$ не рассматриваем, так как цилиндр расположен в первом октанте. Область D запишем в виде системы неравенств $0 \le x \le 2$ и $x^2 \le y \le 4$.

Согласно формуле (3), получим

$$V = \iint_D z dx dy = \int_0^2 dx \int_{x^2}^4 (2x+1) dy = \int_0^2 [2xy + y]_{x^2}^4 dx = \int_0^2 (8x + 4 - 2x^3 - x^2) dx = 13\frac{1}{3} \text{(куб. ед.)}$$

Задание 1. Вычислить интеграл по области D, ограниченной указанными линиями.

В 1 $\iint y^2 cosxy \, dx \, dy$

D

$D: x = 0, y = \sqrt{\pi/2}$y=x/2

В 2 $\iint 3y^2 sin\frac{xy}{2} dx \, dy$

D

В 16 $\iint y^2 cos\frac{xy}{2} dx \, dy$

D

$D: x = 0, y = \sqrt{\pi/2}$; y=x/2

В17 $\iint (18x^2y^2 + 32x^3y^3) \, dx \, dy$

D

$D: x = 1, y = -\sqrt[3]{x}$;   y=$x^3$

$D: x = 0, y = \sqrt{4\pi/3}$; y=2x/3

B 3 $\iint (3x^2y^2 + 4xy)\, dx\, dy$:

D

$D: x = 1 \quad y = -\sqrt{x}$; y=$x^2$

B 4 $\iint (27x^2y^2 + 12xy)\, dx\, dy$

D

$D: x = 1, y = -\sqrt[3]{x}$; y=$x^2$

B 5 $\iint y^2 sin \frac{xy}{2} dx\, dy$

D

$D: x = 0, y = \sqrt{\pi}$; y=x

B 6 $\iint 4y^2 sin2xy\, dx\, dy$

D

$D: x = 0, y = \sqrt{2\pi}$; y=2x

B 7 $\iint 4y^2 sinxy\, dx\, dy$

D

$D: x = 0, y = \sqrt{\pi/2}$; y=x

B8 $\iint (49x^2y^2 + 28xy)\, dx\, dy$

D

$D: x = 1, y = -\sqrt[3]{x}$; y=$x^2$

B9 $\iint (9x^2y^2 + 48x^3y^3)\, dx\, dy$

D

B18 $\iint (9x^2y^2 + 2xy)\, dx\, dy$

D

D: x = 1; $y = \sqrt{x}$; y=$-x^3$

B 19 $\iint (18x^2y^2 + 8xy)\, dx\, dy$

D

$D: x = 1, y = \sqrt[3]{x}$; y=$-x^2$

B 20 $\iint y^2 e^{-\frac{xy}{4}} dx\, dy$

D

$D: x = 0, y = 4$; y=2x

B 21 $\iint (27x^2y^2 + 12xy)\, dx\, dy$

D

$D: x = 1, y = -\sqrt{x}$; y=x^3

B 22 $\iint (9x^2y^2 + 8xy)\, dx\, dy$

D

$D: x = 1, y = \sqrt[3]{x}$; y=$-x^3$

B 23 $\iint y^2 cosxy\, dx\, dy$

D

$D: x = 0, y = \sqrt{\pi}$; y=x

B 24 $\iint (18x^2y^2 + 32x^3y^3)\, dx\, dy$

D

$D: x = 1, y = \sqrt{x};$ y=$-x^2$

B10 $\iint y^2 e^{-\frac{xy}{4}}\, dx\, dy$

D

$D: x = 0, y = 2;$ y=x

B11 $\iint (36x^2y^2 + 96x^3y^3)\, dx\, dy$

D

$D: x = 1, y = \sqrt[3]{x};$ y=$-x^3$

B 12 $\iint y^2 sin\frac{xy}{2}\, dx\, dy$

D

$D: x = 0, y = \sqrt{\pi};$ y=x/2

B13 $\iint (12x^2y^2 + 16x^3y^3)\, dx\, dy$

D$D: x = 1, y = -\sqrt{x};$ y=x^2

B 14 $\iint y^2 e^{-\frac{xy}{8}}\, dx\, dy$

D

$D: x = 0, y = 2;$ y=x/2

B 15 $\iint y^2 cos\frac{xy}{2}\, dx\, dy$

D

$D: x = 0, y = \sqrt{2\pi};$ y=2x

$D: x = 1, y = \sqrt[3]{x};$ y=$-x^2$

B 25 $\iint (18x^2y^2 + 32x^3y^3)\, dx\, dy$

D

$D: x = 1, y = -\sqrt{x};$ y=x^3

B 26 $\iint y^2 e^{-\frac{xy}{2}}\, dx\, dy$

D

$D: x = 0, y = 1;$ y=x/2

B 27 $\iint y^2 cosxy\, dx\, dy$

D

$D: x = 0, y = \sqrt{\pi}$; y=2x

B 28 $\iint (18x^2y^2 + 24xy)\, dx\, dy$

D$D: x = 1; y = -\sqrt[3]{x};$ y=x^3

B 29 $\iint (9x^2y^2 + 12xy)\, dx\, dy$

D

$D: x = 1; y = \sqrt{x};$ y=$-x^2$

B 30 $\iint y^2 cosxy\, dx\, dy$

D

$D: x = 0, y = \sqrt{\pi/4}$; y=x

Задача 2. Изменить порядок интегрирования.

2.1. $\int\limits_{-2}^{-1} dy \int\limits_{-\sqrt{2+y}}^{0} f\ dx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{-\sqrt{-y}}^{0} f\ dx.$ 2.2. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{0} f\ dx + \int\limits_{1}^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{-\sqrt{-y}}^{0} f\ dx\,.$

2.3. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{y} f\ dx + \int\limits_{1}^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{2-y^2}} f\ dx\,.$ 2.4. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{y}} f\ dx + \int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{2-y}} f\ dx\,.$

2.5. $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int\limits_{-\sqrt{2-x^2}}^{0} f\ dy + \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{x}^{0} f\ dy\,.$2.6.

$\int\limits_{0}^{1/\sqrt{2}} dy \int\limits_{0}^{\arcsin y} f\ dx + \int\limits_{1/\sqrt{2}}^{1} dy \int\limits_{0}^{\arccos y} f\ dx$ 2.7. $\int\limits_{-2}^{-1} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{2+y}} f\ dx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{-y}} f\ dx.$

2.8. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{0} f\ dx + \int\limits_{1}^{e} dy \int\limits_{-1}^{-\ln y} f\ dx$ 2.9.

$\int\limits_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{2-x^2}} f\ dy + \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{0}^{x^2} f\ dy\,.$ 2.10. $\int\limits_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{0} fdy + \int\limits_{-\sqrt{3}}^{0} dx \int\limits_{\sqrt{4-x^2}-2}^{0} fdy\,.$

2.11. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{1-x^2}^{1} f\ dy + \int\limits_{1}^{e} dx \int\limits_{\ln x}^{1} f\ dy\,.$ 2.12. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{\sqrt[3]{y}} f\ dx + \int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{0}^{2-y} f\ dx\,.$

2.13. $\int\limits_{0}^{\pi/4} dy \int\limits_{0}^{\sin y} f\ dx + \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} dy \int\limits_{0}^{\cos y} f\ dx..$ 2.14. $\int\limits_{-2}^{-1} dx \int\limits_{-(2+x)}^{0} f\ dy + \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{\sqrt[3]{x}}^{0} f\ dy\,.$

2.15. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{y}} f\ dx + \int\limits_{1}^{e} dy \int\limits_{\ln y}^{1} f\ dx\,.$ 2.16. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{0} f\ dx + \int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{-\sqrt{2-y}}^{0} f\ dx.$

2.17. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-y}^0 f\;dx + \int\limits_1^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^0 f\;dx$. 2.18. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{y^2} f\;dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{2-y} f\;dx$.

2.19. $\int\limits_0^{\sqrt{3}} dx \int\limits_{\sqrt{4-x^2}-2}^0 f\;dy + \int\limits_{\sqrt{3}}^2 dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^0 f\;dy$. 2.20. $\int\limits_{-2}^{-1} dy \int\limits_{-(2+y)}^0 f\;dx + \int\limits_{-1}^0 dy \int\limits_{\sqrt[3]{y}}^0 f\;dx$.

2.21. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^y f\;dx + \int\limits_1^e dy \int\limits_{\ln y}^1 f\;dx$. 2.22. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} f\;dy + \int\limits_1^{\sqrt{2}} dx \int\limits_0^{\sqrt{2-x^2}} f\;dy$.

2.23. $\int\limits_0^{\pi/4} dx \int\limits_0^{\sin x} f\;dy + \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} dx \int\limits_0^{\cos x} f\;dy$. 2.24. $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{-1} dy \int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^0 f\;dx + \int\limits_{-1}^0 dy \int\limits_y^0 f\;dx$.

2.25. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} f\;dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{2-x} f\;dy$. 2.26. $\int\limits_0^{\sqrt{3}} dx \int\limits_0^{2-\sqrt{4-x^2}} f\;dy + \int\limits_{\sqrt{3}}^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} f\;dy$.

2.27. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{-\sqrt{x}}^0 f\;dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_{-\sqrt{2-x}}^0 f\;dy$. 2.28. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x f\;dy + \int\limits_1^{\sqrt{2}} dx \int\limits_0^{\sqrt{2-x^2}} f\;dy$.

2.29. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\sqrt{y}} f\;dx + \int\limits_1^{\sqrt{2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{2-y^2}} f\;dx$. 2.30. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{x}} f\;dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{2-x}} f\;dy$.

Задача 3. Вычислить.

3.1. $\iint\limits_D \left(12x^2y^2 + 16x^3y^3\right)dxdy;$
$D:\; x = 1,\; y = x^2,\; y = -\sqrt{x}.$

3.2. $\iint\limits_D \left(9x^2y^2 + 48x^3y^3\right)dxdy;$
$D:\; x = 1,\; y = \sqrt{x},\; y = -x^2.$

3.3. $$\iint\limits_D \left(36x^2y^2 - 96x^3y^3\right)dxdy;$$
$$D:\ x=1,\ y=\sqrt[3]{x},\ y=-x^3.$$

3.4. $$\iint\limits_D \left(18x^2y^2 + 32x^3y^3\right)dxdy;$$
$$D:\ x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt[3]{x}.$$

3.5. $$\iint\limits_D \left(27x^2y^2 + 48x^3y^3\right)dxdy;$$
$$D:\ x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt[3]{x}.$$

3.6. $$\iint\limits_D \left(18x^2y^2 + 32x^3y^3\right)dxdy;$$
$$D:\ x=1,\ y=\sqrt[3]{x},\ y=-x^2.$$

3.7. $$\iint\limits_D \left(18x^2y^2 + 32x^3y^3\right)dxdy;$$
$$D:\ x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt{x}.$$

3.8. $$\iint\limits_D \left(27x^2y^2 + 48x^3y^3\right)dxdy;$$
$$D:\ x=1,\ y=\sqrt{x},\ y=-x^3.$$

3.9. $$\iint\limits_D \left(4xy + 3x^2y^2\right)dxdy;$$
$$D:\ x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt{x}.$$

3.10. $$\iint\limits_D \left(12xy + 9x^2y^2\right)dxdy;$$
$$D:\ x=1,\ y=\sqrt{x},\ y=-x^2.$$

3.11. $$\iint\limits_D \left(8xy + 9x^2y^2\right)dxdy;$$
$$D:\ x=1,\ y=\sqrt[3]{x},\ y=-x^3.$$

3.12. $$\iint\limits_D \left(24xy + 18x^2y^2\right)dxdy;$$
$$D:\ x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt[3]{x}.$$

3.13. $$\iint\limits_D \left(12xy + 27x^2y^2\right)dxdy;$$
$$D:\ x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt[3]{x}.$$

3.14. $$\iint\limits_D \left(8xy + 18x^2y^2\right)dxdy;$$
$$D:\ x=1,\ y=\sqrt[3]{x},\ y=-x^2.$$

3.15. $$\iint\limits_D \left(\frac{4}{5}xy + \frac{9}{11}x^2y^2\right)dxdy;$$
$$D:\ x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt{x}.$$

3.16. $$\iint\limits_D \left(\frac{4}{5}xy + 9x^2y^2\right)dxdy;$$
$$D:\ x=1,\ y=\sqrt{x},\ y=-x^3.$$

3.17. $$\iint\limits_D \left(24xy - 48x^3y^3\right)dxdy;$$
$$D:\ x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt{x}.$$

3.18. $$\iint\limits_D \left(6xy + 24x^3y^3\right)dxdy;$$
$$D:\ x=1,\ y=\sqrt{x},\ y=-x^2.$$

3.19. $\iint\limits_D \left(4xy+16x^3y^3\right)dxdy;$
$D:\ x=1,\ y=\sqrt[3]{x},\ y=-x^3.$

3.20. $\iint\limits_D \left(4xy+16x^3y^3\right)dxdy;$
$D:\ x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt[3]{x}.$

3.21. $\iint\limits_D \left(44xy+16x^3y^3\right)dxdy;$
$D:\ x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt[3]{x}.$

3.22. $\iint\limits_D \left(4xy+176x^3y^3\right)dxdy;$
$D:\ x=1,\ y=\sqrt[3]{x},\ y=-x^3.$

3.23. $\iint\limits_D \left(xy-4x^3y^3\right)dxdy;$
$D:\ x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt{x}.$

3.24. $\iint\limits_D \left(4xy+176x^3y^3\right)dxdy;$
$D:\ x=1,\ y=\sqrt{x},\ y=-x^3.$

3.25. $\iint\limits_D \left(6x^2y^2+\frac{25}{3}x^4y^4\right)dxdy;$
$D:\ x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt{x}.$

3.26. $\iint\limits_D \left(9x^2y^2+25x^4y^4\right)dxdy;$
$D:\ x=1,\ y=\sqrt{x},\ y=-x^2.$

3.27. $\iint\limits_D \left(3x^2y^2+\frac{50}{3}x^4y^4\right)dxdy;$
$D:\ x=1,\ y=\sqrt[3]{x},\ y=-x^3.$

3.28. $\iint\limits_D \left(9x^2y^2+25x^4y^4\right)dxdy;$
$D:\ x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt[3]{x}.$

3.29. $\iint\limits_D \left(54x^2y^2+150x^4y^4\right)dxdy;$
$D:\ x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt[3]{x}.$

3.30.

$\iint\limits_D \left(xy-9x^5y^5\right)dxdy;$
$D:\ x=1,\ y=\sqrt[3]{x},\ y=-x^2.$

Задания практической работы

Задание 1.Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями

B1. $y^2-2y+x^2=0$, $y^2-4y+x^2=0$

$y=\frac{x}{\sqrt{3}}$, $y=\sqrt{3}x$

B2. $y^2-6y+x^2=0$, $y^2-8y+x^2=0$

$y=\frac{x}{\sqrt{3}}$, $y=\sqrt{3}x$

B 3. $y^2-8y+x^2=0$, $y^2-10y+x^2=0$

$y=\frac{x}{\sqrt{3}}$, $y=\sqrt{3}x$

B 4. $y^2-4y+x^2=0$, $y^2-6y+x^2=0$

$y=x$, $x=0$

B 5. $y^2-6y+x^2=0$, $y^2-10y+x^2=0$

$y=x$, $x=0$

B 6. $y^2-8y+x^2=0$, $y^2-10y+x^2=0$

$x=0$ $y=\sqrt{3}x$

B 7. $y^2-4y+x^2=0$, $y^2-6y+x^2=0$

$x=0$ $y=\sqrt{3}x$

B 8. $y^2-2y+x^2=0$, $y^2-6y+x^2=0$

$y=\frac{x}{\sqrt{3}}$, $y=0$

B 9. $y^2-2y+x^2=0$, $y^2-10y+x^2=0$

$y=\frac{x}{\sqrt{3}}$, $y=\sqrt{3}x$

B 10. $y^2-4y+x^2=0$, $y^2-10y+x^2=0$

$y=\frac{x}{\sqrt{3}}$, $y=\sqrt{3}x$

B 16. $y^2-4y+x^2=0$, $y^2-8y+x^2=0$

$y=\frac{x}{\sqrt{3}}$, $y=0$

B 17. $y^2-2y+x^2=0$, $y^2-4y+x^2=0$

$y=x$, $x=0$

B 18. $y^2-4y+x^2=0$, $y^2-8y+x^2=0$

$y=x$, $x=0$

B 19. $y^2-2y+x^2=0$, $y^2-10y+x^2=0$

$y=0$ $y=\sqrt{3}x$

B 20. $y^2-2y+x^2=0$, $y^2-4y+x^2=0$

$y=\frac{x}{\sqrt{3}}$, $y=\sqrt{3}x$

B 21. $y^2-2y+x^2=0$, $y^2-6y+x^2=0$

$y=\frac{x}{\sqrt{3}}$, $y=\sqrt{3}x$

B 22. $y^2-2y+x^2=0$, $y^2-8y+x^2=0$

$y=\frac{x}{\sqrt{3}}$, $y=\sqrt{3}x$

B 23. $y^2-2y+x^2=0$, $y^2-6y+x^2=0$

$y=\frac{x}{\sqrt{3}}$, $y=0$

B 24. $y^2-2y+x^2=0$, $y^2-6y+x^2=0$

$y=\frac{x}{\sqrt{3}}$, $y=0$

B 25. $y^2-6y+x^2=0$, $y^2-2y+x^2=0$

$y=x$, $x=0$

В 11. y^2- 4y+x^2=0, y^2-2y+x^2=0

y= x, x=0

В 12. y^2- 6y+x^2=0, y^2-8y+x^2=0

y= x, x=0

В 13. y^2- 4y+x^2=0, y^2-8y+x^2=0

y= x, x=0

В 14. y^2- 4y+x^2=0, y^2- 8y+x^2=0

x=0 y =$\sqrt{3}$x

В15 y^2- 2y+x^2=0, y^2-6y+x^2=0

y=$\frac{x}{\sqrt{3}}$, x = 0

В 26. y^2- 4y+x^2=0, y^2- 2y+x^2=0

x=0, y =$\sqrt{3}$x

В 27. y^2- 4y+x^2=0, y^2-8y+x^2=0

x=0, y =$\sqrt{3}$x

В 28. y^2- 4y+x^2=0, y^2-8y+x^2=0

y=$\frac{x}{\sqrt{3}}$, y =$\sqrt{3}$x

В 29. y^2- 4y+x^2=0, y^2-6y+x^2=0

y=$\frac{x}{\sqrt{3}}$, y =$\sqrt{3}$x

В 30. y^2- 6y+x^2=0, y^2-10y+x^2=0

y=$\frac{x}{\sqrt{3}}$, y =$\sqrt{3}$x

Задание 2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями в прямоугольной системе координат.

1. $y = 4 - x^2;\ 3x - y = 0;\ y = 0$.
2. $2y = x^2;\ 2x + 2y - 3 = 0$.
3. $y - 2x = 0;\ y = x^2;\ x = 1$.
4. $y = x^3;\ y = x;\ y = 2x$.
5. $y^2 = x;\ 3y^2 = 4x - 4$.
6. $y = (x-4)^2;\ y = 16 - x^2$.
7. $y = x + 1;\ y = \cos x;\ y = 0$.
8. $y = \frac{2}{\pi}x;\ y = \sin x;\ y = 0$.
9. $4y = 8x - x^2;\ 4y = x + 6$.
10. $y = e^x;\ y = e^{-x};\ x = 3$.
11. $y = 2^x;\ 2x + 3y = 8;\ x \geq 0;\ y \geq 0$.
12. $y = \ln x;\ y = -1;\ x = 3$.
13. $xy = 6;\ x + y = 7$.
14. $xy = 4;\ x - y = 0;\ x - 4 = 0$.
17. $x = 4y^2;\ x = \frac{y^2}{9};\ x = 2$.
18. $y = \ln x;\ x + y = 1;\ y = 1$.
19. $y = 2^x;\ y = 2x - x^2;\ 0 \leq x \leq 2$.
20. $y = \arcsin x;\ 0 \leq y \leq \pi;\ x \geq 0$.
21. $y = \arccos x;\ y \geq 0;\ x \geq 0$.
22. $x = \arcsin y;\ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2};\ y \geq 0$.
23. $x = \arccos y;\ y \geq 0;\ x \leq 0$.
24. $y = tg\frac{x}{2};\ y = \sqrt{3};\ x \geq 0$.
25. $y = \sqrt{x-1};\ y = |x-2|$.
26. $x = |y|;\ x = 4 - y^2$.
27. $x = \ln y;\ y \leq 7.29;\ x \geq 0$.
28. $y = x^2 + 4x;\ x - y + 4 = 0$.
29. $y = x^2;\ 4y = x^2;\ c = \pm 2$.
30. $y = x^2 + 1;\ y = 3 - x^2$

15. $x + 2y^2 = 0;\; x + 3y^2 = 1$.

16. $y^2 = x^3;\; x = \frac{4}{3}$.

Задание 3

Вычислите объемы тел, ограниченных заданными поверхностями (дополнительное задание)

1) $z=6,\; y=x^2,\; y=4,\; x=0,\; z=0;$

2) $z=3-x-y,\; x=0,\; y=x^2+1,\; y=2,\; z=0;$

3) $z=4x+1,\; y=x^2,\; x=0,\; y=4,\; z=0;$

4) $z=4-x^2,\; x+y-4=0, x=0,\; y=0,\; z=0;$

5) $z=2-x,\; y^2=9x,\; y=3x^2,\; z=0.$

Контрольные вопросы:

1.Что называется интегральной суммой функции $f(x, y)$ в области D?2.Дайте определение двойного интеграла.

3.Перечислите основные свойства двойного интеграла.
4.Какие случаи расположения области D относительно осей координат возникают при вычислении двойных интегралов? Запишите формулы вычисления двойных интегралов для каждого из этих случаев.
5.Какие интегралы называются повторными или двукратными?
6.По какой формуле вычисляется площадь плоской области в прямоугольных координатах?
7. По какой формуле вычисляется площадь плоской области в полярных координатах?
8. По какой формуле находится объем тела, ограниченного поверхностями?

Практическая работа № 11

Тема «Исследование числовых рядов на сходимость»

Цель: научиться исследовать числовые ряды на сходимось

Время выполнения 90 минут

Материальное обеспечение
1.Теоретические сведения
2.Задание
3.Лист А 4
4.Калькуляторы

Порядок выполнения работы
1.Изучить задание
2. Изучить теоретические сведения
3. Выполнить и оформить работу
4.Показать результаты преподавателю
Домашнее задание
1.Подготовить ответы на контрольные вопросы
Теоретические сведени

Определение. Сумма членов бесконечной числовой последовательности $u_1, u_2, ..., u_n, ...$ называется **числовым рядом**.

$$u_1 + u_2 + ... + u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

При этом числа $u_1, u_2, ...$ будем называть членами ряда, а u_n – общим членом ряда.

Определение. Суммы $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$, $n = 1, 2, ...$ называются **частными (частичными) суммами** ряда.

Таким образом, возможно рассматривать последовательности частичных сумм ряда $S_1, S_2, ..., S_n, ...$

Определение. Ряд $u_1 + u_2 + ... + u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется **сходящимся**, если сходится последовательность его частных сумм. **Сумма сходящегося ряда** – предел последовательности его частных сумм.

$$\lim S_n = S, \qquad S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Определение. Если последовательность частных сумм ряда расходится, т.е. не имеет предела, или имеет бесконечный предел, то ряд называется **расходящимся** и ему не ставят в соответствие никакой суммы.

Свойства рядов.

1) Сходимость или расходимость ряда не нарушится если изменить, отбросить или добавить конечное число членов ряда.

2) Рассмотрим два ряда $\sum u_n$ и $\sum Cu_n$, где С – постоянное число.

<u>Теорема.</u>*Если ряд* $\sum u_n$ *сходится и его сумма равна S, то ряд* $\sum Cu_n$ *тоже сходится, и его сумма равна CS. (C≠ 0)*

3) Рассмотрим два ряда $\sum u_n$ и $\sum v_n$. **Суммой** или **разностью** этих рядов будет называться ряд $\sum (u_n \pm v_n)$, где элементы получены в результате сложения (вычитания) исходных элементов с одинаковыми номерами.

<u>Теорема.</u>*Если ряды* $\sum u_n$ *и* $\sum v_n$ *сходятся и их суммы равны соответственно S и σ, то ряд* $\sum (u_n \pm v_n)$ *тоже сходится и его сумма равна S + σ.*

$$\sum (u_n + v_n) = \sum u_n + \sum v_n = S + \sigma$$

Разность двух сходящихся рядов также будет сходящимся рядом.
Сумма сходящегося и расходящегося рядов будет расходящимся рядом.
О сумме двух расходящихся рядов общего утверждения сделать нельзя.

При изучении рядов решают в основном две задачи: исследование на сходимость и нахождение суммы ряда.

1) Если ряд $\sum u_n$ сходится, то необходимо, чтобы общий член u_n стремился к нулю. Однако, это условие не является достаточным. Можно говорить только о том, что если общий член не стремится к нулю, то ряд точно расходится. Например, так называемый гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ является расходящимся, хотя его общий член и стремится к нулю.

<u>Пример.</u> Исследовать сходимость ряда $\frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{3}{8} + \ldots + \frac{n}{3n-1} + \ldots$

Найдем $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{3n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3 - \frac{1}{n}} = \frac{1}{3} \neq 0$ - необходимый признак сходимости не выполняется, значит ряд расходится.

2) Если ряд сходится, то последовательность его частных сумм ограничена.

Однако, этот признак также не является достаточным.

Например, ряд 1-1+1-1+1-1+ … $+(-1)^{n+1}+$… расходится, т.к. расходится последовательность его частных сумм в силу того, что

$$S_n = \begin{cases} 0, & при \quad четных \quad n \\ 1, & при \quad нечетных \quad n \end{cases}$$

Однако, при этом последовательность частных сумм ограничена, т.к. $|S_n| < 2$ при любом *n*.

Ряды с неотрицательными членами.

При изучении знакопостоянных рядов ограничимся рассмотрением рядов с неотрицательными членами, т.к. при простом умножении на –1 из этих рядов можно получить ряды с отрицательными членами.

Теорема. *Для сходимости ряда $\sum u_n$ с неотрицательными членами необходимо и достаточно, чтобы частные суммы ряда были ограничены.*

Признак сравнения рядов с неотрицательными членами.

Пусть даны два ряда $\sum u_n$ и $\sum v_n$ при $u_n, v_n \ge 0$.

Теорема. Если $u_n \le v_n$ при любом n, то из сходимости ряда $\sum v_n$ следует сходимость ряда $\sum u_n$, а из расходимости ряда $\sum u_n$ следует расходимость ряда $\sum v_n$.

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \ldots + \frac{1}{\ln n} + \ldots$

Т.к. $\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$, а гармонический ряд $\sum \frac{1}{n}$ расходится, то расходится и ряд $\sum \frac{1}{\ln n}$

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$.

Т.к. $\frac{1}{n2^n} < \frac{1}{2^n}$, а ряд $\sum \frac{1}{2^n}$ сходится (как убывающая геометрическая прогрессия), то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$ тоже сходится.

Также используется следующий признак сходимости

Теорема. *Если $u_n > 0, \quad v_n > 0$ и существует предел $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = h$, где h – число, отличное от нуля, то ряды $\sum u_n$ и $\sum v_n$ ведут одинаково в смысле сходимости.*

Признак Даламбера.

(Жан Лерон Даламбер (1717 – 1783) – французский математик)

Если для ряда $\sum u_n$ с положительными членами существует такое число q<1, что для всех достаточно больших n выполняется неравенство

$\frac{u_{n+1}}{u_n} \le q,$ то ряд $\sum u_n$ сходится, если же для всех достаточно больших n

выполняется условие $\frac{u_{n+1}}{u_n} \ge 1,$ то ряд $\sum u_n$ расходится.

Предельный признак Даламбера.

Предельный признак Даламбера является следствием из приведенного выше признака Даламбера.

Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$, то при ρ< 1 ряд сходится, а при ρ> 1 – расходится. Если ρ = 1, то на вопрос о сходимости ответить нельзя.

<u>Пример.</u> Определить сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$.

$$u_n = \frac{n}{2^n}; \quad u_{n+1} = \frac{n+1}{2^{n+1}}; \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)2^n}{2^{n+1}n} = \frac{n+1}{2n} = \frac{1+\frac{1}{n}}{2} = \frac{1}{2} < 1$$

Вывод: ряд сходится.

<u>Пример.</u> Определить сходимость ряда $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots$

$$u_n = \frac{1}{n!}; \quad u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}; \quad \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0 < 1$$

Вывод: ряд сходится.

Признак Коши. (радикальный признак)

Если для ряда $\sum u_n$ с неотрицательными членами существует такое число q<1, что для всех достаточно больших n выполняется неравенство $\sqrt[n]{u_n} \le q$,

то ряд $\sum u_n$ сходится, если же для всех достаточно больших n выполняется неравенство $\sqrt[n]{u_n} \ge 1,$ то ряд $\sum u_n$ расходится.

<u>Следствие.</u> Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \rho$, то при ρ<1 ряд сходится, а при ρ>1 ряд расходится.

Пример. Определить сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+1}{3n^2+5}\right)^n$.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+1}{3n^2+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n^2}}{3+\frac{5}{n^2}}=\frac{2}{3}<1$$

Вывод: ряд сходится.

Пример. Определить сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1.$$

Т.е. признак Коши не дает ответа на вопрос о сходимости ряда. Проверим выполнение необходимых условий сходимости. Как было сказано выше, если ряд сходится, то общий член ряда стремится к нулю.

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\neq 0,$$

таким образом, необходимое условие сходимости не выполняется, значит, рядрасходится.

Интегральный признак Коши.

Если $\varphi(x)$ – непрерывная положительная функция, убывающая на промежутке [1;∞), *то ряд $\varphi(1)$ + $\varphi(2)$ + ...+ $\varphi(n)$ + ... =* $\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(n)$ *и несобственный интеграл* $\int_1^{\infty}\varphi(x)dx$ *одинаковы в смысле сходимости.*

Пример. Ряд $1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+...+\frac{1}{n^\alpha}+...$ сходится при α>1 и расходится α≤1 т.к. соответствующий несобственный интеграл $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$ сходится при α>1 и расходится α≤1. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ называется **общегармоническим** рядом.

Следствие. Если *f(x)* и *$\varphi(x)$* – непрерывные функции на интервале (a, b] и $\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=h,\quad h\neq 0,$ то интегралы $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b\varphi(x)dx$ ведут себя одинаково в смысле сходимости.

Знакопеременные ряды. (Знакочередующиеся ряды).

Знакочередующийся ряд можно записать в виде:

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n+1} u_n + \ldots$$

где $u_n > 0, \quad n = 1,2,3,\ldots$ ***Признак Лейбница.***

Если у знакочередующегося ряда $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n+1} u_n + \ldots$ *абсолютные величины* u_i *убывают* $u_1 > u_2 > u_3 > \ldots$ *и общий член стремится к нулю* $u_n \to 0$, *то ряд сходится.*

Абсолютная и условная сходимость рядов.

Рассмотрим некоторый знакопеременный ряд (с членами произвольных знаков) $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ (1)

и ряд, составленный из абсолютных величин членов ряда (1):

$$|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \qquad (2)$$

Теорема. *Из сходимости ряда (2) следует сходимость ряда (1).*

Определение. Ряд $\sum u_n$ называется **абсолютно сходящимся**, если сходится ряд $\sum |u_n|$.

Очевидно, что для знакопостоянных рядов понятия сходимости и абсолютной сходимости совпадают.

Определение. Ряд $\sum u_n$ называется **условно сходящимся**, если он сходится, а ряд $\sum |u_n|$ расходится. ***Признаки Даламбера и Коши для знакопеременных рядов.***

Пусть $\sum u_n$ - знакопеременный ряд. **Признак Даламбера.** Если существует предел $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \rho$, то при ρ<1 ряд $\sum u_n$ будет абсолютно сходящимся, а при ρ>1 ряд будет расходящимся. При ρ=1 признак не дает ответа о сходимости ряда.

Признак Коши. Если существует предел $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \rho$, то при ρ<1 ряд $\sum u_n$ будет абсолютно сходящимся, а при ρ>1 ряд будет расходящимся. При ρ=1 признак не дает ответа о сходимости ряда.

Свойства абсолютно сходящихся рядов.

1) **Теорема.** *Для абсолютной сходимости ряда* $\sum u_n$ *необходимо и достаточно, чтобы его можно было представить в виде разности двух сходящихся рядов с неотрицательными членами.*

Следствие. Условно сходящийся ряд является разностью двух расходящихся рядов с неотрицательными стремящимися к нулю членами.

2) В сходящемся ряде любая группировка членов ряда, не изменяющая их порядка, сохраняет сходимость и величину ряда.

3) Если ряд сходится абсолютно, то ряд, полученный из него любой перестановкой членов, также абсолютно сходится и имеет ту же сумму.

Перестановкой членов условно сходящегося ряда можно получить условно сходящийся ряд, имеющий любую наперед заданную сумму, и даже расходящийся ряд.

4) **Теорема.** *При любой группировке членов абсолютно сходящегося ряда (при этом число групп может быть как конечным, так и бесконечным и число членов в группе может быть как конечным, так и бесконечным) получается сходящийся ряд, сумма которого равна сумме исходного ряда.*

5) Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходятся абсолютно и их суммы равны соответственно Sи σ, то ряд, составленный из всех произведений вида $u_i v_k,\quad i,k = 1,2,...$ взятых в каком угодно порядке, также сходится абсолютно и его сумма равна $S\cdot\sigma$ - произведению сумм перемножаемых рядов.

Если же производить перемножение условно сходящихся рядов, то в результате можно получить расходящийся ряд.

Задания практической работы

1.Выписать три первых члена ряда найти третью частичную сумму

1,11,21 а) $\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{2^n}{n \cdot n!}$; б) $\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\ln n}{n}$.

2,12,22 а) $\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{5^{n-1}}{n^2 \cdot (n-1)!}$; б) $\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{4n^3}{(n^4+4)^2}$

3,13,23 а) $\sum\limits_{n=1}^{n=\infty}\frac{3^{n+2}}{(n-5)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{n=\infty}\frac{|\sin n|}{\sqrt{n^3}}$.

4,14,24 а) $\sum\limits_{n=1}^{n=\infty}\frac{2^{2n}}{n\cdot(n+1)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{n=\infty}\frac{\cos^2 n}{\sqrt[3]{n^5}}$.

5,15,25 а) $\sum\limits_{n=1}^{n=\infty}\frac{3^{n+1}}{n!(n+1)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{n=\infty}\frac{n}{n^2+1}$.

6,16,26 а) $\sum\limits_{n=1}^{n=\infty}\frac{n^2+1}{\sqrt{n\cdot 3^n}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n\cdot \ln n}$.

7,17,27 а) $\sum\limits_{n=1}^{n=\infty}\frac{2^{n+2}n^2}{3^{2n-1}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{n=\infty}\frac{e^n}{1+e^{n2}}$.

8,18.28 а) $\sum\limits_{n=1}^{n=\infty}\frac{2^{3n}\cdot n!}{(2n)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{n=\infty}\frac{\sin^4 n}{2n\sqrt{n}}$.

9,19,29 а) $\sum\limits_{n=1}^{n=\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}\cdot\cos n}$.

10,20,30 а) $\sum\limits_{n=1}^{n=\infty}\frac{n!(n+1)!}{(2n)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{n=\infty}\frac{1+\cos^2 n}{n}$.

2.Исследовать на сходимость, применяя необходимый признак сходимости

1,11,21. $a)\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{4n+5}$

2,12,22. $a)\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{10n-1}$

3,13,23. $a)\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n\ \ +1}{5n+2}$

4,14,24. $a)\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3-4n^2+1}{n^2-5n}$

6,16,26. $a)\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2n-1)\cdot 2^n}$

7,17,27. $a)\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$

8,18,28. $a)\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$

9,19,29. $a)\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{7n+1}$

5,15,525. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n^2+1}{n^3+2n}$ 10,20,30. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2}{3n-1}$

3.Исследовать на сходимость, используя признак Даламбера

1,11,21. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}$ 6,16,26. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{3^n}$

2,12,22. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{(\sqrt{3})^n}$ 7,17,27. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$

3,13,23. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot n^2}{5^n}$ 8,18,28. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n(n+1)}$

4,14,24. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{n^n}$ 9,19,29. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}$

5,15,25. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3\cdot 2^n}$ 10,20,30. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n^5}$

Контрольные вопросы

1. Определение числового ряда.
2. Свойства и виды рядов.
3. Определение суммы ряда.
4. Необходимый признак сходимости.
5. Признаки сравнения, признаки Даламбера и Коши.

Практическая работа № 20
Тема «Решение дифференциальных уравнений»

Цель: проверить умение решать дифференциальные уравнения первого порядка с разделенными и разделяющимися переменными.

Время выполнения 90 минут

Материальное обеспечение

1.Теоретические сведения

2.Задание

3.Лист А 4

4.Калькуляторы

Порядок выполнения работы

1.Изучить задание

2. Изучить теоретические сведения

3. Выполнить и оформить работу

4.Показать результаты преподавателю

Домашнее задание

1.Подготовить ответы на контрольные вопросы

Теоретический материал

Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее между собой независимую переменную x, искомую функцию y и ее производные или дифференциалы.

Символически дифференциальное уравнение записывается так:

$$F(x, y, y') = 0,\ F(x, y, y'') = 0,\ F\left(x, y, y', y'',..., y^{(n)}\right) = 0.$$

Дифференциальное уравнение называется *обыкновенным*, если искомая функция зависит от одного независимого переменного.

Порядком дифференциального уравнения называется порядок старшей производной (или дифференциала), входящей в данное уравнение.

Решением (или *интегралом*) дифференциального уравнения называется такая функция, которая обращает это уравнение в тождество.

Общим решением (или *общим интегралом*) дифференциального уравнения называется такое решение, в которое входит столько независимых произвольных постоянных, каков порядок уравнения. Так, общее решение дифференциального уравнения первого порядка содержит одну произвольную постоянную.

Частным решением дифференциального уравнения называется решение, полученное из общего при различных числовых значениях произвольных постоянных. Значения произвольных постоянных находятся при определенных начальных значениях аргумента и функции.

Дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение, в которое входят производные (или дифференциалы) не выше первого порядка.

Дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными называется уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\cdot\varphi(y).$$

Для решения этого уравнения нужно сначала разделить переменные:

$$\frac{dy}{\varphi(y)} = f(x)dx,$$

а затем проинтегрировать обе части полученного равенства:

$$\int \frac{dy}{\varphi(y)} = \int f(x)dx.$$

Примеры

Задание 1: Найдите общее решение уравнения $x \cdot (1+y^2)dx = ydy$.

Решение: Разделив переменные, имеем $xdx = \frac{ydy}{1+y^2}$. Интегрируем обе части полученного уравнения:

$$\int xdx = \int \frac{ydy}{1+y^2}; \qquad \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2}\ln(1+y^2) + \frac{1}{2}\ln C.$$

Так как произвольная постоянная C может принимать любые числовые значения, то для удобства дальнейших преобразований вместо C мы написали $\frac{1}{2}\ln C$. Потенцируя последнее равенство, получим $x^2 = \ln[C \cdot (1+y^2)]$.

Это и есть общее решение данного уравнения.

Задание 2: Найти частное решение уравнения $s \cdot tg\,t\,dt + ds = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $s = 4$ при $t = \frac{\pi}{3}$.

Решение: Разделив переменные, имеем $tg\,t\,dt + \frac{ds}{s} = 0$. Проинтегрируем обе части полученного уравнения:

$$\int tg\,t\,dt + \int \frac{ds}{s} = \ln C; \qquad -\ln\cos t + \ln s = \ln C,$$

Или $\ln s = \ln C + \ln\cos t$, $\qquad s = C\cos t$.

Это общее решение данного уравнения. Для нахождения значения произвольной постоянной C подставим значения $t = \frac{\pi}{3}$ и $s = 4$ в выражение для общего решения: $4 = C\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$, или $4 = \frac{C}{2}$, откуда $C = 8$.

Следовательно, искомое частное решение, удовлетворяющее указанным начальным условиям, имеет вид $s = 8\cos t$.

Задания практической работы

Задание 1.Найти общее решение уравнений а), б).

Задание 2.Найти частное решение уравнения с разделяющимися переменными

В1.1. а)$x^2\,dx = 3y^2\,dy$

б)у(1+х)$dx + x(1-y)\,dy = 0$

2.$y^2\,dx = e^{-x}\,dy;\ y = 1\ при x = 0$

В2. 1.а)$\frac{1}{\sqrt{x}}dy = \frac{3}{\sqrt{y}}dx$

б)у$^2 dx + (x-2)\,dy = 0$

2.$\frac{1}{y^2}\,dx = \frac{1}{x^2}dy, y = 2\ при x = 0$

В31.а)$\sqrt{x}\,dx = \sqrt{y}\,dy$

б)(1+у^2)$dx - \sqrt{x}\,dy = 0$

2.$(1+y)\,dx = (1-x)\,dy,$

$y = 3\quad при x = -2$

В4. 1.а)$(3x^2 - 2x)\,dx = dy$

б) -(2ху+3у)$dx + x^2\,dy = 0$

2.$y\,dx = x\,dy, y = 6\ при x = 2$

В5.1.а)$(4x-3)\,dx = dy$

б) (ху+х)$\frac{dx}{dy}$=1

2.$\frac{2x-1}{y+1} = \frac{dx}{dy},\quad y = 0\ при x = 5$

В6. 1.а)$x\,dx = dy$

В16.1.а)$x^2\,dx = 3y^2\,dy$

б)у(1+х)$dx + x(1-y)\,dy = 0$

2.$dx = e^{-x}\,dy;\ y = 1\ при x = 0$

В17. 1.а)$\frac{1}{\sqrt{x}}dy = \frac{3}{\sqrt{y}}dx$

б)у$^2 dx + (x-2)\,dy = 0$

2.$dx = \frac{1}{x^2}dy, y = 2\ при x = 0$

В18.1.а)$\sqrt{x}\,dx = \sqrt{y}\,dy$

б)(1+у^2)$dx - \sqrt{x}\,dy = 0$

2.$(1+y)\,dx = (1-x)\,dy,$

$y = 3\ при x = -2$

В19. 1.а)$(3x^2 - 2x)\,dx = dy$

б) -(2ху+3у)$dx + x^2\,dy = 0$

2.$y\,dx = x\,dy, y = 6\ при x = 2$

В20. 1.а)$(4x-3)\,dx = dy$

б) (ху+х)$\frac{dx}{dy}$=1

2.$\frac{2x-1}{y+1} = \frac{dx}{dy},\quad y = 0\ при x = 5$

В21.1.а)$x\,dx = dy$

б) 2(ху+у)$dx = x\,dy$2.$(y +$

б) 2(xy+y)$dx = x\,dy$

2.$(y + 1)\,dx - (1 - x)\,dy = 0,$

$y = 1$ $при x = 0$

В7.1.а)$x^2\,dx = 3y^2\,dy$

б)y(1+x)$dx + x(1 - y)\,dy = 0$

2.$y^2\,dx = e^{-x}\,dy;$ $y = 1$ $при x = 0$

В8.1.а)$\frac{1}{\sqrt{x}}dy = \frac{3}{\sqrt{y}}dx$

б)y²$dx + (x - 2)\,dy = 0$

2.$\frac{1}{y^2}dx = \frac{1}{x^2}dy, y = 2$ $при x = 0$

В9. 1.а)$\sqrt{x}\,dx = \sqrt{y}\,dy$

б)(1+y²)$dx - \sqrt{x}\,dy = 0$

2.$(1 + y)\,dx = (1 - x)\,dy,$

$y = 3$ $при x = -2$

В10 1.а)$(3x^2 - 2x)\,dx = dy$

б) -(2xy+3y)$dx + x^2\,dy = 0$

2.$y\,dx = x\,dy, y = 6$ $при x = 2$

В11.1.а)$(4x - 3)\,dx = dy$

б) (xy+x)$\frac{dx}{dy}$=1

2.$\frac{2x-1}{y+1} = \frac{dx}{dy},\quad y = 0$ $при x = 5$

В12.1.а)$x\,dx = dy$

б) 2(xy+y)$dx = x\,dy 2.(y +$
$1)\,dx - (1 - x)\,dy = 0,$

$y = 1$ $при x = 0$

1) $dx - (1 - x)\,dy = 0,$

$y = 1$ $при x = 0$

В22.1.а)$x^2\,dx = 3y^2\,dy$

б)y(1+x)$dx + x(1 - y)\,dy = 0$

2.$y^2\,dx = e^{-x}\,dy;$ $y = 1$ $при x = 0$

В23.1.а)$\frac{1}{\sqrt{x}}dy = \frac{3}{\sqrt{y}}dx$

б)y²$dx + (x - 2)\,dy = 0$

2.$\frac{1}{y^2}dx = \frac{1}{x^2}dy, y = 2$ $при x = 0$

В24.1.а)$\sqrt{x}\,dx = \sqrt{y}\,dy$

б)(1+y²)$dx - \sqrt{x}\,dy = 0$

2.$(1 + y)\,dx = (1 - x)\,dy,$

$y = 3$ $при x = -2$

В25.1.а)$(3x^2 - 2x)\,dx = dy$

б) -(2xy+3y)$dx + x^2\,dy = 0$

2.$y\,dx = x\,dy, y = 6$ $при x = 2$

В26.1.а)$(4x - 3)\,dx = dy$

б) (xy+x)$\frac{dx}{dy}$=1

2.$\frac{2x-1}{y+1} = \frac{dx}{dy},\quad y = 0$ $при x = 5$

В27.1.а)$x\,dx = dy$

б) 2(xy+y)$dx = x\,dy 2.(y +$
$1)\,dx - (1 - x)\,dy = 0,$

$y = 1$ $при x = 0$

B13.1.а)$x^2\,dx = 3y^2\,dy$

б)y(1+x)$dx + x(1-y)\,dy = 0$

2.$y^2\,dx = e^{-x}\,dy$;

$y = 1$ $при x = 0$

B14.1.а)$\frac{1}{\sqrt{x}}dy = \frac{3}{\sqrt{y}}dx$

б)y$^2 dx + (x-2)\,dy = 0$

2.$\frac{1}{y^2}dx = \frac{1}{x^2}dy, y = 2$ $при x = 0$

B15.1.а)$\sqrt{x}\,dx = \sqrt{y}\,dy$

б)(1+y^2)$dx - \sqrt{x}\,dy = 0$

2.$(1+y)\,dx = (1-x)\,dy$,

$y = 3$ $при x = -2$

B28.1.а)$x^2\,dx = 3y^2\,dy$

б)y(1+x)$dx + x(1-y)\,dy = 0$

2.$y^2\,dx = e^{-x}\,dy;\ y = 1$ $при x = 0$

B29. 1.а)$\frac{1}{\sqrt{x}}dy = \frac{3}{\sqrt{y}}dx$

б)y$^2 dx + (x-2)\,dy = 0$

2.$\frac{1}{y^2}dx = \frac{1}{x^2}dy, y = 2$ $при x = 0$

B30.1.а)$\sqrt{x}\,dx = \sqrt{y}\,dy$

б)(1+y^2)$dx - \sqrt{x}\,dy = 0$

2.$(1+y)\,dx = (1-x)\,dy$,

$y = 3$ $при x = -2$

Контрольные вопросы:

1. Какое уравнение называется дифференциальным?
2. Что называется решением дифференциального уравнения?
3. Какое решение дифференциального уравнения называется общим?
4. Какое решение дифференциального уравнения называется частным?
5. Какие дифференциальные уравнения называются уравнениями первого порядка?
6. Какие дифференциальные уравнения называются уравнениями с разделяющимися переменными?

Практическая работа № 14.

Тема « Вычисление определителей»

Цель:научитьсявычислять определители второго и третьего порядка,

Время выполнения90 минут

Материальное обеспечение1.Теоретические сведения

2.Задание
3.Лист А 4
4.Калькуляторы
Порядок выполнения работы
1.Изучить задание
2. Изучить теоретические сведения
3. Выполнить и оформить работу
4.Показать результаты преподавателю
Домашнее задание
1.Подготовить ответы на контрольные вопросы
Ход работы
Теоретические сведения

Определение.Матрицей размера m×n, где m- число строк, n- число столбцов, называется таблица чисел, расположенных в определенном порядке. Эти числа называются элементами матрицы. Место каждого элемента однозначно определяется номером строки и столбца, на пересечении которых он находится. Элементы матрицы обозначаются a_{ij}, где i- номер строки, а j- номер столбца.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Виды матриц
Матрица может состоять как из одной строки, так и из одного столбца. Вообще говоря, матрица может состоять даже из одного элемента.
Определение.Если число столбцов матрицы равно числу строк (m=n), то матрица называется **квадратной**.
Определение. Матрица вида:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = E,$$

называется**единичной матрицей**.
Определение. Если $a_{mn} = a_{nm}$, то матрица называется **симметрической**.Пример. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \\ 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ - симметрическая

матрица**<u>Определение.</u>**Квадратная матрица вида $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_{22} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$ называется **диагональной** матрицей.

Действия с матрицамиСложение и вычитание матриц сводится к соответствующим операциям над их элементами. Самым главным свойством этих операций является то, что они ***<u>определены только для матриц одинакового размера</u>***. Таким образом, возможно определить операции сложения и вычитания матриц:

Суммой (разностью) матриц является матрица, элементами которой являются соответственно сумма (разность) элементов исходных матриц.

$c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$

C = A + B = B + A.

Операция **умножения (деления)** матрицы любого размера на произвольное число сводится к умножению (делению) каждого элемента матрицы на это число.

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & ... & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & ... & \alpha a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & ... & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$$

α (A+B) =αA $\pm\alpha$B

A($\alpha\pm\beta$) = αA $\pm\beta$A**Пример.** Даны матрицы A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; B = $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, найти 2A + B.

2A = $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 8 \\ 6 & 4 & 6 \end{pmatrix}$, 2A + B = $\begin{pmatrix} 3 & 7 & 10 \\ 9 & 9 & 16 \\ 7 & 6 & 10 \end{pmatrix}$.

Произведением матриц A·B = C;называетсяматрица, элементы которой могут быть вычислены по следующим формулам: $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$ Из приведенного определения видно, что операция умножения матриц определена только для матриц, **число столбцов первой из которых равно числу строк второй.<u>Определение</u>.** Матрицу B называют **транспонированной** матрицей A, а переход от A к B **транспонированием**, если элементы каждой строки матрицы А записать в том же порядке в столбцы матрицы В.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad B = A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix};$$

другими словами, $b_{ji} = a_{ij}$.

Пример. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ и число $\alpha = 2$.

Найти $A^TB+\alpha C$.

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad A^TB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 3 + 1\cdot 2 \\ 0\cdot 1 + 4\cdot 3 - 4\cdot 2 \\ 3\cdot 1 + 1\cdot 3 + 2\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix};$$

$\alpha C = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad A^TB+\alpha C = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}$.**Пример.** Найти произведение матриц $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.$AB = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 & 1\cdot 4 & 1\cdot 1 \\ 4\cdot 2 & 4\cdot 4 & 4\cdot 1 \\ 3\cdot 2 & 3\cdot 4 & 3\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 8 & 16 & 4 \\ 6 & 12 & 3 \end{pmatrix}$

.

$BA = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 2\cdot 1 + 4\cdot 4 + 1\cdot 3 = 2 + 16 + 3 = 21.$

Пример. Найти произведение матриц $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+10 & 4+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 16 \end{pmatrix}.$

Определителем второго порядка называется число, которое поставлено в соответствие таблицы коэффициентов $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$

по следующему правилу: произведение по главной диагонали берется со знаком плюс, по другой диагонали со знаком минус.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

<u>Пример:</u> вычислить определитель второго порядка

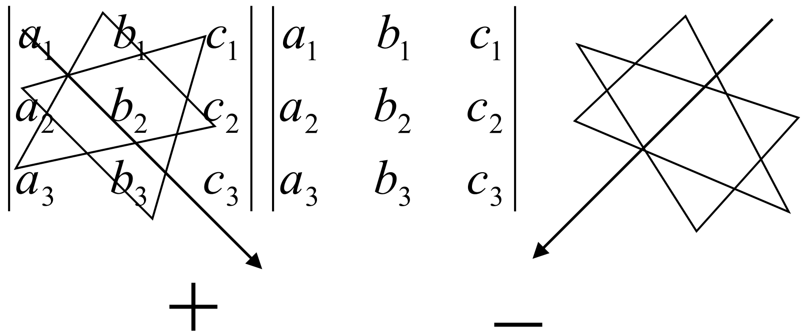
1) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot 2 - 3\cdot 4 = 4 - 12 = -8$

2) $\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1\cdot 1 - 3\cdot(-2) = -1 + 6 = 5$

Определителем третьего порядка называется число, которое поставлено в соответствие таблицы коэффициентов по следующему правилу:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3$$

Это определение определителя наглядно можно представить следующим образом:



Это правила называют еще «Правило треугольника»

<u>Пример</u>Вычислить определитель третьего порядка

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3\cdot 4\cdot 3 + 2\cdot 2\cdot 1 + 1\cdot 2\cdot 5 - 1\cdot 4\cdot 1 - 2\cdot 2\cdot 3 - 3\cdot 2\cdot 5 =$$

$$= 36 + 4 + 10 - 4 - 12 - 30 = 4$$

Задания для проведения практической работы

1.Вычислить определители второго порядка:

1) $\Delta = \begin{vmatrix} -\kappa_1 & 2+\kappa_2 \\ \kappa_1\cdot\kappa_2 & 5 \end{vmatrix}$, 2) $\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\kappa_1}{3} & 5^2 \\ 3\cdot\kappa_2 & 6 \end{vmatrix}$, 3) $\Delta = \begin{vmatrix} 9^{0,5} & \kappa_1\cdot 64^{\frac{1}{6}} \\ (0,5)^{-3} & \sqrt{4^2} \end{vmatrix}$

2.Вычислить определители третьего порядка:

$$1)\ \Delta=\begin{vmatrix} -1 & 3\kappa_1 & 2 \\ 2 & 8 & \kappa_2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix},\quad 2)\ \Delta=\begin{vmatrix} 3\kappa_2 & 4 & -5 \\ 8 & 7\kappa_2-2 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix},\quad 3)\ \Delta=\begin{vmatrix} 1 & -2 & \kappa_1\cdot\kappa_2 \\ 3 & \kappa_1 & -5 \\ 2 & \kappa_2 & 5 \end{vmatrix}$$

Вариант	κ_1	κ_2	***Вариант***	κ_1	κ_2	***Вариант***	κ_1	κ_2
1	3	-2	***11***	4	-1	**21**	-2	4
2	4	1	***12***	5	1	**22**	1	3
3	3	-4	***13***	2	0	**23**	-3	2
4	2	1	***14***	-2	1	**24**	-4	-1
5	3	-3	***15***	2	-2	**25**	-1	5
6	1	5	***16***	0	7	**26**	4	-2
7	-2	3	***17***	-1	4	**27**	-1	3
8	6	-2	***18***	-3	3	**28**	2	-3
9	-6	1	***19***	-4	1	**29**	-2	5
10	-5	1	***20***	0	8	**30**	-5	-1

Контрольные вопросы:

1. Что называется определителем матрицы?
2. Как вычислить определитель второго порядка?
3. Какие способы вычисления определителя третьего порядка вам известны?
4. Перечислите свойства определителей.

Практическая работа № 15 -16-17

Тема«Нахождение обратной матрицы. Решение матричных уравнений»

Цель: научиться вычислять миноры, алгебраические дополнения, определители четвертого порядков , находить обратные матрицы ,решать простейшие матричные уравнения

Время выполнения 90 минут

Материальное обеспечение

1.Теоретические сведения

2.Задание

3.Лист А 4

4.Калькуляторы

Порядок выполнения работы

1.Изучить задание

2. Изучить теоретические сведения

3. Выполнить и оформить работу

4.Показать результаты преподавателю

Домашнее задание

1.Подготовить ответы на контрольные вопросы

Ход работы

Теоретические сведения

Системой линейных алгебраических уравнений, содержащей *m* уравнений и *n* неизвестных, называется система вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

где числа a_{ij} , $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$ называются коэффициентами системы, числа b_i – свободными членами. Подлежат нахождению числа x_n.

Здесь А – матрица коэффициентов системы, называемая *основной матрицей*:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} - вектор - столбецизнеизвестныхx_j$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix} - вектор - столбецизсвободныхчленовb_j$$

Произведение матриц А * Х определено, так как в матрице А столбцов столько же, сколько строк в матрице Х (*n* штук).

Расширенной матрицей системы называется матрица $\bar{A}$ системы, дополненная столбцом свободных членов

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Решением системы называется *n* значений неизвестных $x_1 = c_1$, $x_2 = c_2$, … , $x_n = c_n$, при подстановке которых все уравнения системы обращаются в верными равенства. Всякое решение системы можно записать в виде матрицы-столбца

$$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix}$$

Система уравнений называется ***совместной***, если она имеет хотя бы одно решение, и ***несовместимой***, если она не имеет ни одного решения.

Совместная система называется *определённой*, если она имеет единственное решение, и *неопределённой*, если она имеет более одного решения. В последнем случае каждое её решение называется *частным решением* системы. Совокупность всех частных решений называется *общим решением*.

Решить систему – это значит выяснить, совместна она или несовместна. Если система совместна, найти её общее решение.

Две системы называются *эквивалентными* (равносильными), если они имеют одно и то же общее решение. Другими словами, системы эквивалентны, если каждое решение одной из них является решением другой, и наоборот.

Эквивалентные системы получаются, в частности, при *элементарных преобразованиях* системы при условии, что преобразования выполняются лишь над строками матрицы.

Система линейных уравнений называется *однородной,* если все свободные члены равны нулю:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Однородная система всегда совместна, так как $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ является решением системы. Это решение называется *нулевым* или *тривиальным.*

Пример 4.3. Решить систему $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + 3x_2 = 7 \end{cases}$

Решение: $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7 \neq 0,\ \Delta_{1=} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 7, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 14$

Значит,$x_1 = \frac{7}{7} = 1,\ x_2 = \frac{14}{7} = 2$

Правило Крамера

Теорема.*Система из n уравнений с n неизвестными*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

в случае, если определитель матрицы системы не равен нулю, имеет единственное решение и это решение находится по формулам:

$$x_i = \Delta_i/\Delta, \text{ где}$$

$\Delta = detA$, а Δ_i – определитель матрицы, получаемой из матрицы системы заменой столбца J столбцом свободных членов $b_{/}$

Суть ***метода Гаусса*** заключается в последовательном исключении неизвестных.

Рассмотрим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Разделим обе части 1–го уравнения на $a_{11} \neq 0$, затем:

1) умножим на a_{21} и вычтем из второго уравнения
2) умножим на a_{31} и вычтем из третьего уравнения и т.д.

Получим:

$$\begin{cases} x_1 + d_{12}x_2 + \ldots + d_{1n}x_n = d_1 \\ d_{22}x_2 + d_{23}x_3 + \ldots + d_{2n}x_n = d_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ d_{m2}x_2 + d_{m3} + \ldots + d_{mn}x_n = d_m \end{cases}, \quad \text{где} \; d_{1j} = a_{1j}/a_{11}, \; j = 2, 3, \ldots, n+1.$$

$d_{ij} = a_{ij} - a_{i1}d_{1j}$ $\qquad i = 2, 3, \ldots , n; \qquad j = 2, 3, \ldots , n+1.$

Далее повторяем эти же действия для второго уравнения системы, потом – для третьего и т.д.

К элементарным преобразованиям относятся:

1) Прибавление к обеим частям одного уравнения соответствующих частей другого, умноженных на одно и то же число, не равное нулю.
2) Перестановка уравнений местами.
3) Удаление из системы уравнений, являющихся тождествами для всех x.

Минором некоторого элемента a_{ij}определителя *n-го* порядка называется определитель *n* – 1-го порядка, полученный из исходного путём вычёркивания строки и столбца, на пересечении которых находится выбранный элемент. Обозначается m_{ij}.

$$Такесли \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, тоm_{11} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \qquad m_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij}определителя называется его минор, взятый со знаком «плюс», если сумма $i + j$– чётное число, и со знаком «минус», если эта сумма нечётная. Обозначается A_{ij}: $A_{ij} = (-1)^{i+j} * m_{ij}$.

Так, $A_{11} = +m_{11}$, $A_{32} = -m_{32}$.

Свойство(«Разложение определителя по элементам некоторого ряда»). Определитель равен сумме произведений элементов некоторого ряда на соответствующие им алгебраические дополнения.

Проиллюстрируем и одновременно докажем свойство 7 на примере определителя 3-его порядка. В этом случае свойство 7 означает, что

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} * A_{11} + a_{12} * A_{12} + a_{13} * A_{13}$$

В самом деле, имеем $a_{11} * A_{11} + a_{12} * A_{12} + a_{13} * A_{13} == a_{11} * \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} * \left(-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}\right) + a_{13} ** \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) =$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} = \Delta$$

Свойство содержит в себе способ вычисления определителей высоких порядков.

Пример Вычислите определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 & 8 \\ -1 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

Решение: Для разложения определителя обычно выбирают тот ряд, где есть нулевые элементы, т.к. соответствующие им слагаемые в разложении будут равны нулю. $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 8 \\ -1 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 3 * \begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 5 & 3 & 2 \\ -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} + 1 * \begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 5 & 3 & 2 \\ -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} + 0 * \begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 7 & 0 & 1 \\ -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} - 1 * \begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 7 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3 * (7 * 3 * 4 + (-1) * 0 * 2 + 5 * 7 * 1 - (-1) * 3 * 1 - 7 * 7 * 2 - 5 * 0 * 4) + (5 * 3 * 4 + (-1) * 7 * 2 + 5 * 7 * 8 - (-1) * 3 * 8 - 5 * 7 * 4 - 5 * 7 * 2) - (5 * 0 * 2 + 7 * 1 * 5 + 7 * 3 * 8 - 5 * 0 * 8 - 3 * 1 * 5 - 7 * 7 * 2) = 122$

Свойство . Сумма произведений элементов какого- либо ряда определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов параллельного ряда равна нулю.

Так, например, $a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = 0$

Нахождение обратной матрицы.

Пусть А – квадратная матрица *n*-го порядка$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$

Квадратная матрица А называется ***невырожденной,*** если определительΔ = det A не равен нулю: Δ = det A = 0. В противном случае (Δ = 0) матрица А называется ***вырожденной.***

Матрицей, ***союзной к матрице*** А, называется матрица

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

где A_{ij} – алгебраическое дополнение элемента a_{ij}данной матрицы А (оно определяется так же, как и алгебраическое дополнение элемента определителя).

Матрица A^{-1} называется ***обратной*** матрице А, если выполняется условие
$A * A^{-1} = A^{-1} * A = E$,
где Е – единичная матрица того же порядка, что и матрица А. Матрица A^{-1} имеет те же размеры, что и матрица А.

Обратная матрица.

Теорема *Всякая невырожденная матрица имеет обратную.*

$$A^{-1} = \frac{A^*}{\det A}, т.е. A^{-1} = \frac{1}{\det A} * \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Отметим *свойства* обратной матрицы:

1. det (A^{-1}) = 1 / det A;
2. $(A * B)^{-1} = B^{-1} * A^{-1}$;
3. $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

ПримерНайти A^{-1}, если А= $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Решение: 1) Находим det A: $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 3 = 5 \neq 0$

2) Находим A^*: $A_{11} = 1$, $A_{21} = -3$, $A_{12} = -(-1) = 1$, $A_{22} = 2$, поэтому $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$3) Находим A^{-1}: $A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 & -3/5 \\ 1/5 & 2/5 \end{pmatrix}$

Проверка:

$$A * A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1/5 & -3/5 \\ 1/5 & 2/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/5 + 3/5 & -6/5 + 6/5 \\ -1/5 + 1/5 & 3/5 + 2/5 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

ПримерОпределить, при каких значениях α существует матрица, обратная данной

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ \alpha & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение: Всякая невырожденная матрица имеет обратную. Найдём определитель матрицы А:

$$\Delta A=\begin{vmatrix}1 & -2 & 2\\ \alpha & 3 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix}=3-0+2\alpha-12-0+2\alpha=4\alpha-9$$

Если 4α – 9 = 0, т.е. α = 9/4, то ΔA = 0, т.е. матрица А невырожденная, имеет обратную.

ПримерПоказать, что матрица А является обратной для В, если

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 6\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}3 & -3 & 1\\ -3 & 5 & -2\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}$$

Решение: Найдём произведение матиц А и В:

$$A*B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 6\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}3 & -3 & 1\\ -3 & 5 & -2\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3-3+1 & -3+5-2 & 1-2+1\\ 3-6+3 & -3+10-6 & 1-4+3\\ 3-9+6 & -3+15-12 & 1-6+6\end{pmatrix}==\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E$$

Аналогично В * А = Е. Следовательно, матрица А является обратной для В.

Пусть дана система *n* линейных уравнений с *n* неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots a_{nn}x_n=b_n\end{cases}$$

или в матричной форме А * Х = В.

Основная матрица А такой системы квадратная. Определитель этой матрицы

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_{11} & \dots & a_{1n}\\ \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

называется *определителем системы.* Если определитель системы отличен от нуля, то система называется *невырожденной.*

Найдём решение данной системы уравнений в случае Δ ≠ 0.

Умножив обе части уравнения А * Х = В слева на матрицу A^{-1} , получим A^{-1} * А * Х = A^{-1} * В. Поскольку A^{-1} * А = Е и Е * Х = Х, то Х = A^{-1} * В.

Отыскание решения системы по формуле (4.1) называют *матричным способом* решения системы.

Задания для выполнения практической работы

Задание 1

Даны определители: 1) $\Delta=\begin{vmatrix}2 & 1 & 1 & \kappa_1\\ 1 & 2 & 3 & 5\\ 3\kappa_2 & 2 & 1 & 4\\ -2 & 1 & 3 & -3\end{vmatrix}$, 2) $\Delta=\begin{vmatrix}1 & -2 & 1 & \kappa_2\\ -2 & 3 & \kappa_1 & 2\\ 1 & -3 & -2 & 4\\ 1 & 2 & 3 & 4\end{vmatrix}$,

1) Найти миноры и алгебраические дополнения элементов a_{i3}, a_{2j}
2) **2)** Вычислить определители, разложив их по элементам а) i-ой строки, б) j-го столбца

Вариант	κ_1	κ_2	**i**	**j**	**Вариант**	κ_1	κ_2	**i**	**j**
1	3	-2	1	2	**16**	4	-1	2	1
2	4	1	2	1	**17**	5	1	1	2
3	3	-4	1	3	**18**	2	0	3	1
4	2	1	3	4	**19**	-2	1	4	3
5	3	-3	4	1	**20**	2	-2	1	4
6	1	5	2	2	**21**	0	7	2	2
7	-2	3	1	4	**22**	-1	4	4	1
8	6	-2	4	3	**23**	-3	3	3	4
9	-6	1	2	1	**24**	-4	1	1	2
10	-5	1	1	1	**25**	0	8	1	1
11	-2	4	3	2	**26**	4	-2	2	3
12	1	3	4	3	**27**	-1	3	3	4
13	-3	2	2	4	**28**	2	-3	4	2
14	-4	-1	1	2	**29**	-2	5	2	1
15	-1	5	3	1	**30**	-5	-1	1	3

Задание 2. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} \kappa_1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & -\kappa_2 & 4 \end{pmatrix}$. Найти

$а) A^{-1}\ и\ проверить,\ что\ A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$

$б)\ A + A^{-1}$

Вариант	κ_1	κ_2	***Вариант***	κ_1	κ_2

1	3	-2	***16***	4	-1
2	4	1	***17***	5	1
3	3	-4	***18***	2	0
4	2	1	***19***	-2	1
5	3	-3	***20***	2	-2
6	1	5	***21***	0	7
7	-2	3	***22***	-1	4
8	6	-2	***23***	-3	3
9	-6	1	***24***	-4	1
10	-5	1	***25***	0	8
11	-2	4	***26***	4	-2
12	1	3	***27***	-1	3
13	-3	2	***28***	2	-3
14	-4	-1	***29***	-2	5
15	-1	5	***30***	-5	-1

Задание 3

1. Решить системы уравнений с помощью обратной матрицы (матричным методом).

$$1.1.\begin{cases}2x+y+3z=7,\\2x+3y+z=1,\\3x+2y+z=6.\end{cases}\qquad 1.2.\begin{cases}2x-y+2z=3,\\x+y+2z=-4,\\4x+y+4z=-3.\end{cases}\qquad 1.3.\begin{cases}3x-y+z=12,\\x+2y+4z=6,\\5x+y+2z=3.\end{cases}$$

$$1.4.\begin{cases}2x-y+3z=-4,\\x+3y+3z=11,\\x-2y+2z=-7.\end{cases}\qquad 1.5.\begin{cases}3x-2y+4z=12,\\3x+4y-2z=6,\\2x-y-z=-9.\end{cases}\qquad 1.6.\begin{cases}8x+3y-6z=-4,\\x+y-z=2,\\4x+y-3z=-5.\end{cases}$$

$$1.7.\begin{cases}4x+y-3z=9,\\x+y-z=-2,\\8x+3y-6z=12.\end{cases}\qquad 1.8.\begin{cases}2x+3y+4z=33,\\7x-5y=24,\\4x+11z=39.\end{cases}\qquad 1.9.\begin{cases}2x+3y+4z=12,\\7x-5y+z=-33,\\4x+z=-7.\end{cases}$$

1.10. $\begin{cases} x+4y-z=6, \\ 5y+4z=-20, \\ 3x-2y+5z=-22. \end{cases}$ 1.11. $\begin{cases} 3x-2y+4z=21, \\ 3x+4y-2z=9, \\ 2x-y-z=10. \end{cases}$ 1.12. $\begin{cases} 3x-2y-5z=5, \\ 2x+3y-4z=12, \\ x-2y+3z=-1. \end{cases}$

1.13. $\begin{cases} 4x+y+4z=19, \\ 2x-y+2z=11, \\ x+y+2z=8. \end{cases}$ 1.14. $\begin{cases} 2x-y+2z=0, \\ 4x+y+4z=6, \\ x+y+2z=4. \end{cases}$ 1.15. $\begin{cases} 2x-y+2z=8, \\ x+y+2z=11, \\ 4x+y+4z=22. \end{cases}$

1.16. $\begin{cases} 2x-y-3z=-9, \\ x+5y+z=20, \\ 3x+4y+2z=15. \end{cases}$ 1.17. $\begin{cases} 2x-y-3z=0, \\ 3x+4y+2z=1, \\ x+5y+z=-3. \end{cases}$ 1.18. $\begin{cases} -3x+5y+6z=-8, \\ 3x+y+z=-4, \\ x-4y-2z=-9. \end{cases}$

1.19. $\begin{cases} 3x+y+z=-4, \\ -3x+5y+6z=36, \\ x-4y-2z=19. \end{cases}$ 1.20. $\begin{cases} 3x-y+z=-11, \\ 5x+y+2z=8, \\ x+2y+4z=16. \end{cases}$ 1.21. $\begin{cases} 3x-y+z=9, \\ 5x+y+2z=11, \\ x+2y+4z=19. \end{cases}$

1.22. $\begin{cases} 2x+3y+z=4, \\ 2x+y+3z=0, \\ 3x+2y+z=1. \end{cases}$ 1.23. $\begin{cases} 2x+3y+z=12, \\ 2x+y+3z=16, \\ 3x+2y+z=8. \end{cases}$ 1.24. $\begin{cases} x-2y+3z=14, \\ 2x+3y-4z=-16, \\ 3x-2y-5z=-8. \end{cases}$

1.25. $\begin{cases} 3x+4y-2z=11, \\ 2x-y-z=4, \\ 3x-2y+4z=11. \end{cases}$ 1.26. $\begin{cases} x+5y-6z=-15, \\ 3x+y+4z=13, \\ 2x-3y+z=9. \end{cases}$ 1.27. $\begin{cases} 4x-y=-6, \\ 3x+2y+5z=-14, \\ x-3y+4z=-19. \end{cases}$

1.28. $\begin{cases} 5x+2y-4z=-16, \\ x+3z=-6, \\ 2x-3y+z=9. \end{cases}$ 1.29. $\begin{cases} x+4y-z=-9, \\ 4x-y+5z=-2, \\ 3y-7z=-6. \end{cases}$ 1.30. $\begin{cases} 7x+4y-z=13, \\ 3x+2y+3z=3, \\ 2x-3y+z=-10. \end{cases}$

Контрольные вопросы

1. Что называется минором?
2. Что называется алгебраическим дополнением элемента матрицы?
3. Как разложить определитель по элементам столбца или строки?
4. Какая матрица называется невырожденной?
5. Транспонированная матрица.
6. Какая матрица называется обратной по отношению к данной?
7. Каков порядок вычисления обратной матрицы?
8. Алгоритм решения простейшего матричного уравнения

Практическая работа № 18 по теме

«Элементы векторной алгебры»

Цель: Проверить знания и умения по нахождению: координат вектора, операций над векторами, модуля вектора и скалярного произведения, векторного произведения, смешанного произведения.

Время выполнения 90 минут

Материальное обеспечение
1.Теоретические сведения
2.Задание
3.Лист А 4
4.Калькуляторы

Порядок выполнения работы
1.Изучить задание
2. Изучить теоретические сведения
3. Выполнить и оформить работу
4.Показать результаты преподавателю

Домашнее задание
1.Подготовить ответы на контрольные вопросы

Ход работы

Теоретические сведения

Векторное произведение векторов.

Определение.Векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется

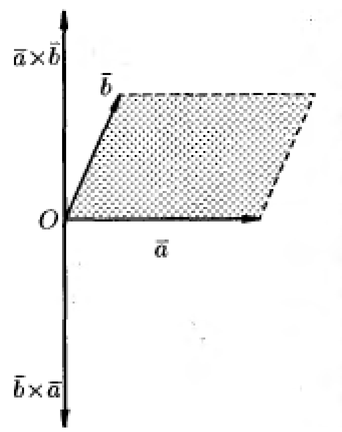
вектор $\vec{c}$, удовлетворяющий следующим условиям:

1) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin\varphi$, где φ - угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, $\sin\varphi \geq 0; \quad 0 \leq \varphi \leq \pi$

2) вектор $\vec{c}$ ортогонален векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$

3) $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют правую тройку векторов.Обозначается: $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$

или $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$.



Свойства векторного произведения векторов:

1) $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$;

2) $\vec{a} \times \vec{b} = 0$, если $\vec{a} \,||\, \vec{b}$ или $\vec{a} = 0$ или $\vec{b} = 0$;

3) $(m\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (m\vec{b}) = m(\vec{a} \times \vec{b})$;

4) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$;

5) Если заданы векторы $\vec{a}\,(x_a, y_a, z_a)$ и $\vec{b}\,(x_b, y_b, z_b)$ в декартовой

прямоугольной системе координат с единичными векторами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, то

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix}$$

6) Геометрическим смыслом векторного произведения векторов является ***площадь параллелограмма***, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

7) Механический смысл векторного произведения . Пусть точка А твердого тела закреплена, а в его точке В приложена сила F. Тогда возникает вращательный момент М (момент силы). По определению момент силы относительно точки А находится по формуле $\overline{M} = \overline{AB} \times \overline{F}$ - векторное произведение векторов $\overline{AB}$ и $\overline{F}$

Приложения векторного произведения векторов.

Установление коллинеарности векторов:

Если $\bar{a} \| \bar{b}$, то $\bar{a} \times \bar{b}$=0 (и наоборот), т.е. :

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \bar{0} \iff \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} \iff \bar{a} \| \bar{b}.$$

Нахождение площади параллелограмма и треугольника.

Согласно определению векторного произведения векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$

$\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin\varphi$, т.е. Sпар.= $|\vec{a} \times \vec{b}|$ и значит, Sтреуг.=1/2*$|\vec{a} \times \vec{b}|$

Пример. Найти векторное произведение векторов $\vec{a} = 2\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$.

$\vec{a}$ = (2, 5, 1); $\vec{b}$ = (1, 2, -3)

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 5 & 1\\ 1 & 2 & -3\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}5 & 1\\ 2 & -3\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & -3\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}2 & 5\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-17\vec{i}+7\vec{j}-\vec{k}\,.$$

Пример. Вычислить площадь треугольника с вершинами A(2, 2, 2), B(4, 0, 3), C(0, 1, 0).

$\overrightarrow{AC}=(0-2;1-2;0-2)=(-2;-1;-2)$

$\overrightarrow{AB}=(4-2;0-2;3-2)=(2;-2;1)$

$$\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -2 & -1 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}-1 & -2\\ -2 & 1\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}-2 & -2\\ 2 & 1\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}-2 & -1\\ 2 & -2\end{vmatrix}=\vec{i}(-1-4)-\vec{j}(-2+4)+$$

$$+\vec{k}(4+2)=-5\vec{i}-2\vec{j}+6\vec{k}.$$

$\left|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{25+4+36}=\sqrt{65}.$ $\qquad$ $S_{\Delta}=\dfrac{\sqrt{65}}{2}$ (ед^2).

Пример. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}+3\vec{b};\quad 3\vec{a}+\vec{b}$, если $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1;\quad \vec{a}\wedge\vec{b}=30^0$.

$(\vec{a}+3\vec{b})\times(3\vec{a}+\vec{b})=3\vec{a}\times\vec{a}+\vec{a}\times\vec{b}+9\vec{b}\times\vec{a}+3\vec{b}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}+9\vec{b}\times\vec{a}=8\vec{b}\times\vec{a}$

$S=8|\vec{b}||\vec{a}|\sin 30^0=4$ (ед^2).

Смешанное произведение векторов.

<u>**Определение.**</u>**Смешанным произведением** векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется число, равное скалярному произведению вектора $\vec{a}$ на вектор, равный векторному произведению векторов $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Обозначается $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}$ или ($\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$).

Смешанное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}$ по модулю равно объему параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, т.е. $V=\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}\right|$

Свойства смешанного произведения:

1.Смешанное произведение равно нулю, если:а) хоть один из векторов равен нулю;б) два из векторов коллинеарные;в) векторы компланарны.

2. $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{c}\cdot(\vec{b}\times\vec{a})$ смешанное произведение не меняется при циклической перестановке векторов;

3. $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ смешанное произведение не меняется при перестановке знаков векторного и скалярного умножения.

4. $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=(\vec{b},\vec{c},\vec{a})=(\vec{c},\vec{a},\vec{b})=-(\vec{b},\vec{a},\vec{c})=-(\vec{c},\vec{b},\vec{a})=-(\vec{a},\vec{c},\vec{b})$

5. $(\lambda\vec{a}_1+\mu\vec{a}_2,\vec{b},\vec{c})=\lambda(\vec{a}_1,\vec{b},\vec{c})+\mu(\vec{a}_2,\vec{b},\vec{c})$

6. Объем треугольной пирамиды, образованной векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, равен $\frac{1}{6}\left|\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)\right|$

7. Если $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$, $\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$, $\vec{c}=(x_3,y_3,z_3)$, то $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$

8. $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=-\vec{a}\vec{c}\vec{b}=-\vec{b}\vec{a}\vec{c}=\vec{c}\vec{b}\vec{a}$ - смешанное произведение меняет знак на противоположный при перемене мест любых двух векторов-сомножителей

9. Если $\vec{a}\vec{b}\vec{c}>0$, то a,b,c - правая тройка

Пример. Доказать, что точки A(5; 7; 2), B(3; 1; -1), C(9; 4; -4), D(1; 5; 0) лежат в одной плоскости.

Найдем координаты векторов: $\overrightarrow{AB}=(-2;-6;1)$, $\overrightarrow{AC}=(4;-3;-2)$, $\overrightarrow{AD}=(-4;-2;2)$

Найдем смешанное произведение полученных векторов:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix} -2 & -6 & 1 \\ 4 & -3 & -2 \\ -4 & -2 & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -2 & -6 & 1 \\ 0 & -15 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & -6 & 1 \\ 0 & -15 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \end{vmatrix}=0,$$

Таким образом, полученные выше векторы компланарны, следовательно точки A, B, C и D лежат в одной плоскости.

Пример. Найти объем пирамиды и длину высоты, опущенной на грань BCD, если вершины имеют координаты A(0; 0; 1), B(2; 3; 5), C(6; 2; 3), D(3; 7; 2).

Найдем координаты векторов: $\overrightarrow{BA}=(-2;-3;-4)$, $\overrightarrow{BD}=(1;4;-3)$, $\overrightarrow{BC}=(4;-1;-2)$

Объем пирамиды $V=\frac{1}{6}=\begin{vmatrix}-2 & -3 & -4\\ 1 & 4 & -3\\ 4 & -1 & -2\end{vmatrix}=\frac{1}{6}(-2(-8-3)+3(-2+12)-4(-1-16))=$

$$=\frac{1}{6}(22+30+68)=20(ед^3)$$

Для нахождения длины высоты пирамиды найдем сначала площадь основания BCD.

$$\overrightarrow{BD}\times\overrightarrow{BC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 4 & -3\\ 4 & -1 & -2\end{vmatrix}=\vec{i}(-8-3)-\vec{j}(-2+12)+\vec{k}(-1-16)=-11\vec{i}-10\vec{j}-17\vec{k}.$$

$$\left|\overrightarrow{BD}\times\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{11^2+10^2+17^2}=\sqrt{121+100+289}=\sqrt{510}$$

$S_{осн}$ = $\sqrt{510}/2$ (ед^2)

Т.к. V = $\frac{S_{осн}\cdot h}{3}$; $h=\frac{3V}{S_{осн}}=\frac{120}{\sqrt{510}}=\frac{4\sqrt{510}}{17}$.(ед)

Задания практической работы

Задания

1. По координатам точек A, B и C для указанных векторов найти:

a) Координаты векторов $a=AB,\ b=BC,\ c=AC,\ d=BA,\ p=CA$
b) Модуль вектора $\vec{к}=3\vec{a}+\vec{в}-\vec{\mathrm{d}}$
c) Скалярное произведение векторов **a** и **b**;
d) Проекцию вектора **c** на вектор **d**;
e) Координаты точки M, делящей отрезок **p** в отношении α : β

Варианты	**Координаты точки A**	**Координаты точки B**	**Координаты точки C**	**α** α	**β** β
1.	(-2, 1,3)	(3, -6, 2)	(-5, -3, -1)	*1*	*3*
2.	(1, 3, 6)	(-3, 4, -5)	(1, -7, 2)	*1*	*2*
3.	(7, 2, 1)	(5, 1, -2)	(-3, 4, 5)	*2*	*1*
4.	(3, 5, 4)	(-2, 7, -5)	(6, -2, 1)	*3*	*2*
5.	(5, 3, 2)	(2, -5, 1)	(-7, 4, -3)	*2*	*3*
6.	(11, 1, 2)	(-3, 3, 4)	(-4, -2, 7)	*1*	*2*
7.	(9, 5, 3)	(-3, 2, 1)	(4, -7, 4)	*3*	*1*
8.	(7, 2, 1)	(3, -5, 6)	(-4, 3, -4)	*3*	*2*

9.	(1, 2, 3)	(-5, 3, -1)	(-6, 4, 5)	*2*	*1*
10.	(-2, 5, 1)	(3, 2, -7)	(4, -3, 2)	*4*	*1*
11.	(3, 1, 2)	(-4, 3, -1)	(2, 3, 4)	*2*	*1*
12.	(3, -1, 2)	(-2, 4, 1)	(4, -5, - 1)	*1*	*3*
13.	(4, 5, 1)	(1, 3, 1)	(-3, -6, 7)	*3*	*4*
14.	(1, -3, 1)	(-2, -4, 3)	(0, -2, 3)	*2*	*3*
15.	(5, 7, -2)	(-3, 1, 3)	(1, -4, 6)	*4*	*3*
16.	(-l, 4, 3)	(3, 2, -4)	(-2, -7, 1)	*1*	*3*
17.	(5, 4, 1)	(-3, 5, 2)	(2, -1, 3)	*3*	*1*
18.	(2, -1, 4)	(-3, 0, -2)	(4, 5, -3)	*2*	*1*
19.	(-1, 1, 2)	(2, -3, -5)	(-6, 3, -1)	*1*	*2*
20.	(1, 3, 4)	(-2, 5, 0)	(3, -2, -4)	*2*	*3*
21.	(1, -1, 1)	(-5, -3, 1)	(2, -1, 0)	*3*	*2*
22.	(3, 1, 2)	(-7, -2, -4)	(-4, 0, 3)	*2*	*1*
23.	(-3, 0, 1)	(2, 7, -3)	(-4, 3, 5)	*1*	*3*
24.	(5, 1, 2)	(-2, 1, -3)	(4, -3, 5)	*2*	*3*
25.	(0, 2, -3)	(4, -3, -2)	(-5, -4, 0)	*1*	*2*
26.	(3, -1, 2)	(-2, 3, 1)	(4, -5, -3)	*3*	*4*
27.	(5, 3, 1)	(-1, 2, -3)	(3, -4, 2)	*1*	*2*
28.	(3, 1, -3)	(-2, 4, 1)	(1, -2, 5)	*3*	*4*
29.	(6, 1, -3)	(-3, 2, 1)	(-1, -3, 4)	*4*	*3*
30.	(4, 2, 3)	(-3, 1, -8)	(2, -4, 5)	*3*	*2*

Задание 2

1. Даны векторы **a**, **b** и **c.** Необходимо:

а) вычислить смешанное произведение трех векторов;
б) найти модуль векторного произведения;
в) вычислить скалярное произведение двух векторов;
г) проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны два вектора;
д) проверить, будут ли компланарны три вектора.

Вариант	Векторы	Смешанное произведение	Модуль векторн произвед.	Скалярное произвед	Коллинеарны или перпенд.к векторов	Компланарность векторов
1	$a = 2i - 3j + k$, $b = j + 4k$, $c = 5i + 2j - 3k$	$a, 3b, c$	$3a, 2c$	$b, -4c$	$a,\ c$	$a, 2b, 3c$

2	$a = 3i + 4j + k,$ $b = i - 2j + 7k,$ $c = -3i - 6j + 21k$	$5a, 2b, c$	$4b, 2c$	a, c	b, c	$2a, -3b, c$
3	$a = 2i - 4j - 2k,$ $b = 7i + 3j,$ $c = 3i + 5j - 7k$	$a, 2b, 3c$	$3a, -7в$	$-2a, c$	a, c	$3a, 2b, 3c$
4	$a = -7i + 2k,$ $b = 2i - 6j + 4k,$ $c = i - j + 2k$	$a, -2b, -7c$	$4b, 3c$	$2a, -7c$	b, c	$2a, 4b, 3c$
5	$a = -4i + 2j - k,$ $b = 3i + 5j - 2k,$ $c = j + 5k$	$a, 6b, 3c$	$a, 2b$	$a, -4c$	a, b	$a, 6b, 3c$
6	$a = 3i - 2j + k,$ $b = 2j - 3k,$ $c = -3i + 2j - k$	$a, -3b, 2c$	$5a, 3c$	$-2a, 4b$	a, c	$5a, 4b, 3c$
7	$a = i - j + 3k,$ $b = 2i + 3j - 5k,$ $c = 7i + 2j + 4k$	$7a, -4b, 2c$	$3a, 5c$	$2b, 4c$	b, c	$7a, 2b, 5c$
8	$a = 4i + 2j - 3k,$ $b = 2i + k,$ $c = -12i - 6j + 9k$	$2a, 3b, c$	$4a, 3b$	$b, -4c$	a, c	$2a, 3b, -4c$
9	$a = -i + 5k,$ $b = -3i + 2j + 2k,$ $c = -2i - 4j + k$	$3a, -4b, 2c$	$7a, -3c$	$2b, 3a$	$в, c$	$7a, 2b, -3c$
10	$a = 6i - 4j + 6k,$ $b = 9i - 6j + 9k,$ $c = i - 8k$	$2a, -4b, 3c$	$3b, -9c$	$3a, -5c$	a, b	$3a, -4b, -9c$

11	$a=5i-3j+4k$, $b=2i-4j-2k$, $c=3i+5j-7k$	$a,-4b,2c$	$-2b,4c$	$-3a,6c$	b,c	$a,-2b,6c$
12	$a=-4i+3j-7k$, $b=4i+6j-2k$, $c=6i+9j-3k$	$-2a,b,-2c$	$4b,7c$	$5a,-3b$	b,c	$-2a,4b,7c$
13	$a=-5i+2j-2k$, $b=7i-5k$, $c=2i+3j-2k$	$2a,4b,-5c$	$-3b,11c$	$8a,-6c$	$a,\ c$	$8a,-3b,11c$
14	$a=-4i-6j+2k$, $b=2i+3j-k$, $c=-i+5j-3k$	$5a,7b,2c$	$-4b,11a$	$3a,-7c$	a,b	$3a,7b,-2c$
15	$a=-4i+2j-3k$, $b=-3j+5k$, $c=6i+6j-4k$	$5a,-b,3c$	$-7a,4c$	$3a,9b$	$a,\ c$	$3a,-9b,4c$
16	$a=-3i+8j$, $b=2i+3j-2k$, $c=8i+12j-8k$	$4a,-6b,5c$	$-7a,9c$	$3b,-8c$	b,c	$4a,-6b,9c$
17	$a=2i-4j-2k$, $b=-9i+2k$, $c=3i+5j-7k$	$7a,5b,-c$	$-5a,4b$	$3b,-8c$	$a,\ c$	$7a,5b,-c$
18	$a=9i-3j+k$, $b=3i-15j+21k$, $c=i-5j+k$	$2a,-7b,3c$	$-6a,4c$	$5b,7a$	b,c	$2a,-7b,4c$
19	$a=-2i+4j-3k$, $b=5i+j-2k$, $c=7i+4j-k$	$a,-6b,2c$	$-8b,5c$	$-9a,7c$	a,b	$a,-6b,5c$

20	$a=-9i+4j-5k$, $b=i-2j+4k$, $c=-5i+10j-20k$	$-2a,7b,5c$	$-6b,7c$	$9a,4c$	b,c	$-2a,7b,4c$
21	$a=2i-7j+5k$, $b=-i+3j-6k$, $c=3i+2j-4k$	$-3a,6b,-c$	$5b,3c$	$7a,-4b$	b,c	$7a,-4b,3c$
22	$a=7i-4j-5k$, $b=i-11j+3k$, $c=5i+5j+3k$	$3a,-7b,2c$	$2b,6c$	$-4a,-5c$	$a,\ c$	$-4a,2b,6c$
23	$a=4i-6j-2k$, $b=-2i+3j+k$, $c=3i-5j+7k$	$6a,3b,8c$	$-7b,6a$	$-5a,\ 4c$	a,b	$-5a,3b,4c$
24	$a=3i-j+2k$, $b=-i+5j-4k$, $c=6i-2j+4k$	$4a,-7b,-2c$	$6a,-4c$	$-2a,5b$	$a,\ c$	$6a,-7b,-2c$
25	$a=-3i-j-5k$, $b=2i-4j+8k$, $c=3i+7j-k$	$2a,-b,3c$	$-9a,4c$	$5b,-6c$	b,c	$2a,5b,-6c$
26	$a=-3i+2j+7k$, $b=i-5k$, $c=6i+4j-k$	$-2a,b,7c$	$5a,-2c$	$3b,c$	$a,\ c$	$-2a,3b,7c$
27	$a=3i-j+5k$, $b=2i-4j+6k$, $c=i-2j+3k$	$-3a,4b,-5c$	$6b,3c$	$a,4c$	b,c	$-3a,4b,-5c$
28	$a=4i-5j-4k$, $b=5i-j$, $c=2i+4j-3k$	$a,7b,-2c$	$-5a,4b$	$8c,-3a$	$a,\ c$	$-3a,4b,8c$

29	$a = -9i + 4k,$ $b = 2i - 4j + 6k,$ $c = 3i - 6j + 9k$	$3a, -5b, -4c$	$6b, 2c$	$-2a, 8c$	b, c	$3a, 6b, -4c$
30	$a = 5i - 6j - k,$ $b = 4i + 8j - 7k,$ $c = 3j - 4k$	$5a, 3b, -4c$	$4b, a$	$7a, -2c$	a, b	$5a, 4b, -2c$

Контрольные вопросы

1. Что называется вектором?
2. Какие векторы называются коллинеарными?
3. Что называется координатами вектора?
4. Как найти координаты вектора, заданного двумя точками?
5. Как найти длину вектора, заданного своими координатами?
6. Запишите формулы деления отрезка в данном отношении.
7. Как найти скалярное произведение векторов?
8. Как найти векторное произведение векторов?
9. Как найти смешанное произведение векторов?

Практическая работа № 19

Тема «Составление уравнения прямой на плоскости»

Цель:научиться составлять   уравнение прямых, находить угол между прямыми,выполнять построения.

Время выполнения   90 минут

Материальное обеспечение
1.Теоретические сведения
2.Задание
3.Лист А 4
4.Калькуляторы
Порядок выполнения работы
1.Изучить задание
2. Изучить теоретические сведения
3. Выполнить и оформить работу
4.Показать результаты преподавателю
Домашнее задание
1.Подготовить ответы на контрольные вопросы

Ход работы

Теоретические сведения

Уравнение прямой на плоскости.

Определение. Любая прямая на плоскости может быть задана уравнением первого порядкаAx + By + C = 0,причем постоянные А, В не равны нулю одновременно, т.е. $A^2 + B^2 \neq 0$. Это уравнение первого порядка называют **общим уравнением прямой.**

В зависимости от значений постоянных А,В и С возможны следующие частные случаи:

- C = 0, А ≠ 0, В ≠ 0 – прямая проходит через начало координат
- А = 0, В ≠ 0, С ≠ 0 { By + C = 0}- прямая параллельна оси Ох
- В = 0, А ≠ 0, С ≠ 0 { Ax + C = 0} – прямая параллельна оси Оу
- В = С = 0, А ≠ 0 – прямая совпадает с осью Оу
- А = С = 0, В ≠ 0 – прямая совпадает с осью Ох

Уравнение прямой может быть представлено в различном виде в зависимости от каких – либо заданных начальных условий.

Уравнение прямой по точке и вектору нормали.

Определение. В декартовой прямоугольной системе координат вектор с компонентами (А, В) перпендикулярен прямой , заданной уравнением Ах + Ву + С = 0.

Пример. Найти уравнение прямой, проходящей через точку А(1, 2) перпендикулярно вектору $\vec{n}$(3, -1).

Составим при А = 3 и В = -1 уравнение прямой: 3х – у + С = 0. Для нахождения коэффициента С подставим в полученное выражение координаты заданной точки А.

Получаем: 3 – 2 + C = 0, следовательно С = -1.

Итого: искомое уравнение: 3х – у – 1 = 0.

Уравнение прямой, проходящей через две точки. Пусть на плоскости заданы две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, тогда уравнение прямой, проходящей через эти точки:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

Если какой- либо из знаменателей равен нулю, следует приравнять нулю соответствующий числитель.

Записанное выше уравнение прямой упрощается:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

если $x_1 \neq x_2$ и $x = x_1$, если$x_1 = x_2$.

Дробь $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ = k называется **угловым коэффициентом** прямой.

Пример. Найти уравнение прямой, проходящей через точки A(1, 2) и B(3, 4).

Применяя записанную выше формулу, получаем:

$$y - 2 = \frac{4-2}{3-1}(x-1)$$
$$y - 2 = x - 1$$
$$x - y + 1 = 0$$

Уравнение прямой по точке и угловому коэффициенту.

Если общее уравнение прямой Ах + Ву + С = 0 привести к виду:

$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$ и обозначить $-\frac{A}{B} = k; \quad -\frac{C}{B} = b; \quad т.е. \quad y = kx + b$, то полученное уравнение называется **уравнением прямой с угловым коэффициентом**

Уравнение прямой по точке и направляющему вектору.

По аналогии с пунктом, рассматривающим уравнение прямой через вектор нормали можно ввести задание прямой через точку и направляющий вектор прямой.

Определение. Каждый ненулевой вектор $\vec{a}$ (α_1, α_2), компоненты которого удовлетворяют условию $A\alpha_1 + B\alpha_2 = 0$ называется направляющим вектором прямойАх + Ву + С = 0.

Пример. Найти уравнение прямой с направляющим вектором $\vec{a}$ (1, -1) и проходящей через точку А(1, 2).

Уравнение искомой прямой будем искать в виде: Ax + By + C = 0. В соответствии с определением, коэффициенты должны удовлетворять условиям:1·A + (-1)·B = 0, т.е. А = В.

Тогда уравнение прямой имеет вид: Ax + Ay + C = 0, или x + y + C/A = 0.

при х = 1, у = 2 получаем С/A = -3, т.е. искомое уравнение:

x + y - 3 = 0

Уравнение прямой в отрезках

Если в общем уравнении прямой Ах + Ву + С = 0 С $\neq$ 0, то, разделив на – С, получим: $-\frac{A}{C}x-\frac{B}{C}y=1$ или

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1, \text{ где}$$

$$a=-\frac{C}{A};\quad b=-\frac{C}{B}$$

Геометрический смысл коэффициентов в том, что коэффициент a является координатой точки пересечения прямой с осью Ох, а b – координатой точки пересечения прямой с осью Оу.

Пример. Задано общее уравнение прямой х – у + 1 = 0. Найти уравнение этой прямой в отрезках.

С = 1, $-\frac{x}{1}+\frac{y}{1}=1$,   a = -1, b = 1.

Нормальное уравнение прямой.

Если обе части уравнения Ах + Ву + С = 0 разделить на число $\mu=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$, которое называется **нормирующем множителем**, то получим

$x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0$ –нормальное уравнение прямой.

Знак $\pm$ нормирующего множителя надо выбирать так, чтобы $\mu\cdot C < 0$.

р – длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую, а φ - угол, образованный этим перпендикуляром с положительным направлением оси Ох.

Пример. Дано общее уравнение прямой 12х – 5у – 65 = 0. Требуется написать различные типы уравнений этой прямой.

уравнение этой прямой в отрезках: $\frac{12}{65}x-\frac{5}{65}y=1$

$$\frac{x}{(65/12)}+\frac{y}{(-13)}=1$$

уравнение этой прямой с угловым коэффициентом: (делим на 5)

$$y=\frac{12}{5}x-\frac{65}{5}=\frac{12}{5}x-13.$$

нормальное уравнение прямой:

$\mu=\frac{1}{\sqrt{12^2+(-5)^2}}=\frac{1}{13}$ $\frac{12}{13}x-\frac{5}{13}y-5=0$; $\cos\varphi = 12/13$; $\sin\varphi = -5/13$; $p = 5$.

Следует отметить, что не каждую прямую можно представить уравнением в отрезках, например, прямые, параллельные осям или проходящие через начало координат.

Пример. Прямая отсекает на координатных осях равные положительные отрезки. Составить уравнение прямой, если площадь треугольника, образованного этими отрезками равна 8 см^2.

Уравнение прямой имеет вид: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, a = b = 1; ab/2 = 8; a = 4; -4.

a = -4 не подходит по условию задачи.

Итого: $\frac{x}{4}+\frac{y}{4}=1$ или x + y – 4 = 0.

Пример. Составить уравнение прямой, проходящей через точку А(-2, -3) и начало координат.

Уравнение прямой имеет вид: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$, где $x_1 = y_1 = 0$; $x_2 = -2$; $y_2 = -3$.

$\frac{x-0}{-2-0}=\frac{y-0}{-3-0}$; $\frac{x}{-2}=\frac{y}{-3}$; $3x-2y=0.$

Угол между прямыми на плоскости.

Определение. Если заданы две прямые $y = k_1x + b_1$, $y = k_2x + b_2$, то острый угол между этими прямыми будет определяться как

$$tg\alpha=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|.$$

Две прямые параллельны, если $k_1 = k_2$.

Две прямые перпендикулярны, если $k_1 = -1/k_2$.

Теорема. *Прямые Ax + By + C = 0 и $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ параллельны, когда пропорциональны коэффициенты $A_1 = \lambda A$, $B_1 = \lambda B$. Если еще и $C_1 = \lambda C$, то прямые совпадают.*

Координаты точки пересечения двух прямых находятся как решение системы двух уравнений.

Уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данной прямой. **Определение.** Прямая, проходящая через точку $M_1(x_1, y_1)$ и перпендикулярная к прямой y = kx + b представляется уравнением:

$$y-y_1=-\frac{1}{k}(x-x_1)$$

Расстояние от точки до прямой.

Если задана точка $M(x_0, y_0)$, то расстояние до прямой $Ax + By + C = 0$ определяется как $d = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

Пример. Определить угол между прямыми: $y = -3x + 7$; $y = 2x + 1$.

$K_1 = -3$; $k_2 = 2$ $\qquad$ $tg\varphi = \left|\dfrac{2-(-3)}{1-(-3)2}\right| = 1$; $\varphi = \pi/4$.

Пример. Показать, что прямые $3x - 5y + 7 = 0$ и $10x + 6y - 3 = 0$ перпендикулярны.
Находим: $k_1 = 3/5$, $k_2 = -5/3$, $k_1k_2 = -1$, следовательно, прямые перпендикулярны.
Пример. Даны вершины треугольника A(0; 1), B(6; 5), C(12; -1). Найти уравнение высоты, проведенной из вершины С.
Находим уравнение стороны АВ: $\dfrac{x-0}{6-0} = \dfrac{y-1}{5-1}$; $\dfrac{x}{6} = \dfrac{y-1}{4}$; $4x = 6y - 6$; $2x - 3y + 3 = 0$; $y = \dfrac{2}{3}x + 1$.

Искомое уравнение высоты имеет вид: $Ax + By + C = 0$ или $y = kx + b$.$k = -\dfrac{3}{2}$. Тогда $y = -\dfrac{3}{2}x + b$. Т.к. высота проходит через точку С, то ее координаты удовлетворяют данному уравнению: $-1 = -\dfrac{3}{2}12 + b,$ откуда $b = 17$. Итого: $y = -\dfrac{3}{2}x + 17$.

Ответ: $3x + 2y - 34 = 0$.

Задания к практической работе

1. Даны вершины треугольника АВС: $A(x_1, y_1),\ B(x_2, y_2),\ C(x_3, y_3)$ **Найти:**

а) уравнение стороны АВ;

б) уравнение высоты СН;

в) уравнение медианы АМ;

г) уравнение биссектрисы ВС;

д) точку N пересечения медианы АМ и высоты СН;

е) уравнение прямой, проходящей через вершину С параллельно стороне АВ;

ж)угол между прямыми АВ и АС.

Варианты	$A(x_1, y_1)$	$B(x_2, y_2)$	$C(x_3, y_3)$
1	A (-2, 4)	B (3, 1)	C (10, 7)
2	A (-3, -2)	B (14, 4)	C (6, 8)
3	A (1, 7)	B (-3, -1)	C (11, -3)
4	A (1, 0)	B (-1, 4)	C (9, 5)
5	A (1, -2)	B (7, 1)	C (3, 7)
6	A (-2, -3)	B (1, 6)	C (6, 1)
7	A (-4, 2)	B (-6, 6)	C (6, 2)
8	A (4, -3)	B (7, 3)	C (1, 10)
9	A (4, -4),	B (8, 2)	C (3, 8)
10	A (-3, -3)	B (5, -7)	C (7, 7)
11	A (1, -6)	B (3, 4)	C (-3, 3)
12	A (-4, 2)	B (8, -6)	C (2, 6)
13	A (-5, 2)	B (0, -4)	C (5, 7)
14	A (4, -4)	B (6, 2)	C (-1, 8)
15	A (-3, 8)	B (-6, 2)	C (0,-5)
16	A (6, -9)	B (10, -1)	C (-4, 1)
17	A (4, 1)	B (-3, -1)	C (7, -3)
18	A (-4, 2)	B (6, -4)	C (4, 10)
19	A (3, -1)	B (11, 3)	C (-6, 2)

20	A (-7, -2)	B (-7, 4)	C (5, -5)
21	A (-1, -4)	B (9, 6)	C (-5, 4)
22	A (10, -2)	B (4, -5)	C (-3, 1)
23	A (-3, -1)	B (-4, -5)	C (8, 1)
24	A (-2, -6)	B (-3, 5)	C (4, 0)
25	A (-7, -2)	B (3, -8)	C (-4, 6)
26	A (0, 2)	B (-7, -4)	C (3, 2)
27	A (7, 0)	B (1, 4)	C (-8, -4)
28	A (1, -3)	B (0, 7)	C (-2, 4)
29	A (-5, 1)	B (8, -2)	C (1, 4)
30	A (2, 5)	B (-3, 1)	C (0, 4)

Контрольные вопросы

1. Запишите уравнения осей координат.
2. Общее уравнение прямой.
3. Условие параллельности и перпендикулярности прямых.
4. Запишите уравнения прямых, параллельных осям координат.
5. Сформулируйте условие параллельности прямых.
6. Сформулируйте условие перпендикулярности прямых.
7. Как найти угол между прямыми?
8. Как найти расстояние между прямыми?

Дополнительные задания

2. Решить следующие задачи

2.1. Найти уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых 3x - 2y - 7 = 0 и x + 3y - 6 = 0 и отсекающей на оси абсцисс отрезок, равный 3. $Ответ: x = 3$

2.2. Найти проекцию точки A(-8, 12) на прямую, проходящую через точки B(2, -3) и

C(-5,1). $Ответ: A_1(-12,5)$

2.3. Даны две вершины треугольника ABC: A(-4, 4), B(4, -12) и точка M(4, 2) пересечения его высот. Найти вершину С. $\mathit{Ответ}: C(8,4)$

2.4.Найти уравнение прямой, отсекающей на оси ординат отрезок, равный 2, и проходящей параллельно прямой 2у - х = 3. $\mathit{Ответ}: x - 2y + 4 = 0$

2.5. Найти уравнение прямой, проходящей через точку А(2, -3) и точку пересечения прямых 2х - у = 5 и х + у = 1. $\mathit{Ответ}: x = 2$

2.6. Доказать, что четырехугольник ABCD - трапеция, если А(3, 6), В(5, 2), С(-1, -3), D(5,5).

2.7. Записать уравнение прямой, проходящей через точку А(3, 1) перпендикулярно к прямой ВС, если В(2, 5), С(1, 0). $\mathit{Ответ}: x + 5y - 8 = 0$

2.8. Найти уравнение прямой, проходящей через точку А(-2, 1) параллельно прямой MN, если M(-3, -2), N(1, 6). $\mathit{Ответ}: 2x - y + 5 = 0$

2.9. Найти точку, симметричную точке М(2, -1) относительно прямой х - 2у + 3 = 0. $\mathit{Ответ}: M_1\left(-\frac{4}{5}; \frac{23}{5}\right)$

2.10. Найти точку О пересечения диагоналей четырехугольника ABCD, если А(-1, -3), В(3, 5), С(5,2), D(3, -5). $\mathit{Ответ}: MO\left(3; \frac{1}{3}\right)$

2.11. Через точку пересечения прямых 6х - 4у + 5 = 0, 2х+ 5у + 8 = 0 провести прямую, параллельную оси абсцисс. $\mathit{Ответ}: y = -1$

2.12. Известны уравнения стороны АВ треугольника АВС 4х + у = 12, его высот ВН 5х - 4у = 12 и АМх + у = 6. Найти уравнения двух других сторон треугольника АВС. $\mathit{Ответ}: 7x - 7y - 16 = 0;\ 4x + 5y - 28 = 0$

2.13. Даны две вершины треугольника ABC: A(-6, 2), B(2, -2) и точка пересечения его высот H(1,2). Найти координаты точки М пересечения стороны АС и высоты ВН. $\mathit{Ответ}: M\left(\frac{10}{17}; \frac{62}{17}\right)$

2.14. Найти уравнения высот треугольника АВС, проходящих через вершины А и В, если А(-4, 2), В(3, -5), С(5, 0).
$\mathit{Ответ}: 7x + 5y + 2 = 0;\ 9x + 2y - 28 = 0$

2.15. Вычислить координаты точки пересечения перпендикуляров, проведенных через середины сторон треугольника, вершинами которого служат точки А(2, 3), В(0, -3), С(6,3). $Ответ: M\left(3; -\frac{2}{3}\right)$

2.16. Составить уравнение высоты, проведенной через вершину А треугольника АВС, зная уравнения его сторон: АВ - 2х - у - 3 = 0, АС -х + 5у - 7 = 0, ВС - 3х - 2у + 13 = 0. $Ответ: 2x + 3y - 7 = 0;$

2.17. Дан треугольник с вершинами А(3, 1), В(-3, -1) и С(5, -12). Найти уравнение и вычислить длину его медианы, проведенной из вершины С.
$Ответ: 2x + y + 2 = 0; \quad d = \frac{54}{\sqrt{17}} \approx 13{,}1$

2.18. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку пересечения прямых 2х + 5у - 8 = 0 и 2х + 3у + 4 = 0.
$Ответ: 6x + 11y = 0;$

2.19. Найти уравнения перпендикуляров к прямой 3х + 5у - 15 = 0, проведенных через точки пересечения данной прямой с осями координат.
$Ответ: 5x - 3y - 25 = 0; \quad 5x + 3y + 9 = 0;$

2.20. Даны уравнения сторон четырехугольника: х - у = 0, х + 3у = 0, х - у - 4 = 0, 3х + у - 12 = 0. Найти уравнения его диагоналей. $Ответ: y = 0; \quad x = 3$

2.21. Составить уравнения медианы СМ и высоты СК треугольника АВС, если А(4, 6), В(-4, 0), С(-1, -4).
$Ответ: 7x - y + 3 = 0 - CM; \quad 4x + 3y + 16 = 0 - CK$

2.22. Через точку Р(5, 2) провести прямую: а) отсекающую равные отрезки на осях координат; б) параллельную оси Ох; в) параллельную оси Оу. $Ответ: x + y - 7 = 0; \; y = 2; \; x = 5$

2.23. Записать уравнение прямой, проходящей через точку А(-2, 3) и составляющей с осью Ох угол: а) 45°, б) 90°, в) 0°.
$Ответ: x - y + 5 = 0 - CM; \quad x + 2 = 0; \; y - 3 = 0$

2.24. Какую ординату имеет точка С, лежащая на одной прямой с точками А(- 6, -6) и В(3, -1) и имеющая абсциссу, равную 3? $Ответ: y = 9$

2.25. Через точку пересечения прямых 2х - 5у - 1 = 0 и х + 4у - 7 = 0 провести прямую, делящую отрезок между точками А(4, -3) и В(-1, 2) в отношении = 2 / 3. $Ответ: 2x - y - 5 = 0;$

2.26. Известны уравнения двух сторон ромба 2x -5y - 1 = 0 и 2x - 5y - 34 = 0 и уравнение одной из его диагоналей x + 3y - 6 = 0. Найти уравнение второй диагонали. $Ответ: 3x - y - 23 = 0;$

2.27. Найти точку E пересечения медиан треугольника, вершинами которого являются точки A(3,1), B(7, 5) и C(5, -3). $Ответ: E(3;1)$

2.28. Записать уравнения прямых, проходящих через точку A(-1, 1) под углом 45° к прямой 2x + 3y = 6. $Ответ: x - 5y + 6 = 0; \quad 5x + y + 4 = 0$

2.29. Даны уравнения высот треугольника ABC 2x - 3y + 1 = 0, x + 2y + 1 = 0 и координаты его вершины A(2, 3). Найти уравнения сторон AB и AC треугольника. $Ответ: 2x - y - 1 = 0 - AB; \quad 3x + 2y - 12 = 0 - AC$

2.30. Даны уравнения двух сторон параллелограмма x - 2y = 0, x - y - 1 = 0 и точка пересечения его диагоналей M(3, -1). Найти уравнения двух других сторон. $Ответ: x - y - 7 = 0; \quad x - 2y - 10 = 0$

Практическая работа № 20

Тема «Составление уравнений кривых второго порядка (окружности, эллипса, гиперболы, параболы)»

Цель: проверить уровень усвоения материала по составлению уравнений кривых второго порядка (окружности, эллипса, параболы, гиперболы).

Время выполнения 90 минут

Материальное обеспечение
1.Теоретические сведения
2.Задание
3.Лист А 4
4.Калькуляторы

Порядок выполнения работы
1.Изучить задание

2. Изучить теоретические сведения
3. Выполнить и оформить работу
4.Показать результаты преподавателю

Домашнее задание

1.Подготовить ответы на контрольные вопросы

Ход работы

Теоретические сведения

Кривая второго порядка может быть задана уравнением

$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$

Существует система координат (не обязательно декартова прямоугольная), в которой данное уравнение может быть представлено в одном из видов, приведенных ниже.

1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ - уравнение эллипса.
2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ - уравнение "мнимого" эллипса.
3) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ - уравнение гиперболы.
4) $a^2x^2 - c^2y^2 = 0$ – уравнение двух пересекающихся прямых.
5) $y^2 = 2px$ – уравнение параболы.
6) $y^2 - a^2 = 0$ – уравнение двух параллельных прямых.
7) $y^2 + a^2 = 0$ – уравнение двух "мнимых" параллельных прямых.
8) $y^2 = 0$ – пара совпадающих прямых.
9) $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ – уравнение окружности.

Окружность.

Определение. *Окружностью* называется множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки (*центра*).

В окружности $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$(1) центр имеет координаты (a; b).

Пример. Найти координаты центра и радиус окружности, если ее уравнение задано в виде:

$$2x^2 + 2y^2 - 8x + 5y - 4 = 0.$$

Для нахождения координат центра и радиуса окружности данное уравнение необходимо привести к виду (1)Для этого выделим полные квадраты:

$$x^2 + y^2 - 4x + 2,5y - 2 = 0$$

$$x^2 – 4x + 4 – 4 + y^2 + 2{,}5y + 25/16 – 25/16 – 2 = 0$$

$$(x – 2)^2 + (y + 5/4)^2 – 25/16 – 6 = 0$$

$$(x – 2)^2 + (y + 5/4)^2 = 121/16$$

Отсюда находим O(2; -5/4); R = 11/4.

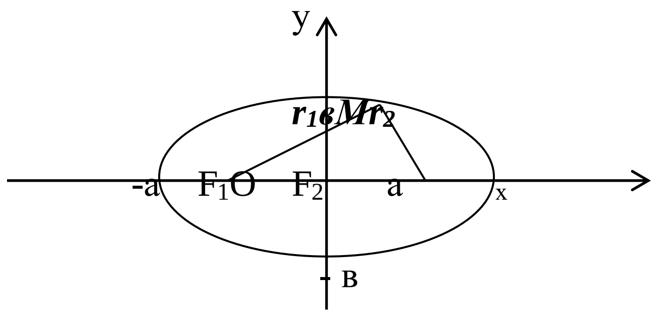
Эллипс

Определение. *Эллипсом* называется множество точек плоскости, сумма расстояний которых до двух данных точек, называемых *фокусами*, есть величина постоянная, равная 2a.

Уравнение эллипса имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Определение. Фокусами называются такие две точки, сумма расстояний от которых до любой точки эллипса есть постоянная величина.



F_1, F_2 – фокусы. $F_1 = (c; 0)$; $F_2(-c; 0)$

c – половина расстояния между фокусами;

a – большая полуось;

b – малая полуось.

Фокусное расстояние и полуоси эллипса связаны соотношением $a^2 = b^2 + c^2$.

Доказательство: В случае, если точка М находится на пересечении эллипса с вертикальной осью, $r_1 + r_2 = 2\sqrt{b^2 + c^2}$ (по теореме Пифагора). В случае, если точка М находится на пересечении эллипса с горизонтальной осью, $r_1 + r_2 = a – c + a + c$. Т.к. по определению сумма $r_1 + r_2$ – постоянная величина, то , приравнивая, получаем:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$r_1 + r_2 = 2a.$$

Определение. Форма эллипса определяется характеристикой, которая является отношением фокусного расстояния к большей оси и называется **эксцентриситетом**.

$e = c/a$. Т.к. $c < a$, то $e < 1$.

Пример. Составить уравнение прямой, проходящей через левый фокус и нижнюю вершину эллипса, заданного уравнением: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

1) Координаты нижней вершины: $x = 0$; $y^2 = 16$; $y = -4$.
2) Координаты левого фокуса: $c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 16 = 9$; $c = 3$; $F_2(-3; 0)$.
3) Уравнение прямой, проходящей через две точки:

$$\frac{x-0}{-3-0} = \frac{y+4}{0+4}; \qquad \frac{x}{-3} = \frac{y+4}{4}; \qquad 4x = -3y - 12; \qquad 4x + 3y + 12 = 0$$

Пример. Составить уравнение эллипса, если его фокусы $F_1(0; 0)$, $F_2(1; 1)$, большая ось равна 2.

Уравнение эллипса имеет вид: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Расстояние между фокусами:

$2c = \sqrt{(1-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2}$, таким образом, $a^2 - b^2 = c^2 = ½$

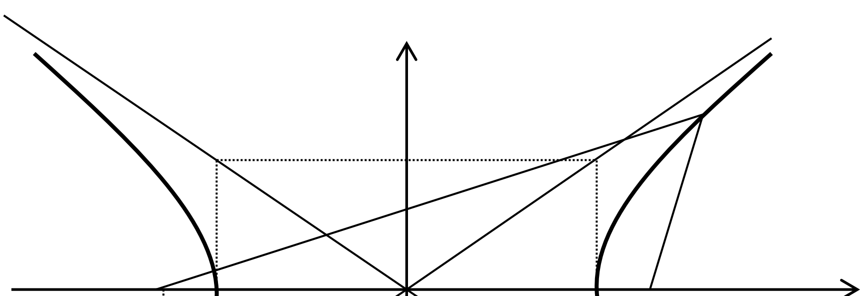
по условию $2a = 2$, следовательно $a = 1$, $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{1 - 1/2} = \sqrt{2}/2$.

Итого: $\frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{1/2} = 1$.

Гипербола.

Определение.Гиперболой называется множество точек плоскости, для которых модуль разности расстояний от двух данных точек, называемых **фокусами** есть величина постоянная, равная 2а, меньшая расстояния между фокусами.

По определению $|r_1 - r_2| = 2a$. F_1, F_2 – фокусы гиперболы. $F_1F_2 = 2c$.



$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ **каноническое уравнение гиперболы.**

Гипербола симметрична относительно середины отрезка, соединяющего фокусы и относительно осей координат.

Ось 2a называется действительной осью гиперболы.

Ось 2b называется мнимой осью гиперболы.

2c – фокусное расстояние

Фокусное расстояние и полуоси гиперболы связаны соотношением

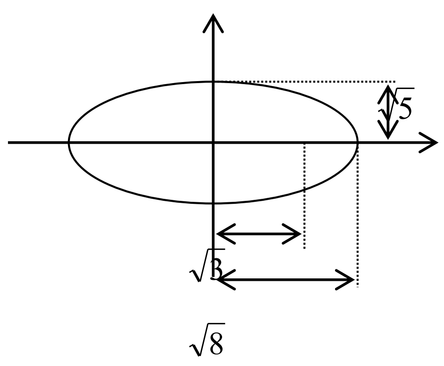
$c^2 = a^2 + b^2$.

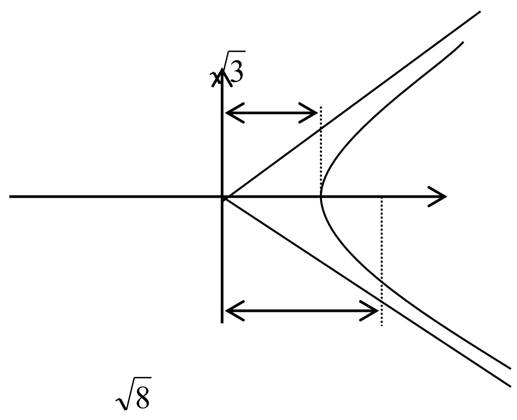
Гипербола имеет две асимптоты, уравнения которых $y = \pm\frac{b}{a}x.$

Отношение $e = \frac{c}{a} > 1$ называется **эксцентриситетом** гиперболы, где с – половина расстояния между фокусами, а – действительная полуось.**Пример.** Найти уравнение гиперболы, вершины и фокусы которой находятся в соответствующих вершинах и фокусах эллипса $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{5} = 1$.

Для эллипса: $c^2 = a^2 – b^2$.

Для гиперболы: $c^2 = a^2 + b^2$.





Уравнение гиперболы: $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{5} = 1$.

Пример. Составить уравнение гиперболы, если ее эксцентриситет равен 2, а фокусы совпадают с фокусами эллипса с уравнением $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$

Находим фокусное расстояние $c^2 = 25 – 9 = 16$.

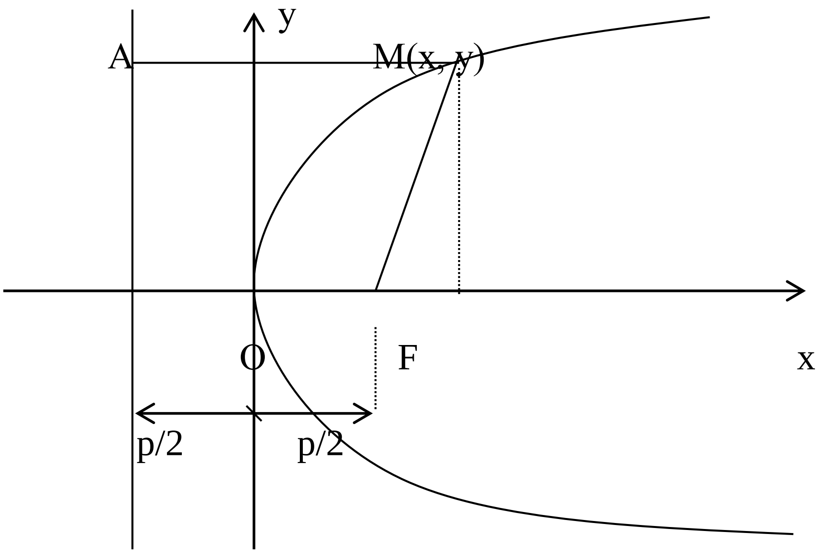
Длягиперболы: $c^2 = a^2 + b^2 = 16$, $e = c/a = 2$;$c = 2a$; $c^2 = 4a^2$; $a^2 = 4$;
$b^2 = 16 – 4 = 12$.

Итого: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ - искомое уравнение гиперболы.

Парабола.

Параболой называется множество точек плоскости, каждая из которых находится на одинаковом расстоянии от данной точки, называемой фокусом, и от данной прямой, называемой директрисой и не проходящей через фокус.

Расположим начало координат посередине между фокусом и директрисой.



Величина p (расстояние от фокуса до директрисы) называется **параметром** параболы. Выведем каноническое уравнение параболы.

Из геометрических соотношений: AM = MF; AM = x + p/2;

$$MF^2 = y^2 + (x – p/2)^2$$

$$(x + p/2)^2 = y^2 + (x – p/2)^2$$

$$x^2 +xp + p^2/4 = y^2 + x^2 – xp + p^2/4$$

$$\mathbf{y^2 = 2px}$$

Уравнение директрисы: x = -p/2.

Пример. На параболе $y^2 = 8x$ найти точку, расстояние которой от директрисы равно 4.

Из уравнения параболы получаем, что p = 4.

r = x + p/2 = 4; следовательно:

x = 2; $y^2 = 16$; y = ±4. Искомые точки: $M_1(2; 4)$, $M_2(2; -4)$.

Пример. Дана парабола $y^2 = 6x$. Составить уравнение ее директрисы и найти ее фокус.

Сравнивая данное уравнение с каноническим уравнением параболы, видим, что 2p=6, p = 3. Так как уравнение директрисы имеет уравнение $x = -\frac{p}{2}$, а фокус – координаты $\frac{p}{2}$ *и 0*, то для рассматриваемого случая получим уравнение директрисы $x = -\frac{3}{2}$ и фокус $F\left(\frac{3}{2}; 0\right)$.

Ответ: $x = -\frac{3}{2}$, $F\left(\frac{3}{2}; 0\right)$.

Задания практической работы

1. Составить канонические уравнения:

а) эллипса; б) гиперболы; в) параболы (A, B - точки, лежащие на кривой, F - фокус, a - большая (действительная) полуось, b - малая (мнимая) полуось, ε - эксцентриситет, y=±kx - уравнения асимптот гиперболы, D - директриса кривой, 2c - фокусное расстояние).

Вариант	Эллипс	Гипербола	Парабола
1.	b = 15, F(-10, 0)	a =13, ε = 14/13	D: x = - 4
2.	b = 2, F($4\sqrt{2}$, 0)	a = 7, ε = $\sqrt{85}/7$	D: x = 5
3.	A(3, 0), B(2, $\sqrt{5}/3$)	k = 3/4, ε = 5/4	D: y = - 2
4.	ε = $\sqrt{21}/5$, A(-5, 0)	A($\sqrt{80}$, 3), B($4\sqrt{6}$, $3\sqrt{2}$)	D: y = 1
5.	2a = 22, ε = $\sqrt{57}/11$	k = 2/3, 2c = $10\sqrt{13}$	ось симметрии Ox и A(27, 9).
6.	b = $\sqrt{15}$, ε = $\sqrt{10}/25$	k = 3/4, 2a = 16	ось симметрии Ox и A(4, -8).
7.	a = 4, F = (3, 0)	b = $2\sqrt{10}$, F(-11, 0)	D: x = -2

8.	b = 4, F = (9, 0)	a = 5, ε = 7/5	D: x = 6
9.	A(0, $\sqrt{3}$), B($\sqrt{14/3}$,1)	k = $\sqrt{21}/10$, ε = 11/10	D: y = -4
10.	ε = 7/8, A(8,0)	A(3, $-\sqrt{3/5}$), B($\sqrt{13/5}$,6)	D: y = 4
11.	2a = 24, ε = $\sqrt{22}/6$	k = $\sqrt{2/3}$, 2c =10	ось симметрии Ox и A(-7, -7).
12.	b = 2, ε = $5\sqrt{29}/29$	k =12/13, 2a = 26	ось симметрии Ox и A(-5, 15).
13.	a = 6, F(-4, 0)	b = 3, F(7, 0)	D: x = -7
14	b = 7, F(5, 0)	a = 11, ε = 12/11	D: x = 10.
15.	A($-\sqrt{17/3}$, 1/3), B($\sqrt{21}/2$, 1/2);	k =1/2, ε = $\sqrt{5}/2$	D: y = -1
16.	ε = 3/5, A(0, 8)	A($\sqrt{6}$, 0), B($-2\sqrt{2}$, 1)	D: y = 9
17.	2a = 22, ε = 10/11	k = $\sqrt{11}/5$, 2c=12	ось симметрии Ox и A(-7, 5).
18.	b = 5, ε = 12/13	k = 1/3, 2a = 6	ось симметрии Oy и A(-9, 6).
19.	a = 9, F(7, 0)	b = 6, F(12, 0)	D: x = -1/4
20.	b = 5, F(-10, 0)	a = 9, ε = 4/3	D: x = 12
21.	A(0, -2), B($\sqrt{15}/2$, 1)	k = $2\sqrt{10}/9$, ε =11/9	D: y = 5

22.	ε = 2/3, A(-6, 0)	A($\sqrt{8}$, 0), B($\sqrt{20}/3$, 2)	D: y = 1
23.	2a = 50, ε = 3/5	k = $\sqrt{29}/14$, 2c = 30	ось симметрии Oy и A(4, 1).
24.	b = $2\sqrt{15}$, ε = 7/8	k = 5/6, 2a = 12	ось симметрии Oy и A(-2, $3\sqrt{2}$).
25.	a =13, F(-5, 0)	b = 44, F(-7, 0)	D: x = -3/8
26.	b = 7, F(13, 0)	b = 4, F(-11, 0)	D: x = 13
27.	A(-3, 0), B(1, $\sqrt{40}/3$)	k = $\sqrt{2/3}$, ε = $\sqrt{15}/3$	D: y = 4
28.	ε = 5/6, A(0, $\sqrt{11}$)	A($\sqrt{32/3}$, 1), B($\sqrt{8}$, 0)	D: y = -3
29.	2a = 30, ε = 17/15	k = $\sqrt{17}/8$, 2c =18	ось симметрии Oy и A(4, -10)
30	b = $2\sqrt{2}$, ε = 7/9	k = $\sqrt{2}/2$, 2a = 12	ось симметрии Oy и A(-45, 15).

2. Записать уравнение окружности, проходящей через указанные точки и имеющей центр в точке А.

2.1. Вершины гиперболы $12x^2 - 13y^2 = 156$, A(0, -2).

2.2. Вершины гиперболы $4x^2 – 9y^2 = 36$, A(0, 4).

2.3. Фокусы гиперболы $24y^2 – 25x^2 = 600$, A(0, -8).

2.4. O(0, 0), A - вершина параболы $y^2 = 3(x - 4)$.

2.5. Фокусы эллипса $9x^2 + 25y^2 = 1$, A(0, 6).

2.6. Левый фокус гиперболы $3x^2 – 4y^2 = 12$, A(0, -3).

2.7. Фокусы эллипса $3x^2 + 4y^2 = 12$, A - его верхняя вершина.

2.8. Вершину гиперболы $x^2 - 16y^2 = 64$, A(0, -2).

2.9. Фокусы гиперболы $4x^2 - 5y^2 = 80$, A(0, -4).

2.10. O(0, 0), A - вершина параболы $y^2 = -(x+5)/2$.

2.11. Правый фокус эллипса $33x^2 + 49y^2 = 1617$, A(1, 7).

2.12. Левый фокус гиперболы $3x^2 - 5y^2 = 30$, A(0, 6).

2.13. Фокусы эллипса $16x^2 - 41y^2 = 656$, A - его нижняя вершина.

2.14. Вершину гиперболы $2x^2 - 9y^2 = 18$, A(0, 4).

2.15. Фокусы гиперболы $5x^2 - 11y^2 = 55$, A(0, 5).

2.16. B(1, 4), A - вершина параболы $y^2 = (x - 4)/3$.

2.17. Левый фокус эллипса $3x^2 + 7y^2 = 21$, A(-1, -3).

2.18. Левую вершину гиперболы $5x^2 – 9y^2 = 45$, A(0, -6).

2.19. Фокусы эллипса $24x^2 – 25y^2 = 600$, A - его верхняя вершина.

2.20. Правую вершину гиперболы $3x^2 - 16y^2 - 48$, A(1, 3).

2.21. Левый фокус гиперболы $7x^2 - 9y^2 = 63$, A(-1, -2).

2.22. B(2, -5), A - вершина параболы $x^2 = -2(y + 1)$.

2.23. Правый фокус эллипса $x^2 + 4y^2 = 12$, A(2, -7).

2.24. Правую вершину гиперболы $40x^2 - 81y^2 = 3240$, A(-2, 5).

2.25. Фокусы эллипса $x^2 + 10y^2 = 90$, A - его нижняя вершина.

2.26. Правую вершину гиперболы $3x^2 - 25y^2 = 75$, A(-5, -2).

2.27. Фокусы гиперболы $4x^2 - 5y^2 = 20$, A(0, -6).

2.28. B(3, 4), A - вершина параболы $y^2 = (x + 7)/4$.

2.29. Левый фокус эллипса $13x^2 + 49y^2 = 837$, A(1, 8).

2.30. Правый фокус гиперболы $57x^2 - 64y^2 = 3648$, A(2, 8).

Контрольные вопросы

1. Запишите каноническое уравнение эллипса.
2. Запишите каноническое уравнение гиперболы.

3. Запишите каноническое уравнение параболы.
4. Что называется эксцетриситетом эллипса?
5. Запишите уравнения асимптот гиперболы.

Печатные издания

1. Григорьев В.П. Элементы высшей математики. –М.: ОИЦ «Академия», 2019.
2. Григорьев В.П. Сборник задач по высшей математике: Учеб. пособие для студентов учрежд. СПО / В.П.Григорьев, Т.Н.Сабурова. – М.: Издательский центр «Академия», 2020. – 160 с.
3. Седых И.Ю., Гребенщиков Ю.Б., Шевелев А.Ю. Математика: учебник и практикум для СПО М.. Издательство Юрайт. 2019.-443 с.

Электронные издания (электронные ресурсы):

1. http://school-collection.edu.ru/

2.. http://fcior.edu.ru/

3. http://college.ru/matematika/

4. http://www.mce.su

5. http://www.exponenta.ru