



---

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ**  
**ФГБОУ ВО «Брянский государственный технический университет»**  
**(БГТУ)**

---

Политехнический колледж (ПК БГТУ)

УТВЕРЖДАЮ

Ректор ФГБОУ ВО БГТУ

\_\_\_\_\_ О.Н. Федонин

«30» 08 2020 г.

**ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ**

по учебной дисциплине

**ЕН.01 Математика**

Специальность:	<b>15.02.08 Технология машиностроения</b>
Уровень образования выпускника:	среднее профессиональное образование (СПО)
Программа подготовки специалиста среднего звена (ППССЗ):	Базовая
Присваиваемая квалификация:	Техник
Форма обучения:	Заочная
Срок получения СПО по ППССЗ:	3 года 10 месяцев
Уровень образования, необходимый для приема на обучение по ППССЗ:	основное общее образование
Год приема на обучение на 1-й курс:	2020

Брянск 2020

# **Фонд оценочных средств**

по учебной дисциплине

**ЕН 01. Математика**

(далее — ФОС)

для специальности **15.02.08 Технология машиностроения**

Разработал(и):

– преподаватель ПК БГТУ

И.П. Парфёнова

ФОС рассмотрен и одобрен на заседании  
предметно-цикловой комиссии « Математика и  
общие естественно- научные дисциплины» ПК  
БГТУ (далее — ПЦК)

от «30» августа 2020г., протокол № 1

Председатель ПЦК

А.А.Алхименкова

Согласовано:

Заместитель директора ПК БГТУ  
по учебно-методической работе

Т.Е.Балашова

© *И.П. Парфёнова*

© ФГБОУ ВО «Брянский государственный  
технический университет»

### **1. Паспорт комплекта контрольно-измерительных материалов**

В результате освоения учебной дисциплины «Математика» обучающийся должен обладать предусмотренными ФГОС по специальности СПО **15.02.08 Технология машиностроения** следующими умениями, знаниями, которые формируют профессиональную компетенцию, и общими компетенциями:

#### **Умения (У):**

У 1 - выполнять операции над матрицами и решать системы линейных уравнений;

У 2 - решать задачи, используя уравнения прямых и кривых второго порядка на плоскости;

У 3 - применять методы дифференциального и интегрального исчисления функций с одной переменной;

У 4- применять методы дифференциального и интегрального исчисления функций нескольких переменных;

У 5 - решать дифференциальные уравнения;

У 6 - пользоваться понятиями теории рядов.

У 7- пользоваться понятиями теории комплексных чисел;

#### **Знания (З):**

З 1- основы математического анализа, линейной алгебры и аналитической геометрии;

З 2- основы дифференциального и интегрального исчисления функций с одной переменной;

З 3- основы дифференциального и интегрального исчисления функций с двумя переменными;

З 4-основы теории рядов.

З 5- основы теории комплексных чисел;

ОК 1 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам

ОК2 Осуществлять поиск, анализ и интерпретацию информации, необходимой для выполнения задач профессиональной деятельности

ОК 9 Использовать информационные технологии в профессиональной деятельности

ОК 10 Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языках

оснащение средствами автоматизации технологических процессов(ПК)

ПК 1.3 Проводить виртуальное тестирование разработанной модели элементов систем автоматизации для оценки функциональности компонентов

ПК 1.4 Формировать пакет технической документации на разработанную модель элементов систем автоматизации

ПК 2.3 Проводить испытания модели элементов систем автоматизации в реальных условиях с целью подтверждения работоспособности и возможной оптимизации

ПК 4.3 Организовывать работы по устранению неполадок, отказов оборудования и ремонту систем в рамках своей компетенции

Формой аттестации по учебной дисциплине является дифференцированный зачет.

## 2. Результаты освоения учебной дисциплины, подлежащие проверке

2.1. В результате аттестации по учебной дисциплине осуществляется комплексная проверка следующих умений и знаний, а также динамика формирования общих компетенций:

Результаты обучения: умения, знания и общие компетенции	Показатели оценки результата	Форма контроля и оценивания
<b>Уметь:</b>		
<b>У 1</b> - выполнять операции над матрицами и решать системы линейных уравнений.  <b>ОК 2.</b> Организовывать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.	<ul style="list-style-type: none"><li>- Выполнение действий над матрицами: сложение, вычитание, умножение, умножение матрицы на число</li><li>-Вычисление определителей</li><li>- Решение систем линейных уравнений методом обратной матрицы</li><li>- Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера</li><li>- Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.</li></ul>	Устный опрос, самостоятельные работы; практические работы, экзамен
<b>У 2</b> - решать задачи, используя уравнения прямых и кривых второго порядка на плоскости.  <b>ОК 2.</b> Организовывать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.	<ul style="list-style-type: none"><li>- Выполнение действий над векторами: сложение и вычитание векторов, умножение вектора на число</li><li>- Нахождение скалярного, векторного и смешанного произведения векторов</li><li>- Составление уравнений прямых и кривых 2 порядка, их построение</li></ul>	Устный опрос, самостоятельные работы; практические работы

<p><b>У 3</b> - применять методы дифференциального и интегрального исчисления для функций с одной переменной</p> <p><b>ОК 2.</b> Организовывать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.</p>	<p>-Вычисление предела функции в точке и в бесконечности  - Исследование функции на непрерывность в точке  -Определение видов точек разрыва- Нахождение производной функции-  Нахождение производной сложной функции-  Применение правила Лопиталя для вычисления пределов  -Разложение элементарных функций в ряд Тейлора и применение для нахождения пределов- Логарифмическое дифференцирование -  Исследование функции с помощью производной и построение графика  - Нахождение неопределенных интегралов (непосредственное интегрирование , интегрирование подстановкой , интегрирование по частям )  -Интегрирование функций, содержащих квадратный трехчлен -  Интегрирование рациональных функций  - Интегрирование рациональных дробей-  Интегрирование тригонометрических функций-Интегрирование иррациональных функций-  Вычисление определенных</p>	<p>Устный опрос, самостоятельные работы; практические работы, экзамен</p>
-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------------------------

	интегралов-Несобственные интегралы-Вычисление площадей фигур с помощью определенного интеграла-Длина дуги-Физическое приложение определенного интеграла	
<p><b>У 4-</b> применять методы дифференциального и интегрального исчисления для функций нескольких переменных</p> <p><b>ОК 2.</b> Организовывать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.</p>	<p>-Производить вычисление пределов функций с двумя переменными</p> <p>-Нахождение частных производных -Нахождение частных производных высших порядков-</p> <p>Применение полного дифференциала к приближенным вычислениям-Нахождение дифференциалов высших порядков-Нахождение производной сложной функции-Нахождение экстремума функции двух переменных-Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах-</p> <p>Вычисление двойного интеграла в полярных координатах-Применение двойного интеграла для вычисления объема тела, площади плоской фигуры, массы неоднородной пластины</p>	Устный опрос, самостоятельные работы; практические работы
<b>У 5 -</b> решать дифференциальные	-Решение дифференциальных уравнений первого порядка	Устный опрос, самостоятельные работы;

<p>уравнения</p> <p><b>ОК 2.</b> Организовывать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.</p>	<p>-Решение дифференциальных уравнений первого порядка с разделяющимися переменными-Решение однородных дифференциальных уравнений первого порядка-Решение линейных уравнений первого порядка-Решение дифференциальных уравнений высшего порядка-Решение уравнений , допускающих понижение порядка-Решение ЛОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами- Решение ЛНДУ второго порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида</p>	<p>практические работы, экзамен</p>
<p><b>У 6 --</b> пользоваться понятиями теории рядов.</p> <p><b>ОК 2.</b> Организовывать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.</p>	<p>-Выполнять исследование рядов на сходимость-Находить радиус сходимости , область сходимости -Выполнять разложение функций в степенные ряды</p>	<p>Устный опрос, самостоятельные работы; практические работы</p>
<p><b>У 7 -</b> пользоваться понятиями теории комплексных чисел;</p> <p><b>ОК 2.</b> Организовывать собственную деятельность,</p>	<p>- Производить действия с комплексными числами в алгебраической, тригонометрической, показательной формах-</p>	<p>Устный опрос, самостоятельные работы; практические работы, экзамен</p>



выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.	Осуществлять геометрическую интерпретацию комплексного числа - Переводить комплексные числа из одной формы в другую-Решать уравнения на множестве комплексных чисел	
<b>Знать:</b>		
<p><b>З1-</b> основы математического анализа, линейной алгебры и аналитической геометрии;</p> <p><b>ОК 1.</b> Понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес.</p> <p><b>ОК 2.</b> Организовывать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.</p>	<p>Воспроизводить алгоритмы решения систем линейных уравнений методом обратной матрицы, по формулам Крамера, методом Гаусса</p> <p>- Воспроизводить Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов</p> <p>- Определять уравнения кривых второго порядка</p>	Устный опрос, самостоятельные работы; практические работы, экзамен

<p><b>32-</b> основы дифференциального и интегрального исчисления функций с одной переменной.</p> <p><b>ОК 2.</b> Организовывать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.</p>	<p>- Воспроизводить методы вычисления пределов, замечательные пределы- Классифицировать точки разрыва функции- Воспроизводить правила дифференцирования и производные основных элементарных функций, сложных функций- Воспроизводить алгоритм построения графиков функций с помощью производной- Называть табличные интегралы -Решать интегралы методом замены переменной, интегрированием почастям- Использовать приложение определенного интеграла к вычислению площадей плоских фигур, объемов тел вращения, пути, пройденного точкой</p>	<p>Устный опрос, самостоятельные работы; практические работы, экзамен</p>
----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------------------------

<p><b>33 – основы</b> дифференциального и интегрального исчисления функций нескольких переменных</p> <p><b>ОК 2.</b> Организовывать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.</p>	<p>- Находить область определения функций двух переменных -Воспроизводить правила нахождения частных производных функций с двумя переменными- Воспроизводить алгоритм нахождения экстремума функции с двумя переменными- Воспроизводить свойства двойных интегралов и правила их вычисления</p>	
<p><b>34-основы теории рядов</b></p> <p><b>ОК 2.</b> Организовывать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.</p>	<p>-Различать ряды по формуле общего члена- Воспроизводить признаки сходимости рядов</p>	<p>Устный опрос, самостоятельные работы; практические работы, экзамен</p>

<b>35 - основы теории комплексных чисел</b>  <b>ОК 2.</b> Организовывать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.	- Представлять комплексного числа в алгебраической, тригонометрической, показательной формах, выполнять действия в них.	Устный опрос, самостоятельные работы; практические работы, экзамен
----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--------------------------------------------------------------------

### 3. Оценка освоения учебной дисциплины

#### 3.1. Формы и методы оценивания

Предметом оценки служат умения и знания, предусмотренные ФГОС по дисциплине «Математик», направленные на формирование общих и профессиональных компетенций.

Оценка освоения дисциплины «Математика» включает текущий контроль успеваемости, промежуточную аттестацию в виде экзамена. Проведение текущего контроля успеваемости осуществляется в форме устных опросов, письменных заданий (самостоятельные работы, тесты), практических работ. Для этих целей формируются фонды оценочных средств, включающие типовые задания, тесты и методы контроля, позволяющие оценить знания, умения и уровень приобретенных компетенций.

# Задания для оценки освоения дисциплины

## Элементы линейной алгебры

### Практическая работа № 1

**Тема «Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера. Решение систем уравнений методом Гаусса»**

**Цель:** научиться вычислять определители 2-го и третьего порядка, решать системы линейных уравнений с помощью определителей, методом Гаусса, формирование вычислительных навыков.

1. Вычислить определители второго порядка: 1)  $\Delta = \begin{vmatrix} -\kappa_1 & 2+\kappa_2 \\ \kappa_1 \cdot \kappa_2 & 5 \end{vmatrix}$ , 2)  $\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\kappa_1}{3} & 5^2 \\ 3 \cdot \kappa_2 & 6 \end{vmatrix}$ ,

3)  $\Delta = \begin{vmatrix} 9^{0,5} & \kappa_1 \cdot 64^{\frac{1}{6}} \\ (0,5)^{-3} & \sqrt{4^2} \end{vmatrix}$

2. Вычислить определители третьего порядка:

1)  $\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 3\kappa_1 & 2 \\ 2 & 8 & \kappa_2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ , 2)  $\Delta = \begin{vmatrix} 3\kappa_2 & 4 & -5 \\ 8 & 7\kappa_2 - 2 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$ , 3)  $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & \kappa_1 \cdot \kappa_2 \\ 3 & \kappa_1 & -5 \\ 2 & \kappa_2 & 5 \end{vmatrix}$

3. Решить систему уравнений методом Крамера, сделать проверку:

1.  $\begin{cases} 2x + y + 3z = 7, \\ 2x + 3y + z = 1, \\ 3x + 2y + z = 6. \end{cases}$  2.  $\begin{cases} 2x - y + 2z = 3, \\ x + y + 2z = -4, \\ 4x + y + 4z = -3. \end{cases}$  3.  $\begin{cases} 3x - y + z = 12, \\ x + 2y + 4z = 6, \\ 5x + y + 2z = 3. \end{cases}$  4.  $\begin{cases} 2x - y + 3z = -4, \\ x + 3y + 3z = 11, \\ x - 2y + 2z = -7. \end{cases}$  5.  $\begin{cases} 3x - 2y + 4z = 12, \\ 3x + 4y - 2z = 6, \\ 2x - y - z = -9. \end{cases}$

6.  $\begin{cases} 8x + 3y - 6z = -4, \\ x + y - z = 2, \\ 4x + y - 3z = -5. \end{cases}$  7.  $\begin{cases} 4x + y - 3z = 9, \\ x + y - z = -2, \\ 8x + 3y - 6z = 12. \end{cases}$  8.  $\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 33, \\ 7x - 5y = 24, \\ 4x + 11z = 39. \end{cases}$  9.  $\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 12, \\ 7x - 5y + z = -33, \\ 4x + z = -7. \end{cases}$

10.  $\begin{cases} x + 4y - z = 6, \\ 5y + 4z = -20, \\ 3x - 2y + 5z = -22. \end{cases}$  11.  $\begin{cases} 3x - 2y + 4z = 21, \\ 3x + 4y - 2z = 9, \\ 2x - y - z = 10. \end{cases}$  12.  $\begin{cases} 3x - 2y - 5z = 5, \\ 2x + 3y - 4z = 12, \\ x - 2y + 3z = -1. \end{cases}$  13.  $\begin{cases} 4x + y + 4z = 19, \\ 2x - y + 2z = 11, \\ x + y + 2z = 8. \end{cases}$

14.  $\begin{cases} 2x - y + 2z = 0, \\ 4x + y + 4z = 6, \\ x + y + 2z = 4. \end{cases}$  15.  $\begin{cases} 2x - y + 2z = 8, \\ x + y + 2z = 11, \\ 4x + y + 4z = 22. \end{cases}$  16.  $\begin{cases} 2x - y - 3z = -9, \\ x + 5y + z = 20, \\ 3x + 4y + 2z = 15. \end{cases}$  17.  $\begin{cases} 2x - y - 3z = 0, \\ 3x + 4y + 2z = 1, \\ x + 5y + z = -3. \end{cases}$

$$18. \begin{cases} -3x+5y+6z=-8, \\ 3x+y+z=-4, \\ x-4y-2z=-9. \end{cases} \quad 19. \begin{cases} 3x+y+z=-4, \\ -3x+5y+6z=36, \\ x-4y-2z=19. \end{cases} \quad 20. \begin{cases} 3x-y+z=-11, \\ 5x+y+2z=8, \\ x+2y+4z=16. \end{cases} \quad 21. \begin{cases} 3x-y+z=9, \\ 5x+y+2z=11, \\ x+2y+4z=19. \end{cases}$$

$$22. \begin{cases} 2x+3y+z=4, \\ 2x+y+3z=0, \\ 3x+2y+z=1. \end{cases} \quad 23. \begin{cases} 2x+3y+z=12, \\ 2x+y+3z=16, \\ 3x+2y+z=8. \end{cases} \quad 24. \begin{cases} x-2y+3z=14, \\ 2x+3y-4z=-16, \\ 3x-2y-5z=-8. \end{cases}$$

$$25. \begin{cases} 3x+4y-2z=11, \\ 2x-y-z=4, \\ 3x-2y+4z=11. \end{cases} \quad 26. \begin{cases} x+5y-6z=-15, \\ 3x+y+4z=13, \\ 2x-3y+z=9. \end{cases} \quad 27. \begin{cases} 4x-y=-6, \\ 3x+2y+5z=-14, \\ x-3y+4z=-19. \end{cases}$$

$$28. \begin{cases} 5x+2y-4z=-16, \\ x+3z=-6, \\ 2x-3y+z=9. \end{cases} \quad 29. \begin{cases} x+4y-z=-9, \\ 4x-y+5z=-2, \\ 3y-7z=-6. \end{cases} \quad 30. \begin{cases} 7x+4y-z=13, \\ 3x+2y+3z=3, \\ 2x-3y+z=-10. \end{cases}$$

<i><b>Вариант</b></i>	$\kappa_1$	$\kappa_2$	<i><b>Вариант</b></i>	$\kappa_1$	$\kappa_2$	<i><b>Вариант</b></i>	$\kappa_1$	$\kappa_2$
<b>1</b>	3	-2	<b>11</b>	4	-1	<b>21</b>	-2	4
<b>2</b>	4	1	<b>12</b>	5	1	<b>22</b>	1	3
<b>3</b>	3	-4	<b>13</b>	2	0	<b>23</b>	-3	2
<b>4</b>	2	1	<b>14</b>	-2	1	<b>24</b>	-4	-1
<b>5</b>	3	-3	<b>15</b>	2	-2	<b>25</b>	-1	5
<b>6</b>	1	5	<b>16</b>	0	7	<b>26</b>	4	-2
<b>7</b>	-2	3	<b>17</b>	-1	4	<b>27</b>	-1	3
<b>8</b>	6	-2	<b>18</b>	-3	3	<b>28</b>	2	-3
<b>9</b>	-6	1	<b>19</b>	-4	1	<b>29</b>	-2	5
<b>10</b>	-5	1	<b>20</b>	0	8	<b>30</b>	-5	-1

### Контрольные вопросы:

1. Что называется определителем матрицы?
2. Как вычислить определитель второго порядка?
3. Какие способы вычисления определителя третьего порядка вам известны?
4. Перечислите свойства определителей.
5. Сформулируйте теорему Крамера.
6. Алгоритм применения метода Гаусса.

## Практическая работа № 2

**Тема:** Решение матричных уравнений, СЛАУ матричным методом.

**Цель:** научиться вычислять миноры, алгебраические дополнения, определители четвертого порядков, находить обратные матрицы, решать простейшие матричные уравнения, СЛАУ матричным методом.

### Задание 1

Даны определители: 1)  $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & \kappa_1 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 3\kappa_2 & 2 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & 3 & -3 \end{vmatrix}$ , 2)  $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & \kappa_2 \\ -2 & 3 & \kappa_1 & 2 \\ 1 & -3 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ ,

- 1) Найти миноры и алгебраические дополнения элементов  $a_{i3}$ ,  $a_{2j}$
- 2) Вычислить определители, разложив их по элементам а) i-ой строки, б) j-го столбца

Вариант	$\kappa_1$	$\kappa_2$	i	j	Вариант	$\kappa_1$	$\kappa_2$	i	j
<b>1</b>	3	-2	1	2	<b>16</b>	4	-1	2	1
<b>2</b>	4	1	2	1	<b>17</b>	5	1	1	2
<b>3</b>	3	-4	1	3	<b>18</b>	2	0	3	1
<b>4</b>	2	1	3	4	<b>19</b>	-2	1	4	3
<b>5</b>	3	-3	4	1	<b>20</b>	2	-2	1	4
<b>6</b>	1	5	2	2	<b>21</b>	0	7	2	2
<b>7</b>	-2	3	1	4	<b>22</b>	-1	4	4	1
<b>8</b>	6	-2	4	3	<b>23</b>	-3	3	3	4
<b>9</b>	-6	1	2	1	<b>24</b>	-4	1	1	2
<b>10</b>	-5	1	1	1	<b>25</b>	0	8	1	1
<b>11</b>	-2	4	3	2	<b>26</b>	4	-2	2	3
<b>12</b>	1	3	4	3	<b>27</b>	-1	3	3	4

<b>13</b>	-3	2	2	4	<b>28</b>	2	-3	4	2
<b>14</b>	-4	-1	1	2	<b>29</b>	-2	5	2	1
<b>15</b>	-1	5	3	1	<b>30</b>	-5	-1	1	3

**Задание 2.** Дана матрица  $A = \begin{pmatrix} \kappa_1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & -\kappa_2 & 4 \end{pmatrix}$ . Найти

а)  $A^{-1}$  и проверить, что  $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$

б)  $A + A^{-1}$

<b>Вариант</b>	$\kappa_1$	$\kappa_2$	<b>Вариант</b>	$\kappa_1$	$\kappa_2$
<b>1</b>	3	-2	<b>16</b>	4	-1
<b>2</b>	4	1	<b>17</b>	5	1
<b>3</b>	3	-4	<b>18</b>	2	0
<b>4</b>	2	1	<b>19</b>	-2	1
<b>5</b>	3	-3	<b>20</b>	2	-2
<b>6</b>	1	5	<b>21</b>	0	7
<b>7</b>	-2	3	<b>22</b>	-1	4
<b>8</b>	6	-2	<b>23</b>	-3	3
<b>9</b>	-6	1	<b>24</b>	-4	1
<b>10</b>	-5	1	<b>25</b>	0	8
<b>11</b>	-2	4	<b>26</b>	4	-2
<b>12</b>	1	3	<b>27</b>	-1	3
<b>13</b>	-3	2	<b>28</b>	2	-3
<b>14</b>	-4	-1	<b>29</b>	-2	5
<b>15</b>	-1	5	<b>30</b>	-5	-1



### Задание 3

1. Решить системы уравнений с помощью обратной матрицы (матричным методом);

$$1.1. \begin{cases} 2x + y + 3z = 7, \\ 2x + 3y + z = 1, \\ 3x + 2y + z = 6. \end{cases}$$

$$1.2. \begin{cases} 2x - y + 2z = 3, \\ x + y + 2z = -4, \\ 4x + y + 4z = -3. \end{cases}$$

$$1.3. \begin{cases} 3x - y + z = 12, \\ x + 2y + 4z = 6, \\ 5x + y + 2z = 3. \end{cases}$$

$$1.4. \begin{cases} 2x - y + 3z = -4, \\ x + 3y + 3z = 11, \\ x - 2y + 2z = -7. \end{cases}$$

$$1.5. \begin{cases} 3x - 2y + 4z = 12, \\ 3x + 4y - 2z = 6, \\ 2x - y - z = -9. \end{cases}$$

$$1.6. \begin{cases} 8x + 3y - 6z = -4, \\ x + y - z = 2, \\ 4x + y - 3z = -5. \end{cases}$$

$$1.7. \begin{cases} 4x + y - 3z = 9, \\ x + y - z = -2, \\ 8x + 3y - 6z = 12. \end{cases}$$

$$1.8. \begin{cases} 2x + 3y + 4z = 33, \\ 7x - 5y = 24, \\ 4x + 11z = 39. \end{cases}$$

$$1.9. \begin{cases} 2x + 3y + 4z = 12, \\ 7x - 5y + z = -33, \\ 4x + z = -7. \end{cases}$$

$$1.10. \begin{cases} x + 4y - z = 6, \\ 5y + 4z = -20, \\ 3x - 2y + 5z = -22. \end{cases}$$

$$1.11. \begin{cases} 3x - 2y + 4z = 21, \\ 3x + 4y - 2z = 9, \\ 2x - y - z = 10. \end{cases}$$

$$1.12. \begin{cases} 3x - 2y - 5z = 5, \\ 2x + 3y - 4z = 12, \\ x - 2y + 3z = -1. \end{cases}$$

$$1.13. \begin{cases} 4x + y + 4z = 19, \\ 2x - y + 2z = 11, \\ x + y + 2z = 8. \end{cases}$$

$$1.14. \begin{cases} 2x - y + 2z = 0, \\ 4x + y + 4z = 6, \\ x + y + 2z = 4. \end{cases}$$

$$1.15. \begin{cases} 2x - y + 2z = 8, \\ x + y + 2z = 11, \\ 4x + y + 4z = 22. \end{cases}$$

$$1.16. \begin{cases} 2x - y - 3z = -9, \\ x + 5y + z = 20, \\ 3x + 4y + 2z = 15. \end{cases}$$

$$1.17. \begin{cases} 2x - y - 3z = 0, \\ 3x + 4y + 2z = 1, \\ x + 5y + z = -3. \end{cases}$$

$$1.18. \begin{cases} -3x + 5y + 6z = -8, \\ 3x + y + z = -4, \\ x - 4y - 2z = -9. \end{cases}$$

$$1.19. \begin{cases} 3x + y + z = -4, \\ -3x + 5y + 6z = 36, \\ x - 4y - 2z = 19. \end{cases}$$

$$1.20. \begin{cases} 3x - y + z = -11, \\ 5x + y + 2z = 8, \\ x + 2y + 4z = 16. \end{cases}$$

$$1.21. \begin{cases} 3x - y + z = 9, \\ 5x + y + 2z = 11, \\ x + 2y + 4z = 19. \end{cases}$$

$$1.22. \begin{cases} 2x + 3y + z = 4, \\ 2x + y + 3z = 0, \\ 3x + 2y + z = 1. \end{cases}$$

$$1.23. \begin{cases} 2x + 3y + z = 12, \\ 2x + y + 3z = 16, \\ 3x + 2y + z = 8. \end{cases}$$

$$1.24. \begin{cases} x - 2y + 3z = 14, \\ 2x + 3y - 4z = -16, \\ 3x - 2y - 5z = -8. \end{cases}$$

$$1.25. \begin{cases} 3x + 4y - 2z = 11, \\ 2x - y - z = 4, \\ 3x - 2y + 4z = 11. \end{cases}$$

$$1.26. \begin{cases} x + 5y - 6z = -15, \\ 3x + y + 4z = 13, \\ 2x - 3y + z = 9. \end{cases}$$

$$1.27. \begin{cases} 4x - y = -6, \\ 3x + 2y + 5z = -14, \\ x - 3y + 4z = -19. \end{cases}$$

$$1.28. \begin{cases} 5x + 2y - 4z = -16, \\ x + 3z = -6, \\ 2x - 3y + z = 9. \end{cases}$$

$$1.29. \begin{cases} x + 4y - z = -9, \\ 4x - y + 5z = -2, \\ 3y - 7z = -6. \end{cases}$$

$$1.30. \begin{cases} 7x + 4y - z = 13, \\ 3x + 2y + 3z = 3, \\ 2x - 3y + z = -10. \end{cases}$$

### Контрольные вопросы

1. Что называется минором?
2. Что называется алгебраическим дополнением элемента матрицы?
3. Как разложить определитель по элементам столбца или строки?
4. Какая матрица называется невырожденной?
5. Транспонированная матрица.
6. Какая матрица называется обратной по отношению к данной?
7. Каков порядок вычисления обратной матрицы?
8. Алгоритм решения простейшего матричного уравнения

### Тест по теме «Линейная алгебра»

1. Если матрица  $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ , то матрица  $5A$  имеет вид:

a)  $\begin{pmatrix} 24 & 10 \\ -12 & -30 \end{pmatrix}$  b)  $\begin{pmatrix} 20 & 5 \\ -10 & -15 \end{pmatrix}$  c)  $\begin{pmatrix} -20 & 5 \\ -10 & -3 \end{pmatrix}$

2. Если матрицы  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  и  $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ , то матрица  $2A + B$  имеет вид:

a)  $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 9 & 2 & 5 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$  b)  $\begin{pmatrix} -4 & 1 & -7 \\ 9 & 1 & 5 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  c)  $\begin{pmatrix} -1 & 8 & 4 \\ -3 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

3. Для матрицы  $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 9 & 2 & 5 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$  указать сумму элементов, расположенных на

главной диагонали

a) 6 b) 10 c) 8

4. Для матрицы  $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 9 & 2 & 5 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$  указать сумму элементов, расположенных на вспомогательной диагонали

a) 6 b) 10 c) 8

5. При умножении матрицы  $A$  на матрицу  $B$  должно соблюдаться условие:

- a) число строк матрицы  $A$  равно числу строк матрицы  $B$
- b) число строк матрицы  $A$  равно числу столбцов матрицы  $B$
- c) число столбцов матрицы  $A$  равно числу строк матрицы  $B$

6. Квадратная матрица называется *диагональной*, если:

- a) элементы, лежащие на главной диагонали равны нулю
- b) элементы, не лежащие на главной диагонали равны нулю
- a) элементы, лежащие на побочной диагонали равны нулю

7. При каком значении  $\alpha$  определитель  $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2\alpha - 1 \end{vmatrix}$  равен нулю?

a) 2 b) 0,5 c) -2

8. Если поменять местами две строки (два столбца) квадратной матрицы, то определитель:

- a) не изменится
- b) станет равным нулю
- c) поменяет знак

9. Чему равен минор  $M_{21}$  определителя  $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & -1 \\ 5 & 4 & 2 \end{vmatrix}$ ?

a) 4 b) 0 c) 11

10. Чему равен минор  $M_{31}$  определителя  $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & -1 \\ 5 & 4 & 2 \end{vmatrix}$ ?

a) 4 b) -2 c) 0 11. Чему равно алгебраическое дополнение

$A_{21}$  определителя  $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & -1 \\ 5 & 4 & 2 \end{vmatrix}$ ?

a) -4 b) 0 c) -11 12. Чему равно алгебраическое дополнение  $A_{31}$

определителя  $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & -1 \\ 5 & 4 & 2 \end{vmatrix}$ ?

- a) 4                      b) -2                      c) 013. Чему равен главный определитель

системы уравнений 
$$\begin{cases} 3x - y = 5 \\ -2x + y + z = 0 \\ 2x - y + 4z = 15 \end{cases}$$

- a) -5                      b) 6                      c) 5

14. Если матрицы  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$  и  $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ , то определитель матрицы  $A \cdot D$  равен:

- a) -32 b) 32                      c) -1615. Найти минор для элемента  $a_{32}$  определителя

$$\Delta = \begin{vmatrix} -3 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

- a) 2                      b) 20                      c) -20 16. Найти алгебраическое дополнение для элемента  $a_{32}$

определителя, минор для элемента  $a_{32}$  
$$\Delta = \begin{vmatrix} -3 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

- a) 2                      b) 20                      c) -20 a) -8                      б) 8                      в) -5

17. Найти алгебраическое дополнение для элемента  $a_{23}$  определителя 
$$\Delta = \begin{vmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

- a) -8                      b) 8                      c) -5

## Самостоятельная работа

### Вариант 1

1. Найти матрицу  $C = A + 3B$ , если  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 8 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ .

Ответ: 
$$C = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 9 \\ 4 & 13 & 11 \\ 5 & 13 & 3 \end{pmatrix}$$

- Решить систему линейных уравнений методом обратной матрицы.
- Решить систему линейных уравнений по формулам Крамера.
- Решить систему линейных уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 5, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 7. \end{cases}$$

Ответ: (2;0;1)

## Вариант 2

1. Найти матрицу  $C=2A-B$ , если  $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 8 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $B=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ .

Ответ:  $C=\begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -6 & -2 & 15 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

2. Решить систему линейных уравнений методом обратной матрицы.  
3. Решить систему линейных уравнений по формулам Крамера.  
4. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = -2, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 7, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 5. \end{cases}$$

Ответ: (1;3;0)

## Вариант 3

1. Найти матрицу  $C=3A+B$ , если  $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 8 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $B=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ .

Ответ:  $C=\begin{pmatrix} 5 & 9 & 3 \\ -4 & 7 & 25 \\ 7 & 15 & 9 \end{pmatrix}$

2. Решить систему линейных уравнений методом обратной матрицы.  
3. Решить систему линейных уравнений по формулам Крамера.  
4. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4, \\ x_1 + 4x_2 - x_3 = 7, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$$

Ответ: (0;2;1)

## Вариант 4

1. Найти матрицу  $C=A-4B$ , если  $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 8 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $B=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ .

Ответ:  $C=\begin{pmatrix} 6 & 3 & -12 \\ -10 & -15 & 4 \\ -2 & -8 & 3 \end{pmatrix}$

2. Решить систему линейных уравнений методом обратной матрицы.  
3. Решить систему линейных уравнений по формулам Крамера.  
4. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$$

Ответ: (2;1;1)

### Вариант 5

1. Найти матрицу  $C=4A-B$ , если  $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 8 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $B=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ .

Ответ:  $C=\begin{pmatrix} 9 & 12 & -3 \\ -10 & 0 & 31 \\ 7 & 13 & 12 \end{pmatrix}$

2. Решить систему линейных уравнений методом обратной матрицы.  
3. Решить систему линейных уравнений по формулам Крамера.  
4. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 2, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ 3x_1 + 7x_2 + x_3 = 10. \end{cases}$$

Ответ: (1;1;0)

### Вариант 6

1. Найти матрицу  $C=A+2B$ , если  $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 8 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $B=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ .

Ответ:  $C = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 2 & 9 & 10 \\ 4 & 10 & 3 \end{pmatrix}$

2. Решить систему линейных уравнений методом обратной матрицы.
3. Решить систему линейных уравнений по формулам Крамера.
4. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$$

## Элементы аналитической геометрии

### Устный опрос

1. Что называется вектором?
2. Какие векторы называются коллинеарными?
3. Что называется координатами вектора?
4. Как найти координаты вектора, заданного двумя точками?
5. Как найти длину вектора, заданного своими координатами?
6. Запишите формулы деления отрезка в данном отношении.
7. Дать определение проекции вектора на ось и перечислить ее свойства.
8. Дать определение скалярного произведения векторов.
9. Дать определение векторного произведения векторов.
10. Дать определение смешанного произведения векторов.

## Практическая работа № 3 по теме

### «Элементы векторной алгебры»

**Цель:** Проверить знания и умения по нахождению: координат вектора, операций над векторами, модуля вектора и скалярного произведения, векторного произведения, смешанного произведения.

### Задания

1. По координатам точек А, В и С для указанных векторов найти:
  - а) Координаты векторов  $a = AB$ ,  $b = BC$ ,  $c = AC$ ,  $d = BA$ ,  $p = CA$
  - б) Модуль вектора  $\vec{k} = 3\vec{a} + \vec{b} - \vec{d}$
  - в) Скалярное произведение векторов **a** и **b**;
  - г) Проекцию вектора **c** на вектор **d**;
  - е) Координаты точки М, делящей отрезок **p** в отношении  $\alpha : \beta$

Варианты	Координаты точки А	Координаты точки В	Координаты точки С	$\alpha$ $\alpha$	$\beta$ $\beta$
1.	(-2, 1, 3)	(3, -6, 2)	(-5, -3, -1)	1	3
2.	(1, 3, 6)	(-3, 4, -5)	(1, -7, 2)	1	2
3.	(7, 2, 1)	(5, 1, -2)	(-3, 4, 5)	2	1
4.	(3, 5, 4)	(-2, 7, -5)	(6, -2, 1)	3	2
5.	(5, 3, 2)	(2, -5, 1)	(-7, 4, -3)	2	3
6.	(11, 1, 2)	(-3, 3, 4)	(-4, -2, 7)	1	2
7.	(9, 5, 3)	(-3, 2, 1)	(4, -7, 4)	3	1
8.	(7, 2, 1)	(3, -5, 6)	(-4, 3, -4)	3	2
9.	(1, 2, 3)	(-5, 3, -1)	(-6, 4, 5)	2	1
10.	(-2, 5, 1)	(3, 2, -7)	(4, -3, 2)	4	1
11.	(3, 1, 2)	(-4, 3, -1)	(2, 3, 4)	2	1
12.	(3, -1, 2)	(-2, 4, 1)	(4, -5, -1)	1	3
13.	(4, 5, 1)	(1, 3, 1)	(-3, -6, 7)	3	4
14.	(1, -3, 1)	(-2, -4, 3)	(0, -2, 3)	2	3
15.	(5, 7, -2)	(-3, 1, 3)	(1, -4, 6)	4	3
16.	(-1, 4, 3)	(3, 2, -4)	(-2, -7, 1)	1	3
17.	(5, 4, 1)	(-3, 5, 2)	(2, -1, 3)	3	1
18.	(2, -1, 4)	(-3, 0, -2)	(4, 5, -3)	2	1
19.	(-1, 1, 2)	(2, -3, -5)	(-6, 3, -1)	1	2
20.	(1, 3, 4)	(-2, 5, 0)	(3, -2, -4)	2	3
21.	(1, -1, 1)	(-5, -3, 1)	(2, -1, 0)	3	2
22.	(3, 1, 2)	(-7, -2, -4)	(-4, 0, 3)	2	1
23.	(-3, 0, 1)	(2, 7, -3)	(-4, 3, 5)	1	3
24.	(5, 1, 2)	(-2, 1, -3)	(4, -3, 5)	2	3
25.	(0, 2, -3)	(4, -3, -2)	(-5, -4, 0)	1	2
26.	(3, -1, 2)	(-2, 3, 1)	(4, -5, -3)	3	4
27.	(5, 3, 1)	(-1, 2, -3)	(3, -4, 2)	1	2
28.	(3, 1, -3)	(-2, 4, 1)	(1, -2, 5)	3	4
29.	(6, 1, -3)	(-3, 2, 1)	(-1, -3, 4)	4	3
30.	(4, 2, 3)	(-3, 1, -8)	(2, -4, 5)	3	2

## Задание 2

1. Даны векторы **a**, **b** и **c**. Необходимо:

а) вычислить смешанное произведение трех векторов;

б) найти модуль векторного произведения;

в) вычислить скалярное произведение двух векторов;

г) проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны два вектора;

д) проверить, будут ли компланарны три вектора.



Вариант	Векторы	Смешанное произведение	Модуль векторного произведения	Скалярное произведение	Коллинеарны или перпендикулярны векторы	Компланарность векторов
1	$a = 2i - 3j + k,$ $b = j + 4k,$ $c = 5i + 2j - 3k$	$a, 3b, c$	$3a, 2c$	$b, -4c$	$a, c$	$a, 2b, 3c$
2	$a = 3i + 4j + k,$ $b = i - 2j + 7k,$ $c = -3i - 6j + 21k$	$5a, 2b, c$	$4b, 2c$	$a, c$	$b, c$	$2a, -3b, c$
3	$a = 2i - 4j - 2k,$ $b = 7i + 3j,$ $c = 3i + 5j - 7k$	$a, 2b, 3c$	$3a, -7c$	$-2a, c$	$a, c$	$3a, 2b, 3c$
4	$a = -7i + 2k,$ $b = 2i - 6j + 4k,$ $c = i - j + 2k$	$a, -2b, -7c$	$4b, 3c$	$2a, -7c$	$b, c$	$2a, 4b, 3c$
5	$a = -4i + 2j - k,$ $b = 3i + 5j - 2k,$ $c = j + 5k$	$a, 6b, 3c$	$a, 2b$	$a, -4c$	$a, b$	$a, 6b, 3c$
6	$a = 3i - 2j + k,$ $b = 2j - 3k,$ $c = -3i + 2j - k$	$a, -3b, 2c$	$5a, 3c$	$-2a, 4b$	$a, c$	$5a, 4b, 3c$
7	$a = i - j + 3k,$ $b = 2i + 3j - 5k,$ $c = 7i + 2j + 4k$	$7a, -4b, 2c$	$3a, 5c$	$2b, 4c$	$b, c$	$7a, 2b, 5c$
8	$a = 4i + 2j - 3k,$ $b = 2i + k,$ $c = -12i - 6j + 9k$	$2a, 3b, c$	$4a, 3b$	$b, -4c$	$a, c$	$2a, 3b, -4c$

9	$a = -i + 5k,$ $b = -3i + 2j + 2k,$ $c = -2i - 4j + k$	$3a, -4b, 2c$	$7a, -3c$	$2b, 3a$	$b, c$	$7a, 2b, -3c$
10	$a = 6i - 4j + 6k,$ $b = 9i - 6j + 9k,$ $c = i - 8k$	$2a, -4b, 3c$	$3b, -9c$	$3a, -5c$	$a, b$	$3a, -4b, -9c$
11	$a = 5i - 3j + 4k,$ $b = 2i - 4j - 2k,$ $c = 3i + 5j - 7k$	$a, -4b, 2c$	$-2b, 4c$	$-3a, 6c$	$b, c$	$a, -2b, 6c$
12	$a = -4i + 3j - 7k,$ $b = 4i + 6j - 2k,$ $c = 6i + 9j - 3k$	$-2a, b, -2c$	$4b, 7c$	$5a, -3b$	$b, c$	$-2a, 4b, 7c$
13	$a = -5i + 2j - 2k,$ $b = 7i - 5k,$ $c = 2i + 3j - 2k$	$2a, 4b, -5c$	$-3b, 11c$	$8a, -6c$	$a, c$	$8a, -3b, 11c$
14	$a = -4i - 6j + 2k,$ $b = 2i + 3j - k,$ $c = -i + 5j - 3k$	$5a, 7b, 2c$	$-4b, 11a$	$3a, -7c$	$a, b$	$3a, 7b, -2c$
15	$a = -4i + 2j - 3k,$ $b = -3j + 5k,$ $c = 6i + 6j - 4k$	$5a, -b, 3c$	$-7a, 4c$	$3a, 9b$	$a, c$	$3a, -9b, 4c$
16	$a = -3i + 8j,$ $b = 2i + 3j - 2k,$ $c = 8i + 12j - 8k$	$4a, -6b, 5c$	$-7a, 9c$	$3b, -8c$	$b, c$	$4a, -6b, 9c$
17	$a = 2i - 4j - 2k,$ $b = -9i + 2k,$ $c = 3i + 5j - 7k$	$7a, 5b, -c$	$-5a, 4b$	$3b, -8c$	$a, c$	$7a, 5b, -c$
18	$a = 9i - 3j + k,$ $b = 3i - 15j + 21k,$ $c = i - 5j + k$	$2a, -7b, 3c$	$-6a, 4c$	$5b, 7a$	$b, c$	$2a, -7b, 4c$
19	$a = -2i + 4j - 3k,$ $b = 5i + j - 2k,$ $c = 7i + 4j - k$	$a, -6b, 2c$	$-8b, 5c$	$-9a, 7c$	$a, b$	$a, -6b, 5c$

20	$a = -9i + 4j - 5k,$ $b = i - 2j + 4k,$ $c = -5i + 10j - 20k$	$-2a, 7b, 5c$	$-6b, 7c$	$9a, 4c$	$b, c$	$-2a, 7b, 4c$
21	$a = 2i - 7j + 5k,$ $b = -i + 3j - 6k,$ $c = 3i + 2j - 4k$	$-3a, 6b, -c$	$5b, 3c$	$7a, -4b$	$b, c$	$7a, -4b, 3c$
22	$a = 7i - 4j - 5k,$ $b = i - 11j + 3k,$ $c = 5i + 5j + 3k$	$3a, -7b, 2c$	$2b, 6c$	$-4a, -5c$	$a, c$	$-4a, 2b, 6c$
23	$a = 4i - 6j - 2k,$ $b = -2i + 3j + k,$ $c = 3i - 5j + 7k$	$6a, 3b, 8c$	$-7b, 6a$	$-5a, 4c$	$a, b$	$-5a, 3b, 4c$
24	$a = 3i - j + 2k,$ $b = -i + 5j - 4k,$ $c = 6i - 2j + 4k$	$4a, -7b, -2c$	$6a, -4c$	$-2a, 5b$	$a, c$	$6a, -7b, -2c$
25	$a = -3i - j - 5k,$ $b = 2i - 4j + 8k,$ $c = 3i + 7j - k$	$2a, -b, 3c$	$-9a, 4c$	$5b, -6c$	$b, c$	$2a, 5b, -6c$
26	$a = -3i + 2j + 7k,$ $b = i - 5k,$ $c = 6i + 4j - k$	$-2a, b, 7c$	$5a, -2c$	$3b, c$	$a, c$	$-2a, 3b, 7c$
27	$a = 3i - j + 5k,$ $b = 2i - 4j + 6k,$ $c = i - 2j + 3k$	$-3a, 4b, -5c$	$6b, 3c$	$a, 4c$	$b, c$	$-3a, 4b, -5c$
28	$a = 4i - 5j - 4k,$ $b = 5i - j,$ $c = 2i + 4j - 3k$	$a, 7b, -2c$	$-5a, 4b$	$8c, -3a$	$a, c$	$-3a, 4b, 8c$
29	$a = -9i + 4k,$ $b = 2i - 4j + 6k,$ $c = 3i - 6j + 9k$	$3a, -5b, -4c$	$6b, 2c$	$-2a, 8c$	$b, c$	$3a, 6b, -4c$
30	$a = 5i - 6j - k,$ $b = 4i + 8j - 7k,$ $c = 3j - 4k$	$5a, 3b, -4c$	$4b, a$	$7a, -2c$	$a, b$	$5a, 4b, -2c$

## Контрольные вопросы

1. Что называется вектором?
2. Какие векторы называются коллинеарными?
3. Что называется координатами вектора?
4. Как найти координаты вектора, заданного двумя точками?
5. Как найти длину вектора, заданного своими координатами?
6. Запишите формулы деления отрезка в данном отношении.
7. Как найти скалярное произведение векторов?
8. Как найти векторное произведение векторов?
9. Как найти смешанное произведение векторов?

## Практическая работа № 4 «Прямая линия»

**Цель:** научиться составлять уравнение прямых, находить угол между прямыми, выполнять построения.

### Задание

**1. Даны вершины треугольника ABC:**  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$ ,  $C(x_3, y_3)$  **Найти:**

- а) уравнение стороны АВ;
- б) уравнение высоты СН;
- в) уравнение медианы АМ;
- г) уравнение биссектрисы ВС;
- д) точку N пересечения медианы АМ и высоты СН;
- е) уравнение прямой, проходящей через вершину С параллельно стороне АВ;
- ж) угол между прямыми АВ и АС.

Варианты	$A(x_1, y_1)$	$B(x_2, y_2)$	$C(x_3, y_3)$
1	A (-2, 4)	B (3, 1)	C (10, 7)
2	A (-3, -2)	B (14, 4)	C (6, 8)
3	A (1, 7)	B (-3, -1)	C (11, -3)
4	A (1, 0)	B (-1, 4)	C (9, 5)
5	A (1, -2)	B (7, 1)	C (3, 7)

<b>6</b>	A (-2, -3)	B (1, 6)	C (6, 1)
<b>7</b>	A (-4, 2)	B ( -6, 6)	C (6, 2)
<b>8</b>	A (4, -3)	B (7, 3)	C (1, 10)
<b>9</b>	A (4, -4),	B (8, 2)	C (3, 8)
<b>10</b>	A (-3, -3)	B (5, -7)	C (7, 7)
<b>11</b>	A (1, -6)	B (3, 4)	C (-3, 3)
<b>12</b>	A (-4, 2)	B (8, -6)	C (2, 6)
<b>13</b>	A (-5, 2)	B (0, -4)	C (5, 7)
<b>14</b>	A (4, -4)	B (6, 2)	C (-1, 8)
<b>15</b>	A (-3, 8)	B (-6, 2)	C (0,-5)
<b>16</b>	A (6, -9)	B (10, -1)	C (-4, 1)
<b>17</b>	A (4, 1)	B (-3, -1)	C (7, -3)
<b>18</b>	A (-4, 2)	B (6, -4)	C (4, 10)
<b>19</b>	A (3, -1)	B (11, 3)	C (-6, 2)
<b>20</b>	A (-7, -2)	B (-7, 4)	C (5, -5)
<b>21</b>	A (-1, -4)	B (9, 6)	C (-5, 4)
<b>22</b>	A (10, -2)	B (4, -5)	C (-3, 1)
<b>23</b>	A (-3, -1)	B (-4, -5)	C (8, 1)
<b>24</b>	A (-2, -6)	B (-3, 5)	C (4, 0)
<b>25</b>	A (-7, -2)	B (3, -8)	C (-4, 6)
<b>26</b>	A (0, 2)	B (-7, -4)	C (3, 2)

<b>27</b>	A (7, 0)	B (1, 4)	C (-8, -4)
<b>28</b>	A (1, -3)	B (0, 7)	C (-2, 4)
<b>29</b>	A (-5, 1)	B (8, -2)	C (1, 4)
<b>30</b>	A (2, 5)	B (-3, 1)	C (0, 4)

### Контрольные вопросы

1. Запишите уравнения осей координат.
2. Общее уравнение прямой.
3. Условие параллельности и перпендикулярности прямых.
4. Запишите уравнения прямых, параллельных осям координат.
5. Сформулируйте условие параллельности прямых.
6. Сформулируйте условие перпендикулярности прямых.
7. Как найти угол между прямыми?
8. Как найти расстояние между прямыми?

### Дополнительные задания

#### 2. Решить следующие задачи

2.1. Найти уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых  $3x - 2y - 7 = 0$  и  $x + 3y - 6 = 0$  и отсекающей на оси абсцисс отрезок, равный 3.

*Ответ :  $x = 3$*

2.2. Найти проекцию точки A(-8, 12) на прямую, проходящую через точки B(2, -3) и

C(-5,1). *Ответ :  $A_1(-12,5)$*

2.3. Даны две вершины треугольника ABC: A(-4, 4), B(4, -12) и точка M(4, 2) пересечения его высот. Найти вершину C. *Ответ :  $C(8,4)$*

2.4. Найти уравнение прямой, отсекающей на оси ординат отрезок, равный 2, и проходящей параллельно прямой  $2y - x = 3$ . *Ответ :  $x - 2y + 4 = 0$*

2.5. Найти уравнение прямой, проходящей через точку A(2, -3) и точку пересечения прямых  $2x - y = 5$  и  $x + y = 1$ . *Ответ :  $x = 2$*

2.6. Доказать, что четырехугольник ABCD - трапеция, если A(3, 6), B(5, 2), C(-1, -3), D(5,5).

2.7. Записать уравнение прямой, проходящей через точку A(3, 1) перпендикулярно к прямой BC, если B(2, 5), C(1, 0). *Ответ :  $x + 5y - 8 = 0$*

2.8. Найти уравнение прямой, проходящей через точку  $A(-2, 1)$  параллельно прямой  $MN$ , если  $M(-3, -2)$ ,  $N(1, 6)$ . *Ответ:*  $2x - y + 5 = 0$

2.9. Найти точку, симметричную точке  $M(2, -1)$  относительно прямой  $x - 2y + 3 = 0$ . *Ответ:*  $M_1\left(-\frac{4}{5}; \frac{23}{5}\right)$

2.10. Найти точку  $O$  пересечения диагоналей четырехугольника  $ABCD$ , если  $A(-1, -3)$ ,  $B(3, 5)$ ,  $C(5, 2)$ ,  $D(3, -5)$ . *Ответ:*  $MO\left(3; \frac{1}{3}\right)$

2.11. Через точку пересечения прямых  $6x - 4y + 5 = 0$ ,  $2x + 5y + 8 = 0$  провести прямую, параллельную оси абсцисс. *Ответ:*  $y = -1$

2.12. Известны уравнения стороны  $AB$  треугольника  $ABC$   $4x + y = 12$ , его высот  $BH$   $5x - 4y = 12$  и  $AM$   $x + y = 6$ . Найти уравнения двух других сторон треугольника  $ABC$ . *Ответ:*  $7x - 7y - 16 = 0$ ;  $4x + 5y - 28 = 0$

2.13. Даны две вершины треугольника  $ABC$ :  $A(-6, 2)$ ,  $B(2, -2)$  и точка пересечения его высот  $H(1, 2)$ . Найти координаты точки  $M$  пересечения стороны  $AC$  и высоты  $BH$ . *Ответ:*  $M\left(\frac{10}{17}; \frac{62}{17}\right)$

2.14. Найти уравнения высот треугольника  $ABC$ , проходящих через вершины  $A$  и  $B$ , если  $A(-4, 2)$ ,  $B(3, -5)$ ,  $C(5, 0)$ . *Ответ:*  $7x + 5y + 2 = 0$ ;  $9x + 2y - 28 = 0$

2.15. Вычислить координаты точки пересечения перпендикуляров, проведенных через середины сторон треугольника, вершинами которого служат точки  $A(2, 3)$ ,  $B(0, -3)$ ,  $C(6, 3)$ . *Ответ:*  $M\left(3; -\frac{2}{3}\right)$

2.16. Составить уравнение высоты, проведенной через вершину  $A$  треугольника  $ABC$ , зная уравнения его сторон:  $AB - 2x - y - 3 = 0$ ,  $AC - x + 5y - 7 = 0$ ,  $BC - 3x - 2y + 13 = 0$ . *Ответ:*  $2x + 3y - 7 = 0$ ;

2.17. Дан треугольник с вершинами  $A(3, 1)$ ,  $B(-3, -1)$  и  $C(5, -12)$ . Найти уравнение и вычислить длину его медианы, проведенной из вершины  $C$ .

*Ответ:*  $2x + y + 2 = 0$ ;  $d = \frac{54}{\sqrt{17}} \approx 13,1$

2.18. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку пересечения прямых  $2x + 5y - 8 = 0$  и  $2x + 3y + 4 = 0$ . *Ответ:*  $6x + 11y = 0$ ;

2.19. Найти уравнения перпендикуляров к прямой  $3x + 5y - 15 = 0$ , проведенных через точки пересечения данной прямой с осями координат.

*Ответ:*  $5x - 3y - 25 = 0$ ;  $5x + 3y + 9 = 0$ ;

2.20. Даны уравнения сторон четырехугольника:  $x - y = 0$ ,  $x + 3y = 0$ ,  $x - y - 4 = 0$ ,  $3x + y - 12 = 0$ . Найти уравнения его диагоналей. *Ответ:*  $y = 0$ ;  $x = 3$

2.21. Составить уравнения медианы  $CM$  и высоты  $СК$  треугольника  $ABC$ , если  $A(4, 6)$ ,  $B(-4, 0)$ ,  $C(-1, -4)$ . *Ответ:*  $7x - y + 3 = 0 - CM$ ;  $4x + 3y + 16 = 0 - СК$

2.22. Через точку  $P(5, 2)$  провести прямую: а) отсекающую равные отрезки на осях координат; б) параллельную оси  $Ox$ ; в) параллельную оси  $Oy$ .

*Ответ:*  $x + y - 7 = 0$ ;  $y = 2$ ;  $x = 5$

2.23. Записать уравнение прямой, проходящей через точку  $A(-2, 3)$  и составляющей с осью  $Ox$  угол: а)  $45^\circ$ , б)  $90^\circ$ , в)  $0^\circ$ .

*Ответ:*  $x - y + 5 = 0 - CM$ ;  $x + 2 = 0$ ;  $y - 3 = 0$

2.24. Какую ординату имеет точка  $C$ , лежащая на одной прямой с точками  $A(-6, -6)$  и  $B(3, -1)$  и имеющая абсциссу, равную 3? *Ответ:*  $y = 9$

2.25. Через точку пересечения прямых  $2x - 5y - 1 = 0$  и  $x + 4y - 7 = 0$  провести прямую, делящую отрезок между точками  $A(4, -3)$  и  $B(-1, 2)$  в отношении  $= 2 / 3$ . *Ответ:*  $2x - y - 5 = 0$ ;

2.26. Известны уравнения двух сторон ромба  $2x - 5y - 1 = 0$  и  $2x - 5y - 34 = 0$  и уравнение одной из его диагоналей  $x + 3y - 6 = 0$ . Найти уравнение второй диагонали. *Ответ:*  $3x - y - 23 = 0$ ;

2.27. Найти точку  $E$  пересечения медиан треугольника, вершинами которого являются точки  $A(3, 1)$ ,  $B(7, 5)$  и  $C(5, -3)$ . *Ответ:*  $E(3; 1)$

2.28. Записать уравнения прямых, проходящих через точку  $A(-1, 1)$  под углом  $45^\circ$  к прямой  $2x + 3y = 6$ . *Ответ:*  $x - 5y + 6 = 0$ ;  $5x + y + 4 = 0$

2.29. Даны уравнения высот треугольника  $ABC$   $2x - 3y + 1 = 0$ ,  $x + 2y + 1 = 0$  и координаты его вершины  $A(2, 3)$ . Найти уравнения сторон  $AB$  и  $AC$  треугольника. *Ответ:*  $2x - y - 1 = 0 - AB$ ;  $3x + 2y - 12 = 0 - AC$

2.30. Даны уравнения двух сторон параллелограмма  $x - 2y = 0$ ,  $x - y - 1 = 0$  и точка пересечения его диагоналей  $M(3, -1)$ . Найти уравнения двух других сторон. *Ответ:*  $x - y - 7 = 0$ ;  $x - 2y - 10 = 0$

### Практическая работа № 5 по теме



## «Кривые второго порядка»

**Цель:** Проверить уровень усвоения материала по составлению уравнений кривых второго порядка (окружности, эллипса, параболы, гиперболы).

### Задания

#### 1. Составить канонические уравнения:

а) эллипса; б) гиперболы; в) параболы (А, В - точки, лежащие на кривой, F - фокус, а - большая (действительная) полуось, b - малая (мнимая) полуось,  $\varepsilon$  - эксцентриситет,  $y = \pm kx$  - уравнения асимптот гиперболы, D - директриса кривой, 2с - фокусное расстояние).

Вариант	Эллипс	Гипербола	Парабола
1.	$b = 15, F(-10, 0)$	$a = 13, \varepsilon = 14/13$	D: $x = -4$
2.	$b = 2, F(4\sqrt{2}, 0)$	$a = 7, \varepsilon = \sqrt{85}/7$	D: $x = 5$
3.	$A(3, 0), B(2, \sqrt{5}/3)$	$k = 3/4, \varepsilon = 5/4$	D: $y = -2$
4.	$\varepsilon = \sqrt{21}/5, A(-5, 0)$	$A(\sqrt{80}, 3), B(4\sqrt{6}, 3\sqrt{2})$	D: $y = 1$
5.	$2a = 22, \varepsilon = \sqrt{57}/11$	$k = 2/3, 2c = 10\sqrt{13}$	ось симметрии Oх и A(27, 9).
6.	$b = \sqrt{15}, \varepsilon = \sqrt{10}/25$	$k = 3/4, 2a = 16$	ось симметрии Oх и A(4, -8).
7.	$a = 4, F = (3, 0)$	$b = 2\sqrt{10}, F(-11, 0)$	D: $x = -2$
8.	$b = 4, F = (9, 0)$	$a = 5, \varepsilon = 7/5$	D: $x = 6$
9.	$A(0, \sqrt{3}), B(\sqrt{14/3}, 1)$	$k = \sqrt{21}/10, \varepsilon = 11/10$	D: $y = -4$
10.	$\varepsilon = 7/8, A(8, 0)$	$A(3, -\sqrt{3/5}), B(\sqrt{13/5}, 6)$	D: $y = 4$
11.	$2a = 24, \varepsilon = \sqrt{22}/6$	$k = \sqrt{2/3}, 2c = 10$	ось симметрии Oх и A(-7, -7).

12.	$b = 2, \varepsilon = 5\sqrt{29}/29$	$k = 12/13, 2a = 26$	ось симметрии Ох и $A(-5, 15)$ .
13.	$a = 6, F(-4, 0)$	$b = 3, F(7, 0)$	D: $x = -7$
14.	$b = 7, F(5, 0)$	$a = 11, \varepsilon = 12/11$	D: $x = 10$ .
15.	$A(-\sqrt{17/3}, 1/3),$ $B(\sqrt{21}/2, 1/2);$	$k = 1/2, \varepsilon = \sqrt{5}/2$	D: $y = -1$
16.	$\varepsilon = 3/5, A(0, 8)$	$A(\sqrt{6}, 0), B(-2\sqrt{2}, 1)$	D: $y = 9$
17.	$2a = 22, \varepsilon = 10/11$	$k = \sqrt{11}/5, 2c = 12$	ось симметрии Ох и $A(-7, 5)$ .
18.	$b = 5, \varepsilon = 12/13$	$k = 1/3, 2a = 6$	ось симметрии Оу и $A(-9, 6)$ .
19.	$a = 9, F(7, 0)$	$b = 6, F(12, 0)$	D: $x = -1/4$
20.	$b = 5, F(-10, 0)$	$a = 9, \varepsilon = 4/3$	D: $x = 12$
21.	$A(0, -2), B(\sqrt{15}/2,$ $1)$	$k = 2\sqrt{10}/9, \varepsilon = 11/9$	D: $y = 5$
22.	$\varepsilon = 2/3, A(-6, 0)$	$A(\sqrt{8}, 0), B(\sqrt{20}/3, 2)$	D: $y = 1$
23.	$2a = 50, \varepsilon = 3/5$	$k = \sqrt{29}/14, 2c = 30$	ось симметрии Оу и $A(4, 1)$ .
24.	$b = 2\sqrt{15}, \varepsilon = 7/8$	$k = 5/6, 2a = 12$	ось симметрии Оу и $A(-2, 3\sqrt{2})$ .
25.	$a = 13, F(-5, 0)$	$b = 44, F(-7, 0)$	D: $x = -3/8$
26.	$b = 7, F(13, 0)$	$b = 4, F(-11, 0)$	D: $x = 13$
27.	$A(-3, 0), B(1, \sqrt{40}/3)$	$k = \sqrt{2/3}, \varepsilon = \sqrt{15}/3$	D: $y = 4$

	)		
28.	$\varepsilon = 5/6, A(0, \sqrt{11})$	$A(\sqrt{32/3}, 1), B(\sqrt{8}, 0)$	D: $y = -3$
29.	$2a = 30, \varepsilon = 17/15$	$k = \sqrt{17}/8, 2c = 18$	ось симметрии Oy и $A(4, -10)$
30	$b = 2\sqrt{2}, \varepsilon = 7/9$	$k = \sqrt{2}/2, 2a = 12$	ось симметрии Oy и $A(-45, 15)$ .

**2. Записать уравнение окружности, проходящей через указанные точки и имеющей центр в точке А.**

- 2.1. Вершины гиперболы  $12x^2 - 13y^2 = 156$ ,  $A(0, -2)$ .
- 2.2. Вершины гиперболы  $4x^2 - 9y^2 = 36$ ,  $A(0, 4)$ .
- 2.3. Фокусы гиперболы  $24y^2 - 25x^2 = 600$ ,  $A(0, -8)$ .
- 2.4.  $O(0, 0)$ , А - вершина параболы  $y^2 = 3(x - 4)$ .
- 2.5. Фокусы эллипса  $9x^2 + 25y^2 = 1$ ,  $A(0, 6)$ .
- 2.6. Левый фокус гиперболы  $3x^2 - 4y^2 = 12$ ,  $A(0, -3)$ .
- 2.7. Фокусы эллипса  $3x^2 + 4y^2 = 12$ , А - его верхняя вершина.
- 2.8. Вершину гиперболы  $x^2 - 16y^2 = 64$ ,  $A(0, -2)$ .
- 2.9. Фокусы гиперболы  $4x^2 - 5y^2 = 80$ ,  $A(0, -4)$ .
- 2.10.  $O(0, 0)$ , А - вершина параболы  $y^2 = -(x + 5)/2$ .
- 2.11. Правый фокус эллипса  $33x^2 + 49y^2 = 1617$ ,  $A(1, 7)$ .
- 2.12. Левый фокус гиперболы  $3x^2 - 5y^2 = 30$ ,  $A(0, 6)$ .
- 2.13. Фокусы эллипса  $16x^2 - 41y^2 = 656$ , А - его нижняя вершина.
- 2.14. Вершину гиперболы  $2x^2 - 9y^2 = 18$ ,  $A(0, 4)$ .
- 2.15. Фокусы гиперболы  $5x^2 - 11y^2 = 55$ ,  $A(0, 5)$ .

- 2.16. В(1, 4), А - вершина параболы  $y^2 = (x - 4)/3$ .
- 2.17. Левый фокус эллипса  $3x^2 + 7y^2 = 21$ , А(-1, -3).
- 2.18. Левую вершину гиперболы  $5x^2 - 9y^2 = 45$ , А(0, -6).
- 2.19. Фокусы эллипса  $24x^2 - 25y^2 = 600$ , А - его верхняя вершина.
- 2.20. Правую вершину гиперболы  $3x^2 - 16y^2 - 48$ , А(1, 3).
- 2.21. Левый фокус гиперболы  $7x^2 - 9y^2 = 63$ , А(-1, -2).
- 2.22. В(2, -5), А - вершина параболы  $x^2 = -2(y + 1)$ .
- 2.23. Правый фокус эллипса  $x^2 + 4y^2 = 12$ , А(2, -7).
- 2.24. Правую вершину гиперболы  $40x^2 - 81y^2 = 3240$ , А(-2, 5).
- 2.25. Фокусы эллипса  $x^2 + 10y^2 = 90$ , А - его нижняя вершина.
- 2.26. Правую вершину гиперболы  $3x^2 - 25y^2 = 75$ , А(-5, -2).
- 2.27. Фокусы гиперболы  $4x^2 - 5y^2 = 20$ , А(0, -6).
- 2.28. В(3, 4), А - вершина параболы  $y^2 = (x + 7)/4$ .
- 2.29. Левый фокус эллипса  $13x^2 + 49y^2 = 837$ , А(1, 8).
- 2.30. Правый фокус гиперболы  $57x^2 - 64y^2 = 3648$ , А(2, 8).

### Контрольные вопросы

1. Запишите каноническое уравнение эллипса.
2. Запишите каноническое уравнение гиперболы.
3. Запишите каноническое уравнение параболы.
4. Что называется эксцентриситетом эллипса?
5. Запишите уравнения асимптот гиперболы.

### Самостоятельная работа по теме «Векторы»

#### Вариант 1

Даны векторы  $\vec{a}(9;-2;1)$  и  $\vec{b}(4;3;0)$  (для № 1-5).

1. Найти  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ . (Ответ: 24)
2. Найти  $(\vec{a} \wedge \vec{b})$ . Ответ:  $\left( \frac{24}{5\sqrt{86}} \right)$
3. Найти  $\vec{a}^2$ . (Ответ: 86)

4. Найти  $|\vec{b}|$ . (Ответ: 5)

5. Найти координаты векторов  $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ ,  $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$ ,  $\vec{f} = -3\vec{a}$ . (Ответ:  $c(13;1;1)$ ,  $d(5;-5;1)$ ,  $f(-27;6;0)$ )

6. В прямоугольной декартовой системе координат построить точки  $A(0; 0)$ ,  $B(3; -4)$ ,  $C(-3; 4)$ . Определить расстояние между точками  $A$  и  $B$ ,  $B$  и  $C$ ,  $A$  и  $C$ . (Ответ:  $|AB|=5$ ,  $|BC|=10$ ,  $|AC|=5$ )

### Вариант 2

Даны векторы  $\vec{a}(-3;2;1)$  и  $\vec{b}(3;0;4)$  (для № 1-5).

1. Найти  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ . (Ответ: -5)

2. Найти  $(\vec{a} \wedge \vec{b})$ . (Ответ:  $-\frac{1}{\sqrt{14}}$ )

3. Найти  $\vec{a}^2$ . (Ответ: 14)

4. Найти  $|\vec{b}|$ . (Ответ: 5)

5. Найти координаты векторов  $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ ,  $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$ ,  $\vec{f} = -3\vec{a}$ . (Ответ:  $c(0;2;5)$ ,  $d(-6;2;-3)$ ,  $f(9;-6;-3)$ )

6. В прямоугольной декартовой системе координат построить точки  $A(0; 0)$ ,  $C(-3; 4)$ ,  $D(-2; 2)$ ,  $E(10; -3)$ . Определить расстояние между точками  $C$  и  $D$ ,  $A$  и  $D$ ,  $D$  и  $E$ . (Ответ:  $|CD|=\sqrt{5}$ ,  $|AD|=2\sqrt{2}$ ,  $|DE|=13$ )

### Тест для самоконтроля по теме «Векторная алгебра»

1. Даны векторы  $\vec{a} = (2; 4; 1)$  и  $\vec{c} = (1; 2; 0)$ . Найти координаты суммы векторов.  
а)  $(3; 6; 1)$  б)  $(0; 6; 1)$  в)  $(1; 2; 1)$

2. Даны векторы  $\vec{a} = (2; 4; 1)$  и  $\vec{c} = (1; 2; 0)$ . Найти координаты разности векторов.  
а)  $(3; 6; 1)$  б)  $(0; 6; 1)$  в)  $(1; 2; 1)$

3. Даны векторы  $\vec{a} = (2; 4; 1)$  и  $\vec{c} = (1; 2; 0)$ . Найти координаты вектора  $\vec{a} + 2\vec{c}$ .  
а)  $(-3; 8; 1)$  б)  $(4; 8; 1)$  в)  $(1; 2; 1)$

4. Найти координаты вектора  $\vec{AB}$ , если  $A(2; 4; -6)$  и  $B(2; -4; 8)$   
а)  $(0; -4; 7)$  б)  $(2; -4; 2)$  в)  $(0; 4; -7)$

5. Найти длину вектора  $\vec{a}(-1; 2; -2)$   
а) 4 б) 3 в) 1

6. Найти длину вектора  $\vec{AB}$ , если  $A(5; 3; 1)$  и  $B(4; 5; -1)$   
а) 3 б) 2 в) 1

7. Условие коллинеарности векторов  $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$  и  $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$  имеет вид:  
а)  $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$  б)  $x_1x_2 = y_1y_2 = z_1z_2$  в)  $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} = m$

8. Укажите вектор, коллинеарный вектору  $\vec{a}(2; -3; -1)$   
а)  $\vec{b}(6; -9; -3)$     б)  $\vec{b}(8; 12; -4)$     в)  $\vec{b}(-4; 6; -2)$   
а)  $\vec{b}(6; -9; -3)$

9. Найти скалярное произведение векторов  $\vec{a}(4; -3; 1)$  и  $\vec{b}(5; -2; -3)$   
а) 3    б) 12    в) 23

10. Найти координаты вектора  $\vec{a} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$   
а)  $(1; -3; -5)$  б)  $(-1; -3; 5)$  в)  $(-1; 3; 5)$

11. Условие перпендикулярности векторов  $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$  и  $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$  имеет вид:  
а)  $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$  б)  $x_1x_2 = y_1y_2 = z_1z_2$  в)  $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} = m$

12. При каком значении  $m$  векторы  $\vec{a}(1; 3; -2)$  и  $\vec{b}(-1; m; 4)$  векторы перпендикулярны?  
а) 5    б) 3    в) -3

13. Вершинами треугольника служат точки  $A(10; -2; 8)$ ,  $B(8; 0; 7)$  и  $C(10; 2; 8)$ .  
Найти длину стороны  $AB$ .  
а) 4    б) 3    в) 1

14. Вершинами треугольника служат точки  $A(10; -2; 8)$ ,  $B(8; 0; 7)$  и  $C(10; 2; 8)$ .  
Найти длину стороны  $AC$ .  
а) 4    б) 3    в) 1

15. Найти координаты вектора  $\vec{a} + \vec{b}$ , если  $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}$  и  $\vec{b} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$   
а)  $(1; 5; -1)$     б)  $(5; -1; -9)$     в)  $(-1; 3; 5)$

16. Найти координаты вектора  $\vec{a} - \vec{b}$ , если  $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}$  и  $\vec{b} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$   
а)  $(1; 5; -1)$  б)  $(5; -1; -9)$  в)  $(-1; 3; 5)$

17. Найти угол между векторами  $\vec{a}(2; 2; -1)$  и  $\vec{b}(-3; 6; 6)$   
а)  $45^\circ$  б)  $60^\circ$  в)  $90^\circ$

18. Даны точки  $A(3; 5; 6)$  и  $B(5; -1; 0)$ . Найти координаты середины отрезка  $AB$   
а)  $(4; 2; 3)$     б)  $(5; -2; 2)$     в)  $(-4; 2; -3)$

### ТЕСТ ПО ТЕМЕ «УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ»

1. Общее уравнение прямой имеет вид:

a)  $y - y_1 = k(x - x_1)$  b)  $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$  c)  $Ax + By + C = 0$  2. Необходимое и достаточное

условие параллельности прямых с угловыми коэффициентами  $k_1$  и  $k_2$  a)  $k_1 = k_2$   
b)  $k_1 \cdot k_2 = -1$  c)  $k_1 + k_2 = 0$

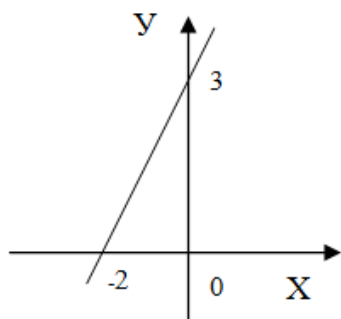
3. Необходимое и достаточное условие перпендикулярности прямых с угловыми коэффициентами  $k_1$  и  $k_2$  :

a)  $k_1 = k_2$  b)  $k_1 \cdot k_2 = -1$  c)  $k_1 + k_2 = 0$

4. Укажите уравнение прямой параллельной  $y = 5x + 6$

a)  $y = -5x$  b)  $10x - y + 12 = 0$  c)  $10x - 2y + 8 = 0$

5. Выберите уравнение, описывающее прямую, изображенную на рисунке



a)  $-2x + 3y = 0$  b)  $\frac{x}{3} + \frac{y}{-2} = 1$  c)  $\frac{x}{-2} + \frac{y}{3} = 1$  6. Укажите уравнение прямой

перпендикулярной прямой  $y = 5x + 6$  a)  $y = -\frac{1}{5}x$  b)  $10x - y + 12 = 0$  c)  $10x - 2y + 8 = 0$

7. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат, если ее угловой коэффициент  $k = 5$  a)  $5x + y = 0$  a)  $x + 5y = 0$  c)  $5x - y = 0$

8. Указать точку, принадлежащую прямой  $7x - 3y + 21 = 0$  a)  $A(4; 13)$  b)  $A(3; 14)$

c)  $A(-4; 13)$  9. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат и

образующей с осью  $Ox$  угол  $45^\circ$ . a)  $x - y = 0$  b)  $x + y = 0$  c)  $x - y + 1 = 0$  10.

Составить уравнение прямой, проходящей через точку  $(5; -1)$  и имеющей угловой коэффициент  $k = 3$ . a)  $3x - y = 0$  a)  $3x + y - 16 = 0$  c)  $3x - y - 16 = 0$

### Тест по теме «Кривые второго порядка»

1. Уравнение эллипса имеет вид:

a)  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  b)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  c)  $y^2 = 2px$

2. Уравнение гиперболы имеет вид:

$$a) \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad b) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad c) y^2 = 2px$$


---

3. Уравнение параболы имеет вид:

$$a) \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad b) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad c) y^2 = 2px$$


---

4. Найти радиус окружности  $x^2 + y^2 + 4y - 5 = 0$

$$a) 7 \quad b) \underline{3} \quad c) 5$$

5. Чему равна большая полуось эллипса  $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{25} = 1$

$$a) \underline{6} \quad b) 11 \quad c) 5$$

6. Найти эксцентриситет эллипса  $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{51} = 1$

$$a) 6 \quad b) 0,3 \quad c) \underline{0,7}$$

7. Чему равна действительная ось гиперболы  $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{25} = 1$

$$a) 6 \quad b) \underline{18} \quad c) 5$$

8. Найти эксцентриситет гиперболы  $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{11} = 1$

$$a) 14 \quad b) \frac{3}{5} \quad c) \underline{\frac{6}{5}}$$

9. Записать уравнения асимптот гиперболы  $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{256} = 1$

$$a) y = \pm \frac{4}{3}x \quad b) y = \pm \frac{3}{4}x \quad c) y = \pm 3x$$


---

10. Записать уравнение параболы с вершиной в начале координат, если ее фокус находится в точке  $F(3;0)$

$$a) y^2 = 2x \quad b) \underline{y^2 = 12x} \quad c) y = 12x^2$$

11. Для гиперболы  $16x^2 - 9y^2 = 144$  найти расстояние между фокусами.

$$a) 6 \quad b) \underline{10} \quad c) 5$$

12. Найти координаты центра окружности  $x^2 + y^2 - 8x - 10y - 8 = 0$

$$a) \underline{(4;5)} \quad b) (5;4) \quad c) (2;5)$$

13. Найти координаты радиус окружности  $x^2 + y^2 - 8x - 10y - 8 = 0$

$$a) 6 \quad b) 10 \quad c) \underline{7}$$



## Пределы и непрерывность

### Устный опрос

1. Дайте определения предела функции в точке.
2. Сформулировать свойства пределов
3. Какие типы неопределенностей вам известны?
4. Как избавиться от неопределенности  $\frac{0}{0}$  ?
5. Чему равно значение предела функции при неопределенности  $\frac{c}{0}$  ?
6. Чему равно значение предела функции при неопределенности  $\frac{0}{c}$  ?
7. Сформулируйте первый и второй замечательный пределы.
8. Чему равна неопределенность вида  $c^\infty$  ?
9. Чему равна неопределенность вида  $0 \cdot c$  ?

### Практическая работа № 6 по теме

#### «Вычисление пределов»

**Цель:** Проверить умения и навыки студентов в вычислении пределов, раскрытия неопределенностей.

#### Задания

##### 1. Найти указанные пределы.

1.1.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 12x + 20}$  ответ:  $\frac{1}{8}$

1.2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - x^2 + 2x}{x^2 + x}$  ответ: 1

1.3.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{6 + x - x^2}{x^3 - 27}$  ответ:  $-\frac{5}{27}$

1.4.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x - 1}{3x^2 - x - 2}$  ответ:  $\frac{3}{5}$

1.5.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 7x + 4}{x^2 - 5x + 6}$  ответ: нет решения

1.6.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{12 + x - x^2}{x^3 - 27}$  ответ: нет решения

1.7.  $\lim_{x \rightarrow 1/3} \frac{3x^2 + 2x - 1}{27x^3 - 1}$  ответ:  $\frac{4}{9}$

1.8.  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 4x - 5}{x^2 - 2x - 3}$  ответ:  $\frac{11}{4}$

1.9.  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 2x - 1}{-x^2 + x + 2}$  ответ:  $-\frac{4}{3}$

1.10.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 11x + 6}{2x^2 - 5x - 3}$  ответ: 1

1.11.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 + x - 6}$  ответ:  $\frac{12}{5}$

1.12.  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x^3 + 1}$  ответ: -1

$$1.13. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^2 + x - 20} \text{ ответ: } \frac{8}{9} \quad 1.14. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{4x^2 + 11x - 3}{x^2 + 2x - 3} \text{ ответ: } \frac{13}{4}$$

$$1.15. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 7x - 6}{2x^2 - 7x + 3} \text{ ответ: } \frac{1}{5} \quad 1.16. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{4x^2 + 7x - 2}{3x^2 + 8x + 4} \text{ ответ: } \frac{9}{4}$$

$$1.17. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{5x^2 + 4x - 1}{3x^2 + x - 2} \text{ ответ: } \frac{6}{5} \quad 1.18. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 4x - 5}{3x^2 + 2x - 2} \text{ ответ: } 0$$

$$1.19. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{7x^2 + 4x - 3}{2x^2 + 3x + 1} \text{ ответ: } 1 \quad 1.20. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^2 - 3x + 2}{x^2 - x - 12} \text{ ответ: нет решения}$$

$$1.21. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 9x + 10}{x^2 + 3x - 10} \text{ ответ: } -\frac{1}{7} \quad 1.22. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2 + x - 5}{x^2 - 2x + 1} \text{ ответ: нет решения}$$

$$1.23. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-5x^2 + 11x - 2}{3x^2 - x - 10} \text{ ответ: } -\frac{9}{11} \quad 1.24. \lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2 - 5x - 14}{2x^2 - 9x - 35} \text{ ответ: } \frac{9}{19}$$

$$1.25. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x^2 - 6x - 45}{2x^2 - 3x - 35} \text{ ответ: } \frac{24}{17} \quad 1.26. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{4x^2 + 3x + 15}{x^2 - 6x - 27} \text{ ответ: нет решения}$$

$$1.27. \lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 - 2x - 35}{2x^2 + 11x + 5} \text{ ответ: } \frac{4}{3} \quad 1.28. \lim_{x \rightarrow -8} \frac{2x^2 + 15x - 8}{3x^2 + 25x + 8} \text{ ответ: } \frac{17}{23}$$

$$1.29. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^2 - 2x - 40}{x^2 - 3x - 4} \text{ ответ: } \frac{22}{5} \quad 1.30. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 5x - 3}{3x^2 + 10x + 3} \text{ ответ: } \frac{7}{8}$$

## 2. Найти указанные пределы

$$2.1. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 11x + 15}{3x^2 + 5x - 12} \text{ ответ: } \frac{1}{13} \quad 2.2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + 5x - 10}{x^3 - 1} \text{ ответ: нет решения}$$

$$2.3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 3} \text{ ответ: } 0 \quad 2.4. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 + 2x + 1}{x^3 - 8} \text{ ответ: нет решения}$$

$$2.5. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 - x^2 + x + 1}{x^4 + 1} \text{ ответ: } 0 \quad 2.6. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x - 1}{x^4 - 1} \text{ ответ: нет решения}$$

$$2.7. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x + 3}{5x^2 + 3x - 3} \text{ ответ: } \frac{5}{23} \quad 2.8. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 2x}{x^2 + 4x + 4} \text{ ответ: нет решения}$$

$$2.9. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2} \text{ ответ: } -2 \quad 2.10. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^2 + 7x - 4}{x^3 + 64} \text{ ответ: } -\frac{3}{16}$$

$$2.11. \lim_{x \rightarrow -5} \frac{4x^2 + 19x - 5}{2x^2 + 11x + 5} \text{ ответ: } \frac{7}{3} \quad 2.12. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^3 + x - 2} \text{ ответ: } \frac{1}{2}$$

- 2.13.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{2x^2 - 7x + 5}$  *ответ: 0*
- 2.14.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{2x^2 - 9x + 10}$  *ответ: -12*
- 2.15.  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{9x^2 + 17x - 2}{x^2 + 2x}$  *ответ:  $\frac{19}{2}$*
- 2.16.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x - 2}{x^3 - x^2 - x + 1}$  *ответ: нет решения*
- 2.17.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3 - 2x^2 + 5x}{3x^2 + 7x}$  *ответ:  $\frac{5}{7}$*
- 2.18.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^4 - 5x^2 + 1}{x^2 - 1}$  *ответ: 3*
- 2.19.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 + 5x - 1}{x^2 - 5x + 6}$  *ответ: нет решения*
- 2.20.  $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 - x - 30}{x^3 + 125}$  *ответ:  $-\frac{11}{75}$*
- 2.21.  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 + 3x - 28}{x^3 - 64}$  *ответ:  $\frac{11}{48}$*
- 2.22.  $\lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{8x^3 - 1}{x^2 - 1/4}$  *ответ: 6*
- 2.23.  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 + 3x - 28}{x^2 - 4x}$  *ответ:  $\frac{11}{4}$*
- 2.24.  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 + 11x + 10}{x^2 - 5x + 14}$  *ответ: 0*
- 2.25.  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{3x^2 + x - 10}$  *ответ:  $\frac{4}{11}$*
- 2.26.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + x}{4x^2 - 5x + 1}$  *ответ: 0*
- 2.27.  $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{2x^2 - 11x - 6}{3x^2 - 20x + 12}$  *ответ:  $\frac{13}{16}$*
- 2.28.  $\lim_{x \rightarrow -6} \frac{x^2 + 2x - 24}{2x^3 + 15x + 18}$  *ответ: 0*
- 2.29.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x - 4}{x^2 - 11x + 18}$  *ответ:  $-\frac{10}{7}$*
- 2.30.  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3 - 64}{7x^2 - 27x - 4}$  *ответ:  $\frac{48}{29}$*

### 3. Найти указанные пределы

- 3.1.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 5x^2 + 2}{2x^3 + 5x^2 - x}$
- 3.2.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + 7x}{2x^3 - 4x^2 + 5}$
- 3.3.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4 - 3x^2 + 7}{x^4 + 2x^3 + 1}$
- 3.4.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 - 2x^2 + 4x}{2x^3 + 5}$
- 3.5.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 4x^2 + 28x}{5x^3 + 3x^2 + x - 1}$
- 3.6.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 10x + 3}{2x^2 + 5x - 3}$
- 3.7.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x^4 + x^2 + x}{x^4 + 3x - 2}$
- 3.8.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 7x + 3}{5x^2 - 3x + 4}$
- 3.9.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2 + 3x + 1}{3x^2 + x - 5}$
- 3.10.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 10}{7x^3 + 2x + 1}$
- 3.11.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 5x - 7}{2x^2 - x + 10}$
- 3.12.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + 2x + 1}{x^4 - x^3 + 2x}$

$$3.13. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 2x + 9}{2x^2 - x + 4}$$

$$3.14. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 5x - 7}{3x^2 + x + 1}$$

$$3.15. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 7x - 2}{3x^3 - x - 4}$$

$$3.16. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{18x^2 + 5x}{8 - 3x - 9x^2}$$

$$3.17. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 6x^2 + 2}{x^4 + 4x - 3}$$

$$3.18. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^2 + 4x - 5}{4x^2 - 3x + 2}$$

$$3.19. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^4 - 4x^2 + 3}{2x^4 + 1}$$

$$3.20. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 4x + 2}{6x^2 + 5x + 1}$$

$$3.21. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 + 4x}{x^3 - 3x + 2}$$

$$3.22. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + 4x - x^4}{x + 3x^2 + 2x^4}$$

$$3.23. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 7x^2 - 2}{6x^3 - 4x + 3}$$

$$3.24. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + 14x^2}{1 + 2x + 7x^2}$$

$$3.25. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 2x^2 + 5x^4}{2 + 3x^2 + x^4}$$

$$3.26. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 2x^2 - 7}{3x^4 + 3x + 5}$$

$$3.27. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 - 5x^2 - 3x^5}{x^5 + 6x + 8}$$

$$3.28. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 7x^2 + 3}{2 + 2x - x^3}$$

$$3.29. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - 2x + 1}{2x^3 + 3x^2 + 2}$$

$$3.30. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 3x + 1}{3x^2 + x - 5}$$

#### 4. Найти указанные пределы

$$4.1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 - 2x + 4}{2x^4 + 3x^2 + 1}$$

$$4.2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + 2x - 5}{2x^2 + x + 7}$$

$$4.3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 7x - 4}{x^5 + 2x - 1}$$

$$4.4. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x - x^6}{x^2 - 2x + 5}$$

$$4.5. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 7x - 1}{3x^4 + 2x + 5}$$

$$4.6. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 7x^2 + 4}{x^4 + 5x - 1}$$

$$4.7. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^6 - 5x^2 + 2}{2x^3 + 4x - 5}$$

$$4.8. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^7 + 5x^2 - 4x}{3x^2 + 11x - 7}$$

$$4.9. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^2 + 5x + 9}{1 + 4x - x^3}$$

$$4.10. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + x^2 - 6}{2x^2 + 3x + 1}$$

$$4.11. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 5x + 7}{3x^4 - 2x^2 + x}$$

$$4.12. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 4x^2 - 7x}{2x^2 + 7x - 3}$$

$$4.13. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^3 - 3x^2 + 7}{2x^4 + 3x^2 + 1}$$

$$4.14. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 3x + 1}{1 + 2x - x^4}$$

$$4.15. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 + 3x^2 + 5}{3x^2 - 4x + 1}$$

$$4.16. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 - 5x + 2}{4x^3 + 2x - 1}$$

$$4.17. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{11x^3 + 3x}{2x^2 - 2x + 1}$$

$$4.18. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^2 + 3x + 5}{4x^3 - 2x^2 + 1}$$

$$4.19. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x^3 + 5x^2 - 3}{2x^2 - x + 7}$$

$$4.20. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 4x - 7}{x^4 - 2x^3 + 1}$$

$$4.21. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8x^5 - 4x^3 + 3}{2x^3 + x - 7}$$

$$4.22. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 7x + 1}{x^3 + 4x^2 - 3}$$

$$4.23. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^4 - 2x^3 + 3}{2x^2 + 3x - 7}$$

$$4.24. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^3 + x^2 - 7}{2x^2 - 5x + 3}$$

$$4.25. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^4 + 2x^2 - 8}{8x^3 - 4x + 5}$$

$$4.26. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + 2x - 4}{3x^2 - 4x + 1}$$

$$4.27. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7x^3 - 2x + 4}{2x^2 + x - 5}$$

$$4.28. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + 5x^2 - 3x}{3x^2 + x - 10}$$

$$4.29. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + 10x - 11}{3x^4 - 2x + 5}$$

$$4.30. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 + 3x - 4}{2x^2 - 5x + 1}$$

## 5. Найти указанные пределы

$$5.1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 3x - 5}{7x^3 - 2x^2 + 1}$$

$$5.2. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 - 7x + 2}{x^4 + 2x - 4}$$

$$5.3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^4 - 3x + 4}{3x^2 - 2x + 1}$$

$$5.4. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - x + 7}{3x^4 - 5x^2 + 10}$$

$$5.5. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^3 - 2x^2 + x}{3x^2 - x}$$

$$5.6. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 2x + 1}{3x^2 + 2x - 5}$$

$$5.7. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 5x + 2}{x^4 + 3x^2 - 9}$$

$$5.8. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^2 - 4x + 2}{4x^3 + 2x - 5}$$

$$5.9. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 3x^2 + 2x}{x^2 + 7x + 1}$$

$$5.10. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 - 7x + 5}{4x^5 - 3x^3 + 2}$$

$$5.11. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^5 + 6x^4 - x^3}{2x^2 + 6x + 1}$$

$$5.12. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 - 3x - 2x^2}{3x^4 + 5x}$$

$$5.13. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7-3x^4}{2x^3+3x^2-5}$$

$$5.14. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^4+7x^3-3}{3x^2-5x+1}$$

$$5.15. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x+7}{2-3x+4x^2}$$

$$5.16. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3-3x+1}{7x+5}$$

$$5.17. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10x-7}{3x^4+2x^3+1}$$

$$5.18. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4-3x^2}{1+2x+3x^2}$$

$$5.19. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x+3}{x^3-4x^2-x}$$

$$5.20. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^4+5x}{2x^2-3x-7}$$

$$5.21. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2-5x+3}{3x^4-2x^2+x}$$

$$5.22. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^5-x^3}{4x^2+3x-6}$$

$$5.23. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+1}{x^3-5x^2+4x}$$

$$5.24. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2-x-3x^2}{x^3-16}$$

$$5.25. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2-10x+7}{2x^3-3x}$$

$$5.26. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3-3x+1}{x^5+4x^3}$$

$$5.27. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-13}{x^7-3x^5-4x}$$

$$5.28. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2-3x+1}{x^3+2x^2+5}$$

$$5.29. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3-81}{3x^2+4x+2}$$

$$5.30. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x+4}{3x^3-5x+1}$$

## 6. Найти указанные пределы

$$6.1. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2+x-12}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}} \text{ ответ: } 7$$

$$6.2. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x+12}-\sqrt{4-x}}{x^2+2x-8} \text{ ответ: } -\frac{\sqrt{8}}{48}$$

$$6.3. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{x+10}-\sqrt{4-x}}{2x^2-x-21} \text{ ответ: } -\frac{\sqrt{7}}{91}$$

$$6.4. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x+6}}{x^2-x-6} \text{ ответ: } \frac{1}{10}$$

$$6.5. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3+2x}-\sqrt{x+4}}{3x^2-4x+1} \text{ ответ: } \frac{\sqrt{5}}{20}$$

$$6.6. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-3x+2}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x+1}} \text{ ответ: } -\sqrt{3}$$

$$6.7. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2+4x+1}{\sqrt{x+3}-\sqrt{5+3x}} \text{ ответ: } 2\sqrt{2}$$

$$6.8. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^2-9x+4}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x-3}} \text{ ответ: } -7$$

$$6.9. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+6}}{2x^2-7x-15} \text{ ответ: } \frac{\sqrt{11}}{286}$$

$$6.10. \lim_{x \rightarrow -5} \frac{\sqrt{3x+17}-\sqrt{2x+12}}{x^2+8x+15} \text{ ответ: } -\frac{\sqrt{2}}{8}$$

$$6.11. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1}-1} \text{ ответ: } 2$$

$$6.12. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{7-x}-\sqrt{7+x}}{\sqrt{7}x} \text{ ответ: } -\frac{1}{7}$$

$$\begin{array}{ll}
6.13. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} \text{ ответ: } 3 & 6.14. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{\sqrt{x-2} - \sqrt{2}} \text{ ответ: } \frac{2\sqrt{2}}{3} \\
6.15. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{5+x} - 2}{\sqrt{8-x} - 3} \text{ ответ: } -\frac{3}{2} & 6.16. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x+4} - 3}{\sqrt{x-1} - 2} \text{ ответ: } \frac{3}{2} \\
6.17. \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x-3} - 2}{\sqrt{x+2} - 3} \text{ ответ: } \frac{3}{2} & 6.18. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{4x-3} - 3}{x^2 - 9} \text{ ответ: } \frac{1}{9} \\
6.19. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{5x+1} - 4}{x^2 + 2x - 15} \text{ ответ: } \frac{5}{64} & 6.20. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{x^2 + 4}}{3x^2} \text{ ответ: } -\frac{1}{12} \\
6.21. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{\sqrt{x^2 + 16} - 4} \text{ ответ: } 2 & 6.22. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sqrt{5-x} - \sqrt{5+x}} \text{ ответ: } -3\sqrt{5} \\
6.23. \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{2x+7} - 5}{3 - \sqrt{x}} \text{ ответ: } -\frac{6}{5} & 6.24. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{\sqrt{6x+1} - 5} \text{ ответ: } -\frac{25}{24} \\
6.25. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{\sqrt{3x} - x} \text{ ответ: } -5 & 6.26. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x^2} - 1}{x^3 + x^2} \text{ ответ: } \frac{3}{2} \\
6.27. \lim_{x \rightarrow -4} \frac{\sqrt{x+20} - 4}{x^3 + 64} \text{ ответ: } \frac{1}{384} & 6.28. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 2}{\sqrt{8+x} - 3} \text{ ответ: } \frac{10}{\sqrt{10} - 3} \\
6.29. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9+x} - 3}{x^2 + x} \text{ ответ: } \frac{1}{16} & 6.30. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x+1} - 3}{x^3 - 8} \text{ ответ: } \frac{1}{18}
\end{array}$$

## 7. Найти указанные пределы

$$\begin{array}{ll}
7.1. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+4}{x+8} \right)^{-3x} \text{ Ответ: } e^{12} & 7.2. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x}{x+1} \right)^{2x-3} \text{ Ответ: } e^{-12} \\
7.3. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x}{1+2x} \right)^{-4x} \text{ Ответ: } e^2 & 7.4. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-1}{x} \right)^{2-3x} \text{ Ответ: } e^3 \\
7.5. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x+5}{2x+1} \right)^{5x} \text{ Ответ: } e^{10} & 7.6. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+3}{x} \right)^{-5x} \text{ Ответ: } e^{-15} \\
7.7. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+2}{x+1} \right)^{1+2x} \text{ Ответ: } e^2 & 7.8. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+3}{x-1} \right)^{x-4} \text{ Ответ: } e^4 \\
7.9. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x}{2x-3} \right)^{3x} \text{ Ответ: } e^{9/2} & 7.10. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-7}{x} \right)^{2x+1} \text{ Ответ: } e^{-14}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
7.11. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-1}{x+4} \right)^{3x+2} \text{ Ответ: } e^{-15} & 7.12. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x+1}{2x-1} \right)^{x+2} \text{ Ответ: } e \\
7.13. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-2}{x+1} \right)^{2x-3} \text{ Ответ: } e^{-6} & 7.18. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+5}{x} \right)^{3x+4} \text{ Ответ: } e^{15} \\
7.19. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-7}{x+1} \right)^{4x-2} \text{ Ответ: } e^{-32} & 7.20. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+2}{x} \right)^{3-2x} \text{ Ответ: } e^{-4} \\
7.21. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2-3x}{5-3x} \right)^x \text{ Ответ: } e & 7.22. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1-x}{2-x} \right)^{3x} \text{ Ответ: } e^3 \\
7.23. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{4x-1}{4x+1} \right)^{2x} \text{ Ответ: } e^{-1} & 7.24. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x+4}{3x} \right)^{-2x} \text{ Ответ: } e^{-8/3} \\
7.25. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x-1}{2x+4} \right)^{-x} \text{ Ответ: } e^{5/2} & 7.26. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x+4}{3x+5} \right)^{x+1} \text{ Ответ: } e^{-1/3} \\
7.27. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1+2x}{3+2x} \right)^{-x} \text{ Ответ: } e & 7.28. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x}{3x+2} \right)^{x-2} \text{ Ответ: } e^{-2/3} \\
7.29. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x}{x-1} \right)^{3-2x} \text{ Ответ: } e^{-2} & 7.30. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{4-2x}{1-2x} \right)^{x+1} \text{ Ответ: } e^{-3/2}
\end{array}$$

## 8. Найти указанные пределы

$$\begin{array}{ll}
8.1. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x+3}{5x+7} \right)^{x+1} \text{ Ответ: } 0 & 8.2. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x+1}{x-1} \right)^x \text{ Ответ: } \infty \\
8.3. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+1}{2x-1} \right)^{3x} \text{ Ответ: } 0 & 8.4. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x-1}{4x+1} \right)^{3x-1} \text{ Ответ: } 0 \\
8.5. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{5x+8}{x-2} \right)^{x+4} \text{ Ответ: } \infty & 8.6. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+1}{3x-1} \right)^{2x+1} \text{ Ответ: } 0 \\
8.7. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x+1}{x-1} \right)^{4x} \text{ Ответ: } \infty & 8.8. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+1}{2x-1} \right)^{5x} \text{ Ответ: } 0 \\
8.9. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+3}{2x-4} \right)^{x+2} \text{ Ответ: } 0 & 8.10. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x+1}{3x-1} \right)^{x-1} \text{ Ответ: } 0 \\
8.11. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{5x-3}{x+4} \right)^{x+3} \text{ Ответ: } \infty & 8.12. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x-3}{7x+4} \right)^x \text{ Ответ: } 0
\end{array}$$



$$8.13. \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x-5}{3x+4} \right)^{2x} \text{ Ответ: } 0$$

$$8.14. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+3}{4x-5} \right)^{2x} \text{ Ответ: } 0$$

$$8.15. \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x-2}{3x+1} \right)^{5x} \text{ Ответ: } 0$$

$$8.16. \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{3x-4}{x+6} \right)^{x-1} \text{ Ответ: } \infty$$

$$8.17. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-2}{3x+10} \right)^{3x} \text{ Ответ: } 0$$

$$8.18. \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{2x-3}{x+4} \right)^{6x+1} \text{ Ответ: } \infty$$

$$8.19. \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x+3}{3x-1} \right)^{2x} \text{ Ответ: } 0$$

$$8.20. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{6x+5}{x-10} \right)^{5x} \text{ Ответ: } \infty$$

$$8.21. \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{3x+7}{x+4} \right)^{4x} \text{ Ответ: } \infty$$

$$8.22. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-1}{4x+5} \right)^{3x} \text{ Ответ: } 0$$

$$8.23. \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{5x-7}{x+6} \right)^{2x} \text{ Ответ: } \infty$$

$$8.24. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3-4x}{2-x} \right)^{6x} \text{ Ответ: } \infty$$

$$8.25. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1-2x}{3-x} \right)^{-x} \text{ Ответ: } 0$$

$$8.26. \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{4+3x}{5+x} \right)^{7x} \text{ Ответ: } \infty$$

$$8.27. \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{3x-1}{2x+5} \right)^{3x} \text{ Ответ: } \infty$$

$$8.28. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1-x}{2-10x} \right)^{5x} \text{ Ответ: } 0$$

$$8.29. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3+x}{9x-4} \right)^{2x} \text{ Ответ: } 0$$

$$8.30. \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x+5}{4x-2} \right)^{3x} \text{ Ответ: } 0$$

## 9. Найти указанные пределы

Найти пределы.

$k$  – порядковый номер в журнале

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{(k+2)x}, 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{kx^2}{\sin^2 5x}, 3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(kx+3x)x^2}{5x},$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{k}{x} \right)^x, 5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx - \sin 5x}{kx},$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos kx}{x}$$

## Контрольные вопросы

1. Дайте определения предела функции в точке.
2. Какие типы неопределенностей вам известны?
3. Как избавиться от неопределенности  $\frac{0}{0}$  ?

4. Чему равно значение предела функции при неопределенности  $\frac{c}{0}$  ?
5. Чему равно значение предела функции при неопределенности  $\frac{0}{c}$  ?
6. Записать замечательные пределы.

## Практическая работа № 6 по теме

### «Предел функции. Непрерывность функции. Точки разрыва»

**Цель:** научиться вычислять пределы, исследовать функцию на непрерывность, классифицировать точки разрыва, строить графики функций.

**Задание 1.** Найти пределы, используя эквивалентные бесконечно малые функции.

$$2.1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x^2)}{x^3-5x^2} \text{ ответ: } -\frac{3}{5}$$

$$2.2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 5x}{\operatorname{tg} 3x} \text{ ответ: } \frac{5}{3}$$

$$2.3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{\operatorname{tg} 2x} \text{ ответ: } \frac{7}{2}$$

$$2.4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{x^3 + 27x} \text{ ответ: } \frac{1}{9}$$

$$2.5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 6x}{2x^2 - 3x}$$

$$2.6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 3x}{2x} \text{ ответ: } \frac{3}{2}$$

$$2.7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\operatorname{arctg} 2x} \text{ ответ: } \frac{5}{2}$$

$$2.8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)}{\sin 2x} \text{ ответ: } \frac{3}{2}$$

$$2.9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\operatorname{tg} 3x} \text{ ответ: } \frac{2}{3}$$

$$2.10. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(x-3)}{x^2 - 5x + 6} \text{ ответ: } 1$$

$$2.11. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos x}{2x^2} \text{ ответ: } -2$$

$$2.12. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{4x^2} \text{ ответ: } \frac{9}{2}$$

$$2.13. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 3x}{\ln(1+2x)} \text{ ответ: } \frac{3}{2}$$

$$2.14. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 4x}{\operatorname{tg} 5x} \text{ ответ: } \frac{4}{5}$$

$$2.15. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - 1}{\sin 2x} \text{ ответ: } \frac{5}{2}$$

$$2.16. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\operatorname{tg}(x+2)}{x^2 - 4} \text{ ответ: } -\frac{1}{4}$$

$$2.17. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sin(x+2)}{x^3 + 8} \text{ ответ: } \frac{1}{12}$$

$$2.18. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{\operatorname{tg} 4x} \text{ ответ: } \frac{1}{2}$$

$$2.19. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3 - 64}{\operatorname{tg}(x-4)} \text{ ответ: } 48$$

$$2.20. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos 4x}{3x^2} \text{ ответ: } 2$$

$$2.21. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+4x^3)}{2x^3} \text{ ответ: } 2$$

$$2.22. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 5x}{\operatorname{tg} 2x} \text{ ответ: } \frac{5}{2}$$

$$2.23. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\ln(1+2x)} \text{ ответ: } \frac{3}{2}$$

$$2.24. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 8x}{\operatorname{tg} 4x} \text{ ответ: } 2$$

$$2.25. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - 1}{\operatorname{tg} 2x} \text{ ответ: } \frac{5}{2}$$

$$2.26. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+4x)}{\sin 2x} \text{ ответ: } \frac{4}{2}$$

$$2.27. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(x-3)}{x^3 - 27} \text{ ответ: } \frac{1}{27}$$

$$2.28. \lim_{x \rightarrow -5} \frac{\operatorname{tg}(x+5)}{x^2 - 25}$$

$$2.29. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 8x}{2x^2} \text{ ответ: } 1$$

$$2.30. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+5x)}{\sin 3x} \text{ ответ: } \frac{5}{3}$$

**Задание 2.** Исследовать данные функции на непрерывность и построить их графики.

$$2.1. f(x) = \begin{cases} x+4, & x < -1, \\ x^2+2, & -1 \leq x \leq 1, \\ 2x, & x \geq 1. \end{cases}$$

$$2.2. f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 0 \\ (x+1)^2, & 0 \leq x \leq 2 \\ -x+4, & x > 2 \end{cases}$$

$$2.3. f(x) = \begin{cases} x+2, & x \leq -1 \\ x^{2+1}, & -1 < x \leq 1 \\ -x+3, & x > 1 \end{cases}$$

$$2.4. f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0 \\ -(x-1)^2, & 0 < x < 2 \\ x-3, & x \geq 2 \end{cases}$$

$$2.5. f(x) = \begin{cases} -2(x+1), & x \leq -1 \\ (x+1)^3, & -1 < x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$2.6. f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0 \\ x^2, & 0 < x \leq 2 \\ x+1, & x > 2 \end{cases}$$

$$2.7. f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x \leq 1 \\ 2x, & 1 < x \leq 3 \\ x+2, & x > 3 \end{cases}$$

$$2.8. f(x) = \begin{cases} x-3, & x < 0 \\ x+1, & 0 \leq x \leq 4 \\ 3+x, & x > 4 \end{cases}$$

$$2.9. f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x}, & x \leq 0 \\ 0, & 0 < x \leq 2 \\ x-2, & x > 2 \end{cases}$$

$$2.10. f(x) = \begin{cases} 2x^3, & x \leq 0 \\ x, & 0 < x \leq 1 \\ 2+x, & x > 1 \end{cases}$$

$$2.11. f(x) = \begin{cases} \sin x, & x < 0 \\ x, & 0 \leq x \leq 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases}$$

$$2.12. f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} < x < \pi \\ 2, & x \geq \pi \end{cases}$$

$$23.13. f(x) = \begin{cases} x-1, & x \leq 0 \\ x^2, & 0 < x < 2 \\ 2x, & x \geq 2 \end{cases}$$

$$2.14. f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 0 \\ x^2-1, & 0 \leq x < 1 \\ -x, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$2.15. f(x) = \begin{cases} -x, x < 0 \\ x^2 + 1, 0 \leq x < 2 \\ x + 1, x \geq 2 \end{cases}$$

$$2.16. f(x) = \begin{cases} x + 3, x \leq 0 \\ 1, 0 < x \leq 2 \\ x^2 - 2, x > 2 \end{cases}$$

$$2.17. f(x) = \begin{cases} x - 1, x < 0 \\ \sin x, 0 \leq x < \pi \\ 3, x \geq \pi \end{cases}$$

$$2.18. f(x) = \begin{cases} -x + 1, x < -1 \\ x^2 + 1, -1 \leq x \leq 2 \\ 2x, x > 2 \end{cases}$$

$$2.19. f(x) = \begin{cases} 1, x \leq 0 \\ 2, 0 < x \leq 2 \\ x + 3, x > 2 \end{cases}$$

$$2.20. f(x) = \begin{cases} -x + 2, x \leq -2 \\ x^3, -2 < x \leq 1 \\ 2, x > 1 \end{cases}$$

$$2.21. f(x) = \begin{cases} 3x + 4, x \leq -1 \\ x^2 - 2, -1 < x < 2 \\ x, x \geq 2 \end{cases}$$

$$2.22. f(x) = \begin{cases} x, x \leq 1 \\ (x - 2)^2, 1 < x < 3 \\ -x + 6, x \geq 3 \end{cases}$$

$$2.23. f(x) = \begin{cases} x - 1, x < 1 \\ x^2 + 2, 1 \leq x \leq 2 \\ -2x, x > 2 \end{cases}$$

$$2.24. f(x) = \begin{cases} x^3, x < -1 \\ x - 1, -1 \leq x \leq 3 \\ -x + 5, x > 3 \end{cases}$$

$$2.25. f(x) = \begin{cases} x, x < -2 \\ -x + 1, -2 \leq x \leq 1 \\ x^2 - 1, x > 1 \end{cases}$$

$$2.26. f(x) = \begin{cases} x + 3, x \leq 0 \\ -x^2 + 4, 0 < x < 2 \\ x - 2, x \geq 2 \end{cases}$$

$$2.27. f(x) = \begin{cases} 0, x \leq -1 \\ x^2 - 1, -1 < x \leq 2 \\ 2x, x > 2 \end{cases}$$

$$2.28. f(x) = \begin{cases} -1, x < 0 \\ \cos x, 0 \leq x \leq \pi \\ 1 - x, x > \pi \end{cases}$$

$$2.29. f(x) = \begin{cases} 2, x < -1 \\ 1 - x, -1 \leq x \leq 1 \\ \ln x, x > 1 \end{cases}$$

$$2.30. f(x) = \begin{cases} -x, x \leq 0 \\ x^3, 0 < x \leq 2 \\ x + 4, x > 2 \end{cases}$$

**Задание 3.** Исследовать данные функции на непрерывность в указанных точках

$$3.1. f(x) = 2^{\frac{1}{x-3}} + 1, \quad x_1 = 3, \quad x_2 = 4$$

$$3.2. f(x) = 5^{\frac{1}{x-3}} - 1, \quad x_1 = 3, \quad x_2 = 4$$

$$3.3. f(x) = \frac{x+7}{x-2}, \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 3$$

$$3.4. f(x) = \frac{x-5}{x+3}, \quad x_1 = -2, \quad x_2 = -3$$

$$3.5. f(x) = 4^{\frac{1}{3-x}} + 2, \quad x_1 = 3, \quad x_2 = 2$$

$$3.6. f(x) = 9^{\frac{1}{2-x}}, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 2$$

$$3.7. f(x) = 2^{\frac{1}{x-5}} + 1, \quad x_1 = 5, \quad x_2 = 4$$

$$3.8. f(x) = 5^{\frac{1}{x-4}} - 1, \quad x_1 = 3, \quad x_2 = 4$$

$$3.9. f(x) = 6^{\frac{1}{x-3}} + 3, \quad x_1 = 3, \quad x_2 = 4$$

$$3.10. f(x) = 7^{\frac{1}{5-x}} + 1, \quad x_1 = 5, \quad x_2 = 4$$

$$3.11. f(x) = \frac{x-3}{x+4}, \quad x_1 = -5, \quad x_2 = -4$$

$$3.12. f(x) = \frac{x+5}{x-2}, \quad x_1 = 3, \quad x_2 = 2$$

$$3.13. f(x) = 5^{\frac{2}{x-3}}, \quad x_1 = 3, \quad x_2 = 4$$

$$3.14. f(x) = 4^{\frac{2}{x-1}} - 3, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 2$$

$$3.15. f(x) = 2^{\frac{5}{1-x}} - 1, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 1$$

$$3.16. f(x) = 8^{\frac{4}{x-2}} - 1, \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 3$$

$$3.17. f(x) = 5^{\frac{4}{3-x}} + 1, \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 3$$

$$3.18. f(x) = \frac{3x}{x-4}, \quad x_1 = 5, \quad x_2 = 4$$

$$3.19. f(x) = \frac{2x}{x^2-1}, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 2$$

$$3.20. f(x) = 2^{\frac{3}{x+2}} + 1, \quad x_1 = -2, \quad x_2 = -1$$

$$3.21. f(x) = 4^{\frac{3}{x-2}} + 2, \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 3$$

$$4.22. f(x) = 3^{\frac{2}{x+1}} - 2, \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 0$$

$$3.23. f(x) = 5^{\frac{3}{x+4}} + 1, \quad x_1 = -5, \quad x_2 = -4$$

$$3.24. f(x) = \frac{x-4}{x+2}, \quad x_1 = -2, \quad x_2 = -1$$

$$3.25. f(x) = \frac{x-4}{x+3}, \quad x_1 = -3, \quad x_2 = -2$$

$$3.26. f(x) = \frac{x+5}{x-3}, \quad x_1 = 3, \quad x_2 = 4$$

$$3.27. f(x) = 3^{\frac{4}{1-x}} + 1, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 2$$

$$3.28. f(x) = \frac{4x}{x+5}, \quad x_1 = -5, \quad x_2 = -4$$

$$3.29. f(x) = 6^{\frac{2}{4-x}}, \quad x_1 = 3, \quad x_2 = 4$$

$$3.30. f(x) = \frac{x+1}{x-2}, \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 3$$

### Контрольные вопросы

1. Какие величины называют бесконечно малыми одного порядка малости?
2. Какие величины называют эквивалентными бесконечно малыми ?
3. Какая функция называется непрерывной в точке?
4. Сколько известно вам точек разрыва функции, какие?

### Самостоятельная работа № 1

#### Вариант 1

1. Вычислить предел функции:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 8x + 15}.$$

2. Вычислить предел функции:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+5}{3x-6}.$$

3. Вычислить предел функции:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 17x}{\sin 12x}.$$

4. Вычислить предел функции:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{7}{x}\right)^{\frac{x}{3}}.$$

### Вариант 2

1. Вычислить предел функции:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 + x - 20}{x^2 - 16}.$$

2. Вычислить предел функции:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x + 6}{2x - 4}.$$

3. Вычислить предел функции:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{\sin 13x}.$$

4. Вычислить предел функции:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{12}{x}\right)^{\frac{x}{4}}.$$

### Вариант 3

1. Вычислить предел функции:

$$\lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2 - 49}{x^2 - 5x - 14}.$$

2. Вычислить предел функции:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 4}{2x - 6}.$$

3. Вычислить предел функции:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 9x}{\sin 4x}.$$

4. Вычислить предел функции:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{15}{x}\right)^{\frac{x}{5}}.$$

### Вариант 4

1. Вычислить предел функции:

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 12x + 35}{x^2 - 25}.$$

2. Вычислить предел функции:

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 1}{2x - 10}.$$

3. Вычислить предел функции:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 8x}{\sin 19x}.$$

4. Вычислить предел функции:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{x}\right)^{2x}.$$

### Вариант 5

1. Вычислить предел функции:

$$\lim_{x \rightarrow 6} \frac{x^2 - 3x - 18}{x^2 - 36}.$$

2. Вычислить предел функции:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x - 3}{3x - 12}.$$

3. Вычислить предел функции:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 14x}.$$

4. Вычислить предел функции:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{10}{x}\right)^{3x}.$$

### Вариант 6

1. Вычислить предел функции:

$$\lim_{x \rightarrow 9} \frac{x^2 - 81}{x^2 - 11x + 18}.$$

2. Вычислить предел функции:

$$\lim_{x \rightarrow 6} \frac{3x - 5}{2x - 12}.$$

3. Вычислить предел функции:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 19x}{\sin 3x}.$$

4. Вычислить предел функции:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{14}{x}\right)^{2x}.$$



## Самостоятельная работа №2

### Вариант 1

Исследовать функцию  $f(x) = \frac{1}{x}$  на непрерывность в точке  $x_0 = 0$ .

### Вариант 2

Исследовать функцию  $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{при } x \neq 0, \\ 1 & \text{при } x = 0 \end{cases}$  на непрерывность в точке  $x_0 = 0$

### Вариант 3

Исследовать функцию  $f(x) = x^2$  на непрерывность в точке  $x_0 = 0$ .

### Вариант 4

Исследовать функцию  $f(x) = x^3$  на непрерывность в точке  $x_0 = 0$ .

### Вариант 5

Исследовать функцию  $f(x) = \begin{cases} x^3, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$  на непрерывность в точке  $x_0 = 0$

### Вариант 6

Исследовать функцию  $f(x) = \begin{cases} -5x, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$  на непрерывность в точке  $x_0 = 0$

## Понятие производной и ее геометрический смысл. Дифференциал функции

### Устный опрос

1. Что называется производной функции?
2. Сформулируйте правила дифференцирования ?
3. Какая функция называется сложной?
3. Сформулируйте правило нахождения производной сложной функции.
4. Что называется дифференциалом функции?
5. Как найти производные и дифференциалы высших порядков?
6. Правило Лопиталя.

7.Что такое экстремум функции?

8. Что такое точки перегиба , интервалы выпуклости ,вогнутости?

9.Как найти асимптоты ?

10.Рассказать общую схему исследования функции.

**Практическая работа № 7 по теме «Нахождение производной сложной функции. Геометрический смысл производной. Дифференциал функции»**

**«Вычисление производных»**

**Цель:** Проверить знания и умения по нахождению производных элементарных и сложных функций.

Задание 1.Найти производные функций

B1  $Y=x^5-5x^2+11$

$$Y=x^2 \operatorname{ctgx}$$

$$Y=\frac{\operatorname{arctgx}}{x}$$

$$Y=\sqrt[3]{x^3+5}$$

$$Y=e^{-x^2} \ln x$$

$$Y=(\cos x - 1)^{2x}$$

B2  $Y=2x^3-x^2+17$

$$Y=x^5 \operatorname{tgx}$$

$$Y=\frac{\operatorname{artgx}}{4x}$$

$$Y=\sqrt[3]{x^2-3}$$

$$Y=\ln \frac{x}{x+1}$$

B3  $Y=7x^3+3x^2-2$

$$Y=x \operatorname{arctgx}$$

$$Y=\frac{x+5}{\ln x}$$

B16  $Y=x^5-5x^2+11$

$$Y=x^2 \operatorname{ctgx}$$

$$Y=\frac{\operatorname{arctgx}}{x}$$

$$Y=\sqrt[3]{x^3+5}$$

$$Y=e^{-x^2} \ln x$$

B17  $Y=2x^3-x^2+17$

$$Y=x^5 \operatorname{tgx}$$

$$Y=\frac{\operatorname{artgx}}{4x}$$

$$Y=\sqrt[3]{x^2-3}$$

$$Y=\ln \frac{x}{x+1}$$

B18  $Y=7x^3+3x^2-2$

$$Y=x \operatorname{arctgx}$$

$$Y=\frac{x+5}{\ln x}$$

$$Y = \frac{1}{(2x+11)^5}$$

$$Y = \sin^3\left(4x^2 + \frac{x}{2} - 1\right)$$

$$B4 \ Y = -3x^3 + 5x^4 - 81$$

$$Y = 2x \sin x$$

$$Y = \frac{x}{\sin x}$$

$$Y = \sqrt[4]{x^2 - 3}$$

$$Y = \cos \frac{x}{x+1}$$

$$B5 \ Y = 7x^6 - 3x^2 + 32$$

$$Y = x^3 \arcsin x$$

$$Y = \frac{2}{(3-6x)^6}$$

$$Y = \frac{\cos x}{3x}$$

$$Y = \ln(x - x^2 - 6)$$

$$B6 \ Y = -x^5 + 3x^3 - 11$$

$$Y = 3x^2 \operatorname{ctg} x$$

$$Y = \frac{\arccos x}{3x}$$

$$Y = \sqrt[5]{x^2 - 3}$$

$$Y = e^{3x^2} \ln 2x$$

$$B7 \ Y = 3x^4 - 6x^2 + 19$$

$$Y = x^3 \sin x$$

$$Y = \frac{\operatorname{tg} x}{3x}$$

$$Y = \sqrt[3]{2x^3 - 6}$$

$$Y = e^{-x^2} \ln x$$

$$Y = \frac{1}{(2x+11)^5}$$

$$Y = \sin^3\left(4x^2 + \frac{x}{2} - 1\right)$$

$$B19 \ Y = -3x^3 + 5x^4 - 81$$

$$Y = 2x \sin x$$

$$Y = \frac{x}{\sin x}$$

$$Y = \sqrt[4]{x^2 - 3}$$

$$Y = \cos \frac{x}{x+1}$$

$$B20 \ Y = 7x^6 - 3x^2 + 32$$

$$Y = x^3 \arcsin x$$

$$Y = \frac{2}{(3-6x)^6}$$

$$Y = \frac{\cos x}{3x}$$

$$Y = \ln(x - x^2 - 6)$$

$$B21 \ Y = -x^5 + 3x^3 - 11$$

$$Y = 3x^2 \operatorname{ctg} x$$

$$Y = \frac{\arccos x}{3x}$$

$$Y = \sqrt[5]{x^2 - 3}$$

$$Y = e^{3x^2} \ln 2x$$

$$B22 \ Y = 3x^4 - 6x^2 + 19$$

$$Y = x^3 \sin x$$

$$Y = \frac{\operatorname{tg} x}{3x}$$

$$Y = \sqrt[3]{2x^3 - 6}$$

$$Y = e^{-x^2} \ln x$$

$$B8 \ Y = -4X^6 + 9X^2 - 12$$

$$Y = x^3 \operatorname{tg} x$$

$$Y = \frac{\operatorname{arcc} \operatorname{tg} x}{6x}$$

$$Y = \sqrt[3]{3x + 6}$$

$$Y = 2^{-x^2} \ln x$$

$$B9 \ Y = 5x^4 - 2x^3 + 65$$

$$Y = x^2 \arcsin x$$

$$Y = \frac{5}{(6x-4)^3}$$

$$Y = \sqrt[5]{x^2 - 5}$$

$$Y = 3^{2x^2} \ln x$$

$$B10 \ Y = -2x^6 - 3x^2 + 19$$

$$Y = x^2 \operatorname{ctg} x$$

$$Y = \frac{\operatorname{arctg} x}{x}$$

$$Y = \sqrt[3]{x^3 + 5}$$

$$Y = e^{2x^2} \ln x$$

$$B11 \ Y = 8x^4 - 6x^5 + 1$$

$$Y = 2x^3 \arccos x$$

$$Y = \frac{\operatorname{tg} x}{5x}$$

$$Y = \frac{9}{(6x-5)^4}$$

$$Y = 4^{-x^2} \ln x$$

$$B12 \ Y = 3X^2 + 11x^3 - 87$$

$$Y = 3x^3 \operatorname{ctg} x$$

$$B23 \ Y = -4X^6 + 9X^2 - 12$$

$$Y = x^3 \operatorname{tg} x$$

$$Y = \frac{\operatorname{arcc} \operatorname{tg} x}{6x}$$

$$Y = \sqrt[3]{3x + 6}$$

$$Y = 2^{-x^2} \ln x$$

$$B24 \ Y = 5x^4 - 2x^3 + 65$$

$$Y = x^2 \arcsin x$$

$$Y = \frac{5}{(6x-4)^3}$$

$$Y = \sqrt[5]{x^2 - 5}$$

$$Y = 3^{2x^2} \ln x$$

$$B25 \ Y = -2x^6 - 3x^2 + 19$$

$$Y = x^2 \operatorname{ctg} x$$

$$Y = \frac{\operatorname{arctg} x}{x}$$

$$Y = \sqrt[3]{x^3 + 5}$$

$$Y = e^{2x^2} \ln x$$

$$B26 \ Y = 8x^4 - 6x^5 + 1$$

$$Y = 2x^3 \arccos x$$

$$Y = \frac{\operatorname{tg} x}{5x}$$

$$Y = \frac{9}{(6x-5)^4}$$

$$Y = 4^{-x^2} \ln x$$

$$B27 \ Y = 3X^2 + 11x^3 - 87$$

$$Y = 3x^3 \operatorname{ctg} x$$

$$Y = \frac{\cos x}{2x}$$

$$Y = \frac{\cos x}{2x}$$

$$Y = \frac{-3}{(4x+9)^5}$$

$$Y = \frac{-3}{(4x+9)^5}$$

$$Y = 5^{6x^2} \ln x$$

$$Y = 5^{6x^2} \ln x$$

$$B13 \quad Y = x^5 + 9x^2 - 51$$

$$B28 \quad Y = x^5 + 9x^2 - 51$$

$$Y = x^2 \arcsin x$$

$$Y = x^2 \arcsin x$$

$$Y = \frac{x}{\cos x}$$

$$Y = \frac{x}{\cos x}$$

$$Y = \sqrt[4]{8x^3 - 3}$$

$$Y = \sqrt[4]{8x^3 - 3}$$

$$Y = e^{2x^2} \ln x$$

$$Y = e^{2x^2} \ln x$$

$$B14 \quad Y = 3x^7 - 9x^3 + 11$$

$$B29 \quad Y = 3x^7 - 9x^3 + 11$$

$$Y = 5x^3 \operatorname{tg} x$$

$$Y = 5x^3 \operatorname{tg} x$$

$$Y = \frac{2x}{\arcsin x}$$

$$Y = \frac{2x}{\arcsin x}$$

$$Y = \sqrt[5]{2x^4 - 6}$$

$$Y = \sqrt[5]{2x^4 - 6}$$

$$Y = e^{3x^3} \ln x$$

$$Y = e^{3x^3} \ln x$$

$$B15 \quad Y = x^5 - 8x^2 + 16$$

$$B30 \quad Y = x^5 - 8x^2 + 16$$

$$Y = 4x^2 \operatorname{ctg} x$$

$$Y = 4x^2 \operatorname{ctg} x$$

$$Y = \frac{\operatorname{actg} x}{3x}$$

$$Y = \frac{\operatorname{actg} x}{3x}$$

$$Y = \frac{9}{(2x-15)^6}$$

$$Y = \frac{9}{(2x-15)^6}$$

$$Y = 6^{2x^2} \ln x$$

$$Y = 6^{2x^2} \ln x$$

Контрольные вопросы

1. Сформулировать определение производной, правила дифференцирования.
2. Знать таблицу производных элементарных функций.
3. Сформулировать правило нахождения производной сложной функции.

## Практическая работа № 8 по теме «Исследования функции и построение графика»

**Цель:** научиться исследовать функцию и по результатам исследования строить график.

**Задание 1.** Исследовать функцию по предложенной схеме и построить ее график:

1. Найти область определения функции.
2. Исследовать на четность и нечетность.
3. Исследовать на периодичность.
4. Найти стационарные и критические точки первого рода.
5. Найти промежутки возрастания и убывания функции, экстремум.
6. Найти стационарные и критические точки второго рода.
7. Найти промежутки выпуклости функции, точки перегиба.
8. Найти асимптоты (вертикальные, горизонтальные, наклонные).
9. Найти точки пересечения графика функции с осями координат.
10. Найти дополнительные точки.
11. По результатам исследования построить график функции.

B1. а)  $y = x^2(2-x)^2$ ;

б)  $y = \frac{x^2 - 2x - 8}{x+1}$

B16. а)  $y = x^3 - 12x^2 - 9x + 1$ ;

б)  $y = \frac{x^2}{x^2 + 1}$

B2. а)  $y = x\sqrt{1-x}$ ;

б)  $y = \frac{x^2 + 2x - 8}{x+3}$

B17. а)  $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x - 1$ ; б)  $y = \frac{x^2}{x-2}$

B3. а)  $y = x - \arctg x$ ;

б)  $y = \frac{x^2 - 3x - 10}{x-1}$

B18. а)  $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + \frac{1}{3}$ ; б)  $y = \frac{x^2}{x^2 - 3}$

$$\text{B4. a) } y = \frac{8}{4-x^2}; \quad \text{б) } y = \frac{x^2+3x-10}{x+3}$$

$$\text{B5. a) } y = \sqrt{\frac{1-x}{x}}; \quad \text{б) } y = \frac{x^2-4x-12}{x+3}$$

$$\text{B6. a) } y = \frac{x^2}{1+x^2}; \quad \text{б) } y = \frac{x^2+4x-12}{x-3}$$

$$\text{B7. a) } y = \frac{x}{x^2+16}; \quad \text{б) } y = \frac{x^2-x-20}{x+2}$$

$$\text{B8. a) } y = e^{\frac{x^2}{4}}; \quad \text{б) } y = \frac{x^2+x-20}{x-2}$$

$$\text{B9. a) } y = \frac{x}{x+1}; \quad \text{б) } y = \frac{x^2-2x-15}{x+4}$$

$$\text{B10. a) } y = 2x-x^2; \quad \text{б) } y = \frac{x^2+2x-15}{x-1}$$

$$\text{B11. a) } y = x^3 - 3x^2 + 4; \quad \text{б) } y = \frac{5-2x}{x^2-4}$$

$$\text{B12. a) } y = -x^3 + 3x^2 - 2; \quad \text{б) } y = \frac{x^2}{x^2-1}$$

$$\text{B13. a) } y = x^3 - 12x + 6; \quad \text{б) } y = \frac{x}{x^2+4}$$

$$\text{B19. a) } y = -x^3 + 3x^2 + 9x;$$

$$\text{б) } y = \frac{x^2-1}{3x+5}$$

$$\text{B20. a) } y = x^5 - 20x; \quad \text{б) } y = 1 - \frac{4}{x^2}$$

$$\text{B21. a) } y = x^3 + 15x^2 - x - 250; \quad \text{б) } y = \frac{x^2-1}{x}$$

$$\text{B22. a) } y = \sqrt[3]{x+2}; \quad \text{б) } y = \frac{x}{x^2+9}$$

$$\text{B23. a) } y = x^2 - 4x; \quad \text{б) } y = 3x + \frac{3}{x} + 5$$

$$\text{B24. a) } y = 3x - x^3; \quad \text{б) } y = \frac{x^2-2x-8}{x+1}$$

$$\text{B25. a) } y = 2/3x^3 - 2x = 1; \quad \text{б) } y = -\frac{x}{x^2+9}$$

$$\text{B26. a) } y = 2x^2 - x^4; \quad \text{б) } y = \frac{1-x^2}{x}$$

$$\text{B27. a) } y = 2x^2 - 8; \quad \text{б) } y = \frac{x}{x^2-1}$$

$$\text{B28. a) } y = x^4 - 8x^2 + 3; \quad \text{б) } y = \frac{1}{x^2-1}$$

B14. а)  $y = x^3 + 9x^2 + 24x + 12$

б)  $y = \frac{x^2}{6x^2 + 18}$

B29. а)  $y = \frac{3}{4-x^2}$ ; б)  $y = \frac{x^2+3x-10}{x+3}$

B15. а)  $y = -x^3 + 3x^2 - 2$ ; б)  $y = \frac{x^3}{x^2-1}$

B30. а)  $y = x\sqrt{4-x}$ ; б)  $y = \frac{x^2-2x-8}{x+3}$

### Контрольные вопросы:

1. Что такое область определения функции?
2. Какие функции называются четными, нечетными, общего вида?
3. Виды точек разрыва.
4. Что такое нули функции?
5. Как определить промежутки выпуклости?
6. Виды асимптот.

### Самостоятельная работа № 1

#### Вариант 1

1. Найти производную функции  $y = \sin^6(4x^3 - 2)$ .
2. Найти производную третьего порядка функции  $y = 3x^4 + \cos 5x$ .
3. Вычислить пределы, используя правило Лопиталя:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left( \frac{x}{\operatorname{ctg} x} - \frac{\pi}{2 \cos x} \right); \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$$

#### Вариант 2

1. Найти производную функции  $y = \cos^4(6x^2 + 9)$ .
2. Найти производную третьего порядка функции  $y = 3x^5 - \sin 3x$ .
3. Вычислить пределы, используя правило Лопиталя:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 2 \frac{x^4}{e^{ax}}, a > 0; \quad \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$$

#### Вариант 3

1. Найти производную функции  $y = \operatorname{tg}^6(3x^4 - 13)$ .



2. Найти производную третьего порядка функции  $y=4x^3-e^{5x}$ .

3. Вычислить пределы, используя правило Лопиталя:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right); \lim_{x \rightarrow \pi/4} \left( \frac{\operatorname{tg} x - 1}{\sin 4x} \right)$$

#### Вариант 4

1. Найти производную функции  $y = \operatorname{ctg}^4(5x^3 + 6)$ .

2. Найти производную третьего порядка функции  $y=5x^4 - \cos 4x$ .

3. Вычислить пределы, используя правило Лопиталя:

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (a^{1/x} - 1), a > 0$$

#### Самостоятельная работа № 2

##### Вариант 1

1. Найти область определения функции  $y = \frac{1}{\sqrt{6-x-x^2}}$ .

2. Найти область значений функции  $y=3\sin x+4\cos x$ .

3. Найти промежутки возрастания функции  $y=9x+3x^2-x^3$ .

4. Найти стационарные точки функции  $y=x+\cos x$ .

##### Вариант 2

1. Найти область определения функции  $y = \frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}$ .

2. Найти область значений функции  $y=5\sin x-12\cos x$ .

3. Найти промежутки убывания функции  $y=-18x+1,5x^2+x^3$ .

4. Найти стационарные точки функции  $y=x - \sin x$ .

##### Вариант 3

1. Найти область определения функции  $y = \frac{1}{\sqrt{7x-10-x^2}}$ .

2. Найти область значений функции  $y=12\sin x+5\cos x$ .

3. Найти промежутки убывания функции  $y=-6x-0,5x^2+1/3x^3$ .

4. Найти стационарные точки функции  $y=x+\sin x$ .

#### Вариант 4

1. Найти область определения функции  $y=\frac{1}{\sqrt{x+6-x^2}}$ .

2. Найти область значений функции  $y=4\sin x-3\cos x$ .

3. Найти промежутки убывания функции  $y=-10x+3,5x^2-1/3x^3$ .

4. Найти стационарные точки функции  $y=x-\cos x$ .

#### Самостоятельная работа № 3

##### Вариант 1

1. Определить скорость точки, движущейся по прямой по закону  $x(t)=1/3t^3-5t^2$ .

2. Точка движется по прямой по закону  $s(t)=2t^2-3t-1$ . Определить мгновенную скорость при  $t=2$ .

3. Определить ускорение точки, движущейся по закону  $s(t)=t^3-5t^2$ .

4. Тело массой  $m$  движется по закону  $x(t)=3\cos 3\pi t$ . Определить силу, действующую на тело в момент времени  $t=1/3$ .

##### Вариант 2

1. Определить скорость точки, движущейся по прямой по закону  $x(t)=1/2t^2-4t$ .

2. Точка движется по прямой по закону  $s(t)=4t^2-5t+7$ . Определить мгновенную скорость при  $t=2$ .

3. Определить ускорение точки, движущейся по закону  $s(t)=2t^2-t^3$ .

4. Тело массой  $m$  движется по закону  $x(t)=-2\sin 2\pi t$ . Определить силу, действующую на тело в момент времени  $t=1/4$ .

##### Вариант 3

1. Определить скорость точки, движущейся по прямой по закону  $x(t)=3t^3+2t^2$ .

2. Точка движется по прямой по закону  $s(t)=-t^2+10t-7$ . Определить мгновенную скорость при  $t=1$ .

3. Определить ускорение точки, движущейся по закону  $s(t)=1/3t^3-6t$ .

4. Тело массой  $m$  движется по закону  $x(t)=-2\sin 4\pi t$ . Определить силу, действующую на тело в момент времени  $t=1/8$ .

#### **Вариант 4**

1. Определить скорость точки, движущейся по прямой по закону  $x(t)=2t^3+1/4t^2$ .
2. Точка движется по прямой по закону  $s(t)=3t^2+2t-1$ . Определить мгновенную скорость при  $t=3$ .
3. Определить ускорение точки, движущейся по закону  $s(t)=t^2-t$ .
4. Тело массой  $m$  движется по закону  $x(t)=-3\cos 2\pi t$ . Определить силу, действующую на тело в момент времени  $t=1/8$ .

#### **Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных**

##### **Устный опрос**

1. Какая функция называется функцией нескольких переменных?
2. Что такое область определения функции нескольких переменных?
3. Что такое частные производные?
4. Сформулируйте правило нахождения производной сложной функции нескольких переменных.
5. Что называется полным дифференциалом функции нескольких переменных?
6. Как найти производные и дифференциалы высших порядков?
7. Что такое экстремум функции нескольких переменных?

##### **Практическая работа 9 по теме**

##### **«Нахождение частных производных. Полный дифференциал»**

Цель: проверить умение находить и строить область определения сложной функции, находить частные производные.

##### **Задания:**

1. Найти и построить область определения сложной функции.

## 2. Вычислить производную сложной функции.

**B1** 1.  $z = \arcsin(1 - x^2 - y^2)$

2.a)  $z = \sqrt{\ln x} \frac{y}{x}$ ,  $x=e$ ,  $y=1$

б)  $u = x^2 - y^2 + 3z^2$ ,  $x=1/2$ ,  $y=1/2$ ,  $z=1/2$

**B2** 1.  $z = \ln(y - \ln x)$

2.a)  $z = \sqrt{xy} \ln \frac{y}{x}$ ,  $x=1$ ,  $y=2$

в)  $u = 3x^2/2 - y^2/2 + 2z^2$ ,  $x=2/3$ ,  $y=2$ ,  $z=2/3$

**B3** 1.  $z = \sqrt{\ln x + \ln y}$

2.a)  $z = x^y \frac{1}{xy}$ ,  $x=e$ ,  $y=1$

б)  $u = x^3/2 - y^3/2 + 8z^3$ ,  $x=2$ ,  $y=2$ ,  $z=3/2$

**B4** 1.  $z = \sqrt{\sqrt{y} - x} + 2$

2.a)  $z = \sin 1/x e^y$ ,  $x=\pi/2$ ,  $y=1$

б)  $u = 3/2x^2 + 3y^2 - 2z^2$ ,  $x=2$ ,  $y=1/3$ ,  $z=3/2$

**B5** 1.  $z = \arcsin \frac{x^2}{y}$

2.a)  $z = \arccos(x^2 - y^2) + 1/\sqrt{xy}$

б)  $u = \frac{\sqrt{x}}{y} - \frac{yz}{x + \sqrt{y}}$

**B6** 1.  $z = \arccos(2x - y)$

2.a)  $z = \arccos \frac{y}{x} + e^{\sqrt{xy}}$ ,  $x=2$ ,  $y=1$

б)  $u = \sqrt{2}x^2 - \frac{3}{\sqrt{2}} - 6\sqrt{2}z^2$ ,  $x=1$ ,  $y=2/3$ ,  $z=1/\sqrt{6}$

**B16** 1.  $z = \ln \frac{x}{y}$

2.a)  $z = (x^2 + y^2)^{x^2 - y^2}$

б)  $u = x\sqrt{y} - (z+y)\sqrt{x}$ ,  $x=1$ ,  $y=1$ ,  $z=-2$

**17** 1.  $z = \ln y - \ln \cos x$

2.a)  $z = x \sin y + x^2$ ,  $x=3$ ,  $y=\pi/2$

б)  $u = \sqrt{xy} - \sqrt{4 - z^2}$ ,  $x=1$ ,  $y=1$ ,  $z=0$

**B18.** 1.  $z = \ln \sin x - \sqrt{y}$

2.a)  $z = \arcsin \frac{u}{v} - \ln v$ ,  $u=0$ ,  $v=1$

б)  $u = (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}$ ,  $x=0$ ,  $y=-3$ ,  $z=4$

**B19.** 1.  $z = \ln(y^2/4 - x^2/9 - 1)$

2.a)  $z = \ln \sqrt{x^2 + y^2} + 1/y$ ,  $x=y=1/\sqrt{2}$

б)  $u = 2/x + 3/2y - \sqrt{6/4z}$ ,  $x=2/3$ ,  $y=3/2$ ,  $z=1/2$

**B20.** 1.  $z = \arcsin \frac{y}{x}$

2.a)  $z = \ln y \sqrt{x}$ ,  $x=1$ ,  $y=3/5$

б)  $u = 3/x + 4/y - 1/\sqrt{6}x$ ,  $x=1$ ,  $y=2$ ,  $z=1/\sqrt{6}$

**B21.** 1.  $z = 1 + \sqrt{1 - (x - y)^2}$

2.a)  $z = \cos(1/y) - 1/\sqrt{xy}$ ,  $x=\pi/2$ ,  $y=2/\pi$

б)  $u = x\sqrt{y} - yz^2$ ,  $x=2$ ,  $y=1$ ,  $z=-1$

**B7** 1.  $Z = \sqrt{\ln(2 - x - y)}$ ,

2.a)  $z = \operatorname{tg} 1/x \cdot e^{\frac{y}{x}}, x=1/\pi, y=0$

б)  $u =$

$2\sqrt{x+y} + y \cdot \operatorname{arctg} z, x=1, y=1/3, z=1/\sqrt{6}$

**B8** 1.  $z = \ln \frac{x}{y}$

2.a)  $z = (x^2 + y^2)^{x^2 - y^2}$

б)  $u = x\sqrt{y} - (z+y)\sqrt{x}, x=1, y=1, z=-2$

**B9** 1.  $z = \ln y - \ln \cos x$

2.a)  $z = x \sin y + x^2, x=3, y=\pi/2$

б)  $u = \sqrt{xy} - \sqrt{4 - z^2}, x=1, y=1, z=0$

**B10** 1.  $z = \ln \sin x - \sqrt{y}$

2.a)  $z = \arcsin \frac{u}{v} - \ln v, u=0, v=1$

б)  $u = (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}, x=0, y=-3, z=4$

**B11** 1.  $z = \ln(y^2/4 - x^2/9 - 1)$

2.a)  $z = \ln \sqrt{x^2 + y^2} + 1/y, x=y=1/\sqrt{2}$

б)  $u = 2/x + 3/2y - \sqrt{6/4z}, x=2/3, y=3/2, z=1/2$

**B12** 1.  $z = \arcsin \frac{y}{x}$

2.a)  $z = \ln y \sqrt{x}, x=1, y=3/5$

б)  $u = 3/x + 4/y - 1/\sqrt{6}x, x=1, y=2, z=1/\sqrt{6}$

**B22** 1.  $z = \ln(x^2 + y)$

2.a)  $z = e^{x^2} \sqrt{x^2 - y^2}, x=1, y=0$

б)  $u = \sin \frac{y}{xz}, x=2, y=\pi, z=1$

**B23** 1.  $z = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - y^2}$

2.a)  $z = y \ln(x^2 - y^2), x=2, y=1$

б)  $u = x^3/16 + y^2/9 - z^2/8, x=2, y=1/2, z=1/3$

**B24** 1.  $Z = \sqrt{\ln(2 - x - y)}$ ,

2.a)  $z = \operatorname{tg} 1/x \cdot e^{\frac{y}{x}}, x=1/\pi, y=0$

б)  $u = 2\sqrt{x+y} + y \cdot \operatorname{arctg} z, x=1, y=1/3, z=1/\sqrt{6}$

**B25** 1.  $z = \arccos(2x - y)$

2.a)  $z = \arccos \frac{y}{x} + e^{\sqrt{xy}}, x=2, y=1$

б)  $u = \sqrt{2}x^2 - \frac{3}{\sqrt{2}} - 6\sqrt{2}z^2, x=1, y=2/3, z=1/\sqrt{6}$

**B26** 1.  $z = \arcsin \frac{x^2}{y}$

2.a)  $z = \operatorname{arctg}(x^2 - y^2) + 1/\sqrt{xy}$

б)  $u = \frac{\sqrt{x}}{y} - \frac{yz}{x + \sqrt{y}}$

**B27** 1.  $z = \sqrt{\sqrt{y} - x} + 2$

2.a)  $z = \sin 1/x e^y, x=\pi/2, y=1$

б)  $u = 3/2x^2 + 3y^2 - 2z^2, x=2, y=1/3, z=3/2$

$$\text{B13. } 1. z = 1 + \sqrt{1 - (x - y)^2}$$

$$2. a) z = \cos(1/y) - 1/\sqrt{xy}, x = \pi/2, y = 2/\pi$$

$$б) u = x\sqrt{y - yz^2}, x = 2, y = 1, z = -1$$

$$\text{B14. } 1. z = \ln(x^2 + y)$$

$$2. a) z = e^{x^2} \sqrt{x^2 - y^2}, x = 1, y = 0$$

$$б) u = \sin \frac{y}{xz}, x = 2, y = \pi, z = 1$$

$$\text{B15. } 1. z = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - y^2}$$

$$2. z = y \ln(x^2 - y^2), x = 2, y = 1$$

$$u = x^3/16 + y^2/9 - z^2/8, x = 2, y = 1/2, z = 1/3$$

$$\text{B28 } 1. z = \sqrt{\ln x + \ln y}$$

$$2. a) z = x^y \frac{1}{xy}, x = e, y = 1$$

$$б) u = x^3/2 - y^3/2 + 8z^3, x = 2, y = 2, z = 3/2$$

$$\text{B29. } z = \ln(y - \ln x)$$

$$2. a) z = \sqrt{xy} \ln \frac{y}{x}, x = 1, y = 2$$

$$б) u = 3x^2/2 - y^2/2 + 2z^2, x = 2/3, y = 2, z = 2/3$$

$$\text{B30 } 1. z = \arcsin(1 - x^2 - y^2)$$

$$2. a) z = \sqrt{\ln x} \frac{y}{x}, x = e, y = 1$$

$$б) u = x^2 - y^2 + 3z^2, x = 1/2, y = 1/2, z = 1/2$$

### Контрольные вопросы:

1. Сформулировать определение функции с двумя переменными.
2. Что называется областью определения функции нескольких переменных?
3. Сформулировать правило нахождения производной функции нескольких переменных.
4. Что такое полный дифференциал функции нескольких переменных?

### Практическая работа 10 по теме «Экстремум функции двух переменных»

**Цель:** проверить умение исследовать функцию на экстремум.

#### Задание 1. Найти частные производные второго порядка

$$\text{B1 } z = x^2 y^2 - 4x - 5y$$

$$\text{B16 } z = x^3 - y^3 - 3xy$$

$$\text{B2 } z = y^2 - x^2 + xy - 2x - 6y$$

$$\text{B17 } z = 0,5xy + (47 - x - y)(x/3 + y/4)$$

$$\text{B3 } z = xy(1 - x - y)$$

$$\text{B18. } Z = x^2 + y^2 + xy - 3x - 6y$$

$$\text{B4 } z = y\sqrt{x - y^2} - x + 6y$$

$$\text{B19. } z = xy^2(1 - x - y)$$

$$\text{B5} \quad z=e^{x/2}(x+y^2)$$

$$\text{B6} \quad z=x^3-y^3-3xy$$

$$\text{B7} \quad z=0,5xy+(47-x-y)(x/3+y/4)$$

$$\text{B8} \quad z=x^2+y^2+xy-3x-6y$$

$$\text{B9} \quad z=xy^2(1-x-y)$$

$$\text{B10} \quad z=x^3+y^3-15xy$$

$$\text{B11} \quad z=x^2+y^2+xy-4x-5y$$

$$\text{B12} \quad z=y^2-x^2+xy-2x-6y$$

$$\text{B13} \quad z=xy(1-x-y)$$

$$\text{B14} \quad z=y\sqrt{x}-y^2-y+6y$$

$$\text{B15} \quad z=e^{x/2}(x+y^2)$$

$$\text{B20.} \quad z=x^3+y^3-15xy$$

$$\text{B21.} \quad z=3-2x^2-xy-y^2$$

$$\text{B22.} \quad z=y^2-xy-2$$

$$\text{B23.} \quad z=x^2+2xy-y^2+4x$$

$$\text{B24} \quad z=2x^2+2xy-y^2/2-4x$$

$$\text{B25} \quad z=x^2+xy-2$$

$$\text{B26.} \quad z=y^2-2xy-x^2+4y+1$$

$$\text{B27.} \quad z=1-2xy+2x^2$$

$$\text{B28.} \quad z=4x+2y+4x^2+y^2+6$$

$$\text{B29} \quad z=x^2+2xy-10$$

$$\text{B30.} \quad z=x^2+2xy-y^2-4x$$

## Задание 2. Исследовать заданную функцию на экстремум

$$\text{B1.} \quad z=12+2xy-x^2$$

$$\text{B16.} \quad z=x^2+2xy-10$$

$$\text{B2.} \quad z=5x^2-3xy+y^2+4$$

$$\text{B17.} \quad z=4x+2y+4x^2+y^2+6$$

$$\text{B3.} \quad z=4x^2+9y^2-4x-6y+3$$

$$\text{B18.} \quad z=1-2xy+2x^2$$

$$\text{B4.} \quad z=x^2-2xy-y^2+4x+1$$

$$\text{B19.} \quad z=x^2+2xy-y^2+2x+2y$$

$$\text{B5.} \quad z=y^2+2xy-x^2-4y$$

$$\text{B20.} \quad z=y^2-2xy-x^2+4y+1$$

$$\text{B6.} \quad z=x^2+3y^2+x-y$$

$$\text{B21.} \quad z=x^2+xy-2$$

$$\text{B7.} \quad z=x^2y$$

$$\text{B22.} \quad z=2x^2+2xy-y^2/2-4x$$

**B8.**
$$z=4-2x^2-y^2$$

**B23.**
$$z=x^2+2xy-y^2+4x$$

**B9.**
$$z=x^2/2-xy$$

**B24.**
$$z=3-2x^2-xy-y^2$$

**B10.**
$$z=1+xy^2$$

**B25.**
$$z=y^2-xy-2$$

**B11.**
$$z=4-2y^2+x^2$$

**B26.**
$$z=x^2+y^2+xy-4x-5y$$

**B12.**
$$z=y^2+2xy-x^2-4y$$

**B27.**
$$z=y^2-x^2+xy-2x-6y$$

**B13.**
$$z=x^2-xy$$

**B28.**
$$z=x^2+y^2+xy-3x-6y$$

**B14.**
$$z=xy(4-x-y)$$

**B29.**
$$z=x^3-y^3-3xy$$

**B15.**
$$z=x^2+2xy-y^2-4x$$

**B30.**
$$z=x^3+y^3-15xy$$

### Контрольные вопросы

1. Сформулировать алгоритм нахождения экстремума функции нескольких переменных

### Самостоятельная работа №1

Найти полные дифференциалы функций

#### Вариант 1.

а)  $z=x^2+xy-2$

б)  $z=y\sqrt{x}-y^2-x+6y$

#### Вариант 2.

а)  $z=x^3-y^3-3xy$

б)  $z=x^2/2-xy$

#### Вариант 3.

а)  $z=y\sqrt{x}-y^2-y+6y$

б)  $z=x^2+y^2+xy-3x-6y$

#### Вариант 4.

а)  $z=xy(1-x-y)$

б)  $z=x^2+2xy-10$



## **Интегральное исчисление функций одной переменной**

### **Устный опрос**

1. Что называется первообразной функции?
2. Что называется неопределенным интегралом?
3. Свойства неопределенных интегралов?
4. Таблица неопределенных интегралов .
5. Интегрирование подстановкой и по частям.
6. Интегрирование рациональных дробей. В чем суть метода неопределенных коэффициентов?
7. Интегрирование тригонометрических выражений.
8. Интегрирование иррациональных выражений.
9. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла.
10. Что называется определенным интегралом?
11. Свойства определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница.
12. Что такое несобственный интеграл?
13. Какие существуют методы приближенного вычисления определенных интегралов?

## Практическая работа № 11 по теме

### «Вычисление неопределенных интегралов»

**Цель:** проверить умение находить неопределенные интегралы используя методы непосредственного интегрирования, интегрирование подстановкой и по частям.

**Задание 1.** Найти неопределенные интегралы используя метод непосредственного интегрирования

$$B1. \int (5\cos x - 3x^2 + 1/x) dx$$

$$B16. \int (\cos x + 2x^3 + 1/x) dx$$

$$B2. \int \frac{3x^8 - x^5 + x^4}{x^5} dx$$

$$B17. \int \frac{6x^7 - 2x^5 - x^4}{x^6} dx$$

$$B3. \int (6^x 3^{2x} - 4) dx$$

$$B18. \int (2^x 5^{4x} + 8) dx$$

$$B4. \int \left( \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx$$

$$B19. \int \left( \frac{-1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx$$

$$B5. \int \frac{dx}{1+16x^2}$$

$$B20. \int \frac{dx}{1+4x^2}$$

$$B6. \int (6\sin x + 4x^3 - \frac{1}{x}) dx$$

$$B21. \int (-2\sin x + 6x^4 - \frac{1}{x}) dx$$

$$B7. \int \frac{x^9 - 3x^7 + 2x^6}{x^7} dx$$

$$B22. \int \frac{6x^9 + 2x^7 - 7x^3}{x^6} dx$$

$$B8. \int (7^x 2^{2x} + 5) dx$$

$$B23. \int (3^x 6^{7x} - 3) dx$$

$$B9. \int \left( \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx$$

$$B24. \int \left( \frac{-1}{1+x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx$$

$$B10. \int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$$

$$B25. \int \frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}}$$

$$B11. \int (9\cos x + 2x^3 + 1/x) dx$$

$$B26. \int (3\sin x - 6x^2 + 1/x) dx$$

$$B12. \int \frac{5x^7 - x^3 + x^2}{x^3} dx$$

$$B27. \int \frac{3x^9 + 2x^5 - x^3}{x^4} dx$$

$$B13. \int (9^x 2^{3x} - 6) dx$$

$$B28. \int (8^x 3^{4x} + 3) dx$$

$$B14. \int \left( \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx$$

$$B29. \int \left( \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx$$

$$B15. \int \frac{dx}{1+64x^2}$$

$$B30. \int \frac{dx}{9+4x^2}$$

**Задание 2.** Вычислить неопределенные интегралы с помощью замены переменной

$$B1 \text{ a)} \int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx \text{ b)} \int (x^5 + 3)^6 x^4 dx$$

$$B16a) \int \frac{x^2}{2x^3+1} dx \text{ b)} \int x \cos(x^2 + 3) dx$$

$$B2a) \int \frac{x^3}{1-7x^4} dx \text{ b)} \int \cos^4 x \sin x dx$$

$$B8a) \int (2x^7 + 4)^3 x^6 dx \text{ B8}$$

$$\text{b)} \int x^2 \cos(x^3 + 7) dx$$

$$B3a) \int \frac{x^3}{x^4+7} dx \text{ b)} \int (1 - 3x^3)^5 x^2 dx$$

$$B18.a) \int \frac{3x^4}{2x^5-7} dx \text{ b)} \int (1 + x^4)^5 x^3 dx$$

$$B4 \text{ a)} \int \frac{3x^2}{2x^3+3} dx \text{ b)} \int \sin^5 x \cos x dx$$

$$B19a) \int (-4x^3 + 2)^5 x^2 dx$$

$$\text{b)} \int x^4 \cos(x^5 + 1) dx$$

$$B5.a) \int (2x^3 - 5)^6 x^2 dx \text{ B5.}$$

$$B20a) \int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx$$

$$\text{b)} \int x^3 \sin(x^4 - 3) dx$$

$$\text{b)} \int (x^5 + 3)^6 x^4 dx$$

$$B6a) \int \frac{x^2}{4x^3-1} dx \text{ b)} \int x^3 \cos(x^4 + 5) dx$$

$$B21a) \int \frac{x^3}{7x^4-1} dx \text{ b)} \int \sin x \cos^4 x dx$$

$$B7a) \int \frac{x^2}{2x^3+1} dx$$

$$B22a) \int \frac{x^3}{x^4+7} dx$$

$$\text{b)} \int x \cos(x^2 + 3) dx$$

$$\text{b)} \int (1 - 3x^3)^5 x^2 dx$$

$$B8a) \int (2x^7 + 4)^6 x^6 dx \text{ B8}$$

$$B23.a) \int \frac{3x^2}{2x^3+3} dx \text{ b)} \int \sin^5 x \cos x dx$$

$$\text{b)} \int x^2 \cos(x^3 + 7) dx$$

$$B9 \text{ a)} \int \frac{3x^4}{2x^5-3} dx$$

$$B24a) \int \frac{x^2}{4x^3-1} dx$$

$$\text{b)} \int (3 + x^4)^5 x^3 dx$$

$$\text{b)} \int x^3 \cos(x^4 + 5) dx$$

$$B10a) \int (2 - 4x^3)^5 x^2 dx$$

$$B25a) \int (5 - 2x^3)^5 x^2 dx$$

$$\text{b)} \int x^4 \cos(x^5 + 1) dx$$

$$\text{b)} \int x^3 \sin(x^4 - 3) dx$$

$$B11a) \int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx \text{ b)} \int (3 + x^5)^6 x^4 dx$$

$$B26 \text{ a)} \int \frac{x^3}{x^4+7} dx \text{ b)} \int (1 - 3x^3)^6 x^2 dx$$

$$B12.a) \int \frac{x^3}{7x^4+1} dx \text{ b)} \int \sin x \cos x^4 dx$$

$$B27a) \int \frac{3x^2}{2x^3+3} dx \text{ b)} \int \sin^5 x \cos x dx$$

$$B13a) a) \int \frac{x^3}{x^4+7} dx$$

$$B28a) \int \frac{3x^4}{2x^5-3} dx \quad б) \int (3+x^4)^5 x^3 dx$$

$$б) \int (1-3x^3)^6 x^2 dx$$

$$B10a) \int (5-2x^3)^5 x^2 dx \quad б) \int x^3 \sin(x^4 - 3) dx$$

$$B29 a) \int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx \quad б) \int (3+x^5)^6 x^4 dx$$

$$B15a) \int \frac{x^2}{4x^3-1} dx \quad б) \int x^3 \cos(x^4 + 5) dx$$

$$B30a) \int \frac{x^3}{7x^4+1} dx \quad б) \int \sin x \cos x^4 dx$$

### Контрольные вопросы:

1. Таблица интегралов .
2. В чем суть метода добавочного коэффициента?
3. Метод подстановки.
4. Метод интегрирования по частям.

### Практическая работа №12 по теме

#### «Интегрирование рациональных дробей»

**Цель:** проверить умение интегрировать рациональные дроби

**Задание .** Найти интегралы

$$a) \int \frac{x-6}{(x+1)(x+2)(x+3)} dx$$

$$a) \int \frac{2x-5}{(x+1)(x+2)x} dx$$

$$B 1 \quad б) \int \frac{x^3-6x^2+13x-6}{(x+2)(x-2)^3} dx$$

$$B 16 \quad б) \int \frac{x^3+6x^2+13x+8}{x(x+2)^3} dx$$

$$в) \int \frac{x^3 + 4x^2 + 4x + 2}{(1+x)^2(x^2+x+1)} dx$$

$$в) \int \frac{x^3 + 4x^2 + 3x + 2}{(1+x)^2(x^2+1)} dx$$

$$a) \int \frac{3x-4}{(x^2-1)} dx$$

$$a) \int \frac{4x-3}{x(x-2)(x-3)} dx$$

$$B 2 \quad б) \int \frac{x^3+6x^2+13x+9}{(x+1)(x+2)^3} dx$$

$$B 17 \quad б) \int \frac{x^3+6x^2+14x+10}{(x+1)(x+2)^3} dx$$

$$в) \int \frac{2x^3 + 7x^2 + 7x - 1}{(2+x)^2(x^2+2x+2)} dx$$

$$в) \int \frac{2x^3 + 4x^2 + 2x - 1}{(1+x)^2(x^2+2x+2)} dx$$

$$a) \int \frac{5x-2}{(x-1)(x-2)(x-3)} dx$$

B 3

$$б) \int \frac{x^3-6x^2+11x-10}{(x+2)(x-2)^3} dx$$

$$в) \int \frac{x^3 + 6x^2 + 9x + 6}{(x+1)^2(x^2+x+1)} dx$$

$$a) \int \frac{7x}{(x-3)(x-42)(x-5)} dx$$

B 4

$$б) \int \frac{2x^3+6x^2+7x+6}{x(x+1)^3} dx$$

$$в) \int \frac{3x^3 + 6x^2 + 5x - 1}{(1+x)^2(x^2+2)} dx$$

$$a) \int \frac{9x+2}{(x-5)(x-6)(x-7)} dx$$

B 5

$$б) \int \frac{x^3-6x^2+13x-7}{(x+1)(x-2)^3} dx$$

$$в) \int \frac{x^3 + 6x^2 + 8x + 8}{(2+x)^2(x^2+4)} dx$$

$$a) \int \frac{-4x-5}{(x+2)(x+3)(x+4)} dx$$

B 6

$$б) \int \frac{x^3-6x^2+10x-10}{(x+1)(x-2)^3} dx$$

$$в) \int \frac{2x^3 - 4x^2 - 6x - 12}{(-1+x)^2(x^2+4x+5)} dx$$

$$a) \int \frac{-6x-7}{(x+4)(x+5)(x+6)} dx$$

B 7

$$б) \int \frac{3x^3+9x^2+10x+2}{(x-1)(x+1)^3} dx$$

$$в) \int \frac{x^3 + 2x^2 + 10x}{(1+x)^2(x^2-x+1)} dx$$

$$a) \int \frac{6x-1}{(x-2)(x-3)(x-4)} dx$$

B 18

$$б) \int \frac{x^3+6x^2+11x+7}{(x+1)(x+2)^3} dx$$

$$в) \int \frac{2x^3 + 11x^2 + 16x + 10}{(2+x)^2(x^2+2x+3)} dx$$

$$a) \int \frac{10x+3}{(x-6)(x-7)(x-8)} dx$$

B 19

$$б) \int \frac{x^3+6x^2+10x+10}{(x-1)(x+2)^3} dx$$

$$в) \int \frac{x^3 + 9x^2 + 21x + 21}{(3+x)^2(x^2+3)} dx$$

$$a) \int \frac{-5x-6}{(x+3)(x+4)(x+5)} dx$$

B 20

$$б) \int \frac{x^3-6x^2+13x-8}{x(x-2)^3} dx$$

$$в) \int \frac{x^3 + 5x^2 + 12x + 4}{(2+x)^2(x^2+4)} dx$$

$$a) \int \frac{-7x-8}{(x+5)(x+6)(x+7)} dx$$

B 21

$$б) \int \frac{x^3-6x^2+14x-8}{(x+1)(x-2)^3} dx$$

$$в) \int \frac{-3x^3 + 13x^2 - 13x + 11}{(-2+x)^2(x^2-x+1)} dx$$

$$a) \int \frac{-9x-10}{(x+7)(x+8)(x+9)} dx$$

B 22

$$б) \int \frac{x^3+x+2}{(x+2)x^3} dx$$

$$в) \int \frac{3x^3 + 46 + x}{(-1+x)^2(x^2+9)} dx$$

$$a) \int \frac{-8x-9}{(x+6)(x+7)(x+8)} dx$$

$$a) \int \frac{-11x-12}{(x+9)(x+10)(x+11)} dx$$

$$B 8 \quad б) \int \frac{2x^3+6x^2+7x+4}{(x+2)(x+1)^3} dx$$

$$B 23 \quad б) \int \frac{2x^3+x+1}{(x+1)x^3} dx$$

$$в) \int \frac{4x^3 + 24x^2 + 20x - 28}{(3+x)^2(x^2+x+1)} dx$$

$$в) \int \frac{2x^3 + 3x^2 + 3x + 2}{(1+x^2)(x^2+x+1)} dx$$

$$a) \int \frac{-10x-11}{(x+8)(x+9)(x+10)} dx$$

$$a) \int \frac{-13x-14}{(x+9)(x+10)(x+11)} dx$$

$$B 9 \quad б) \int \frac{2x^3+6x^2+7x}{(x-2)(x+12)^3} dx$$

$$B 24 \quad б) \int \frac{2x^3+6x^2+5x}{(x+2)(x+1)^3} dx$$

$$в) \int \frac{x^3+x+1}{(x^2+x+1)(x^2+1)} dx$$

$$в) \int \frac{x^3+4x^2+4x+2}{(1+x)^2(x^2+x+1)} dx$$

$$a) \int \frac{-12x-13}{(x+10)(x+11)(x+12)} dx$$

$$a) \int \frac{-15x-16}{(x+7)(x+8)(x+9)} dx$$

$$B 10 \quad б) \int \frac{x^3+6x^2+4x+24}{(x-2)(x+2)^3} dx$$

$$B 25 \quad б) \int \frac{2x^3+6x^2+5x+4}{(x-2)(x+1)^3} dx$$

$$в) \int \frac{2x^3 + 4x^2 + 2x + 2}{(x+1+x^2)(x^2+x+2)} dx$$

$$в) \int \frac{x^3+x+3}{(1+x^2)(x^2+x+1)} dx$$

$$a) \int \frac{-14x-15}{(x+8)(x+9)(x+10)} dx$$

$$a) \int \frac{-11x-3}{x(x+1)(x-2)} dx$$

$$B 11 \quad б) \int \frac{x^3+6x^2+18x-4}{(x-2)(x+2)^3} dx$$

$$B 26 \quad б) \int \frac{x^3+6x^2+14x+4}{(x-2)(x+2)^3} dx$$

$$в) \int \frac{4x^3+4+3x}{(1+x^2)(x^2+x+1)} dx$$

$$в) \int \frac{3x^3+4x^2+6x}{(2+x^2)(x^2+x+1)} dx$$

$$a) \int \frac{-13x-5}{(x+3)(x-2)(x+1)} dx$$

$$a) \int \frac{-7x+1}{(x-6)(x+7)(x-8)} dx$$

$$B 12 \quad б) \int \frac{x^3-6x^2+14x-4}{(x+2)(x-2)^3} dx$$

$$B 27 \quad б) \int \frac{x^3+6x^2+10x+12}{(x-2)(x+2)^3} dx$$

$$в) \int \frac{2x^3 + 1 - x}{(x^2 + 1)(x^2 - x + 1)} dx$$

$$а) \int \frac{-9x-1}{(x-3)(x+4)(x-5)} dx$$

$$В 13 \quad б) \int \frac{2x^3 - 6x^2 + 7x - 4}{(x-2)(x-1)^3} dx$$

$$в) \int \frac{x^3 + x + 1}{(1 + x^2)(x^2 + x + 1)} dx$$

$$а) \int \frac{-5x+3}{(x-9)(x-2)(x-11)} dx$$

$$В 14 \quad б) \int \frac{x^3 + 6x^2 - 10x + 52}{(x-2)(x+2)^3} dx$$

$$в) \int \frac{x^3 + 2x^2 + x + 1}{(1 + x^2)(x^2 + x + 1)} dx$$

$$а) \int \frac{-x+7}{(x+1)(x+2)(x+3)} dx$$

$$В 15 \quad б) \int \frac{x^3 + 6x^2 + 4x + 24}{(x+2)(x-2)^3} dx$$

$$в) \int \frac{2x^3 + 2x^2 + 2x + 1}{(x^2 + x + 1)(x^2 + 1)} dx$$

$$в) \int \frac{x^3 + x^2 + 1}{(1 + x^2)(x^2 - x + 1)} dx$$

$$а) \int \frac{-3x+5}{(x-1)(x-2)(x-3)} dx$$

$$В 28 \quad б) \int \frac{x^3 + 6x^2 + 15x + 2}{(x-2)(x+2)^3} dx$$

$$в) \int \frac{2x^3 + 2x + 1}{(x^2 + 1)(x^2 - x + 1)} dx$$

$$а) \int \frac{x+9}{(x-1)(x+2)(x-1)} dx$$

$$В 29 \quad б) \int \frac{2x^3 - 6x^2 + 7x}{(x+2)(x-1)^3} dx$$

$$в) \int \frac{4 + x}{(2 + x^2)(x^2 + x + 2)} dx$$

$$а) \int \frac{8x+1}{(x-4)(x-5)(x-6)} dx$$

$$В 30 \quad б) \int \frac{x^3 - 6x^2 + 13x - 6}{(x+2)(x-2)^3} dx$$

$$в) \int \frac{3x^3 + 7x^2 + 12x + 6}{(x^2 + x + 3)(x^2 + 2x + 3)} dx$$

Контрольные вопросы:

1. В чем суть метода неопределенных коэффициентов?

### Практическая работа № 13 по теме

#### «Интегрирование тригонометрических функций и иррациональных выражений»

**Цель:** проверить умение находить неопределенные интегралы тригонометрических функций и иррациональных выражений.

**Задание 1.** Найти интегралы

$$\int \frac{dx}{x + \sqrt[3]{x^2}}$$

$$В 1 \quad \int \cos x \cos 3x dx$$

В 16

$$\int x^3 \sqrt{2 - x^2} dx$$

$$\int \cos 8x \sin 5x dx$$

$$\mathbf{B\ 2} \int \frac{x + \sqrt[3]{x^2 + \sqrt[6]{x}} dx}{x(1 - \sqrt[3]{x})}$$

$$\int \sin x \sin 5x dx$$

$$\mathbf{B\ 3} \int \frac{\sqrt{x} dx}{1 + \sqrt[4]{x^3}}$$

$$\int \sin^7 x dx$$

$$\mathbf{B\ 4} \int \frac{\sqrt{x} dx}{x - \sqrt[3]{x^2}}$$

$$\int \frac{dx}{1 - \sin x}$$

$$\int \frac{\sqrt{x} dx}{1 + \sqrt{x}} \mathbf{B\ 5} \int \sin^4 2x dx$$

$$\int \frac{\sqrt{x} dx}{1 - \sqrt[3]{x}}$$

$$\mathbf{B\ 6} \int \cos^6 2x dx$$

$$\int \frac{\sqrt{x+2} dx}{x}$$

$$\mathbf{B\ 7} \int \frac{dx}{3 + 5 \cos x}$$

$$\mathbf{B\ 8} \int \frac{x dx}{\sqrt{x+1}}$$

$$\int \frac{dx}{5 - 3 \cos x}$$

$$\mathbf{B\ 9} \int \frac{x dx}{\sqrt{2x+3}}$$

$$\int \sin^4 3x dx$$

$$\mathbf{B\ 17} \int \frac{1}{(2-x)^2} \sqrt{\frac{2-x}{2+x}} dx$$

$$\int \sin 2x \sin 6x dx$$

$$\mathbf{B\ 18} \int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^3(x-2)}}$$

$$\int \frac{\sin^5 x dx}{\cos x}$$

$$\mathbf{B\ 19} \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^3(x+1)}}$$

$$\int \sin^2 x \cos^3 x dx$$

$$\mathbf{B\ 20} \int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{(1-x^2)}}$$

$$\int \frac{dx}{\cos^4 x}$$

$$\mathbf{B\ 21} \int \frac{dx}{x(1 + \sqrt[3]{x})}$$

$$\int \sin 2x \sin 6x dx$$

$$\mathbf{B\ 22} \int \frac{dx}{x^{11} \sqrt{(1+x^4)}}$$

$$\int \frac{\sin 3x dx}{2 + \cos 3x}$$

$$\mathbf{B\ 23} \int \frac{dx}{(1 - \sqrt{x})^2 \sqrt{x}}$$

$$\int (\cos x + 5)^4 \sin x dx$$

$$\mathbf{B\ 24} \int x^5 \sqrt{(1 + x^3)^2} dx$$

$$\int \frac{\operatorname{ctg} x dx}{\sin^2 x}$$



$$\mathbf{B\ 10} \quad \int \frac{(\sqrt{x+1}+1)dx}{\sqrt{1+x+1}}$$

$$\int \frac{\cos x \, dx}{1 + \cos x}$$

$$\mathbf{B\ 11} \quad \int \frac{(x-1)dx}{\sqrt{2x-1}}$$

$$\int \cos^3 x \, dx$$

$$\mathbf{B\ 12} \quad \int x^3 \sqrt{1+x^2} \, dx$$

$$\int \cos 5x \cos 3x \, dx$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-2x}} dx \quad \mathbf{B\ 13} \quad \int \sin^2 x \cos^3 x \, dx$$

$$\mathbf{B\ 14} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^3(x-2)}}$$

$$\int \cos^4 x \, dx$$

$$\mathbf{B\ 15} \quad \int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}$$

$$\int \sin^4 x \, dx$$

$$\mathbf{B\ 25} \quad \int \frac{dx}{x^3 \sqrt[3]{2-x^3}}$$

$$\int \frac{\cos x \, dx}{\sqrt[5]{\sin x}}$$

$$\mathbf{B\ 26} \quad \int \sqrt{x} (1 + \sqrt{x})^3 \, dx$$

$$\int \frac{\sin 3x \, dx}{2 + \cos 3x}$$

$$\mathbf{B\ 27} \quad \int \sqrt[3]{x^4 - 4x^2} \, dx$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x (2 \operatorname{tg} x + 1)}$$

$$\mathbf{B\ 28} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}$$

$$\int \cos 6x \cos 4x \, dx$$

$$\mathbf{B\ 29.} \quad \int \frac{(\sqrt{x+1}+1)dx}{\sqrt{1+x+1}}$$

$$\int \frac{\sqrt{2 \operatorname{tg} x + 1} \, dx}{\cos^2 x}$$

$$\mathbf{B30.} \quad \int \frac{(x-1)dx}{\sqrt{2x-1}}$$

$$\int \frac{\cos x \, dx}{\sqrt{2 \sin x + 3}}$$

### Контрольные вопросы:

1. Сформулировать правила нахождения интегралов иррациональных выражений.
2. Сформулировать правила нахождения интегралов тригонометрических.

### Практическая работа № 14 по теме

#### «Вычисление определенных интегралов»

Цель: проверить умение вычисления определенных интегралов .

## Задание 1. Найти интегралы

$$\text{В 1} \quad \int_0^2 \frac{x^3 dx}{x^2 + 4}$$

$$\text{В 2} \quad \int_0^2 \ln(x^2 + 4) dx$$

$$\text{В 3} \quad \int_1^2 \frac{\ln^2 x dx}{x^2}$$

$$\text{В 4} \quad \int_0^1 x^3 \arctg x dx$$

$$\text{В 5} \quad \int_0^{1/2} 2 \arcsin 2x dx$$

$$\text{В 6} \quad \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2-2x}}$$

$$\text{В 7} \quad \int_0^{2\pi} \cos^3 x / 4 dx$$

$$\text{В 8} \quad \int_0^e 2 \sin(\ln x) dx$$

$$\text{В 9} \quad \int_0^2 2 \arctg x / 2 dx$$

$$\text{В 10} \quad \int_0^3 \frac{15x dx}{\sqrt[4]{(5x+1)^3} + \sqrt[4]{5x+1}}$$

$$\text{В 11} \quad \int_0^{\pi/2} \cos^2 x dx$$

$$\text{В 12}$$

$$\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^2 x dx$$

$$\text{В 16} \quad \int_0^2 x e^{-x} dx$$

$$\text{В 17} \quad \int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx$$

$$\text{В 18} \quad \int_0^{e-1} \ln(x+1) dx$$

$$\text{В 19} \quad \int_{-1}^2 \ln(x+2) 3x^2 dx$$

$$\text{В 20} \quad \int_0^{\pi/4} \sin^3 3x dx$$

$$\text{В 21} \quad \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2-2x}}$$

$$\text{В 22} \quad \int_0^{2\pi} \cos^3 x / 4 dx$$

$$\text{В 23} \quad \int_0^e 2 \sin(\ln x) dx$$

$$\text{В 24} \quad \int_0^2 2 \arctg x / 2 dx$$

$$\text{В 25} \quad \int_0^3 \frac{15x dx}{\sqrt[4]{(5x+1)^3} + \sqrt[4]{5x+1}}$$

$$\text{В 26} \quad \int_0^{\pi/2} \cos^2 x$$

$$\text{В 27}$$

$$\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^2 x dx$$

В 13

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 x \sin^2 x dx$$

В 14  $\int_1^4 \frac{x dx}{\sqrt{4x+2}}$

В 15  $\int_1^5 \frac{\sqrt{x-1} dx}{x}$

В 28  $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x \sin^2 x dx$

В 29  $\int_1^4 \frac{x dx}{\sqrt{4x+2}}$

В 30  $\int_1^5 \frac{\sqrt{x-1} dx}{x}$

**Задача 2.** Вычислить определенные интегралы.

2.1.  $\int_{-2}^0 (x^2 + 5x + 6) \cos 2x dx.$

2.2.  $\int_{-2}^0 (x^2 - 4) \cos 3x dx.$

2.3.  $\int_{-1}^0 (x^2 + 4x + 3) \cos x dx.$

2.4.  $\int_{-2}^0 (x + 2)^2 \cos 3x dx.$

2.5.  $\int_{-4}^0 (x^2 + 7x + 12) \cos x dx.$

2.6.  $\int_0^{\pi} (2x^2 + 4x + 7) \cos 2x dx.$

2.7.  $\int_0^{\pi} (9x^2 + 9x + 11) \cos 3x dx.$

2.8.  $\int_0^{\pi} (8x^2 + 16x + 17) \cos 4x dx.$

2.9.  $\int_0^{2\pi} (3x^2 + 5) \cos 2x dx.$

2.10.  $\int_0^{2\pi} (2x^2 - 15) \cos 3x dx.$

2.11.  $\int_0^{2\pi} (3 - 7x^2) \cos 2x dx.$

2.12.  $\int_0^{2\pi} (1 - 8x^2) \cos 4x dx.$

2.13.  $\int_{-1}^0 (x^2 + 2x + 1) \sin 3x dx.$

2.14.  $\int_0^3 (x^2 - 3x) \sin 2x dx.$

$$2.15. \int_0^{\pi} (x^2 - 3x + 2) \sin x dx.$$

$$2.16. \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2 - 5x + 6) \sin 3x dx.$$

$$2.17. \int_{-3}^0 (x^2 + 6x + 9) \sin 2x dx.$$

$$2.18. \int_0^{\frac{\pi}{4}} (x^2 + 17,5) \sin 2x dx.$$

$$2.19. \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - 5x^2) \sin x dx.$$

$$2.20. \int_{\frac{\pi}{4}}^3 (3x - x^2) \sin 2x dx.$$

$$2.21. \int_1^2 x \ln^2 x dx.$$

$$2.22. \int_1^{e^2} \frac{\ln^2 x dx}{\sqrt{x}}.$$

$$2.23. \int_1^8 \frac{\ln^2 x dx}{\sqrt[3]{x^2}}.$$

$$2.24. \int_0^1 (x+1) \ln^2 (x+1) dx.$$

$$2.25. \int_2^3 (x-1)^3 \ln^2 (x-1) dx.$$

$$2.26. \int_{-1}^0 (x+2)^3 \ln^2 (x+2) dx.$$

$$2.27. \int_0^2 (x+1)^2 \ln^2 (x+1) dx.$$

$$2.28. \int_1^e \sqrt{x} \ln^2 x dx.$$

$$2.29. \int_{-1}^1 x^2 e^{\frac{x}{2}} dx.$$

$$2.30. \int_0^1 x^2 e^{3x} dx.$$

**Контрольные вопросы:** 1. Что такое определенный интеграл? 2. Сформулировать основные правила вычисления определенных интегралов.

**Самостоятельная работа**

1 вариант

2 вариант

3 вариант

$$\int_0^1 (4x^3 + 3x^2 + 6x)dx \int_0^2 (6x^2 - 4x^3 + 7x - 9)dx \int_0^3 (5x^4 + 5x^3 - 7x - 3)dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{12}} \frac{dx}{\cos^2 3x} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos^2 x} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{4dx}{\sin^2 x}$$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x dx$$

$$\int_{-1}^0 (x^3 + 2x)dx \int_{-1}^0 (2x - x^3)dx \int_{-1}^0 (3x - x^2)dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 4x dx \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 4x dx \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx$$

$$\int_5^{5\sqrt{3}} \frac{4dx}{25 + x^2} \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{16 + x^2} \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1 + x^2}$$

$$\int_1^2 (3 - 2x)^3 dx \int_3^4 (3 - x)^4 dx \int_0^2 (4 - 3x)^3 dx$$

$$\int_0^1 e^{2x} dx \int_0^1 (x^3 - 2)^5 \cdot 3x^2 dx \int_0^1 (2x^3 + 1)^4 \cdot x^2 dx$$

$$\int_0^1 \arcsin x dx \int_0^1 \arccos x dx \int_0^1 x \arctg x dx$$

$$\int_0^1 x e^{2x} dx \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x dx}{\sin^2 x} \int_0^1 x e^{-x} dx$$

## Практическая работа № 15 по теме

### «Вычисление площадей »

**Цель:** проверить умение вычислять площади с помощью определенных интегралов

**Задание.** Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями

$$B1. y^2 - 2y + x^2 = 0, y^2 - 4y + x^2 = 0$$

$$y = \frac{x}{\sqrt{3}}, y = \sqrt{3}x$$

$$B2. y^2 - 6y + x^2 = 0, y^2 - 8y + x^2 = 0$$

$$y = \frac{x}{\sqrt{3}}, y = \sqrt{3}x$$

$$B3. y^2 - 8y + x^2 = 0, y^2 - 10y + x^2 = 0$$

$$y = \frac{x}{\sqrt{3}}, y = \sqrt{3}x$$

$$B4. y^2 - 4y + x^2 = 0, y^2 - 6y + x^2 = 0$$

$$y = x, x = 0$$

$$B5. y^2 - 6y + x^2 = 0, y^2 - 10y + x^2 = 0$$

$$y = x, x = 0$$

$$B6. y^2 - 8y + x^2 = 0, y^2 - 10y + x^2 = 0$$

$$x = 0, y = \sqrt{3}x$$

$$B7. y^2 - 4y + x^2 = 0, y^2 - 6y + x^2 = 0$$

$$x = 0, y = \sqrt{3}x$$

$$B8. y^2 - 2y + x^2 = 0, y^2 - 6y + x^2 = 0$$

$$y = \frac{x}{\sqrt{3}}, y = 0$$

$$B16. y^2 - 4y + x^2 = 0, y^2 - 8y + x^2 = 0$$

$$y = \frac{x}{\sqrt{3}}, y = 0$$

$$B17. y^2 - 2y + x^2 = 0, y^2 - 4y + x^2 = 0$$

$$y = x, x = 0$$

$$B18. y^2 - 4y + x^2 = 0, y^2 - 8y + x^2 = 0, y = x, x = 0$$

$$B19. y^2 - 2y + x^2 = 0, y^2 - 10y + x^2 = 0$$

$$y = 0, y = \sqrt{3}x$$

$$B20. y^2 - 2y + x^2 = 0, y^2 - 4y + x^2 = 0$$

$$y = \frac{x}{\sqrt{3}}, y = \sqrt{3}x$$

$$B21. y^2 - 2y + x^2 = 0, y^2 - 6y + x^2 = 0$$

$$y = \frac{x}{\sqrt{3}}, y = \sqrt{3}x$$

$$B22. y^2 - 2y + x^2 = 0, y^2 - 8y + x^2 = 0$$

$$y = \frac{x}{\sqrt{3}}, y = \sqrt{3}x$$

$$B23. y^2 - 2y + x^2 = 0, y^2 - 6y + x^2 = 0$$

$$y = \frac{x}{\sqrt{3}}, y = 0$$

B 9.  $y^2 - 2y + x^2 = 0, y^2 - 10y + x^2 = 0$

$y = \frac{x}{\sqrt{3}}, y = \sqrt{3}x$

B 10.  $y^2 - 4y + x^2 = 0, y^2 - 10y + x^2 = 0$

$y = \frac{x}{\sqrt{3}}, y = \sqrt{3}x$

B 11.  $y^2 - 4y + x^2 = 0, y^2 - 2y + x^2 = 0$

$y = x, x = 0$

B 12.  $y^2 - 6y + x^2 = 0, y^2 - 8y + x^2 = 0$

$y = x, x = 0$

B 13.  $y^2 - 4y + x^2 = 0, y^2 - 8y + x^2 = 0$

$y = x, x = 0$

B 14.  $y^2 - 4y + x^2 = 0, y^2 - 8y + x^2 = 0$

$x = 0, y = \sqrt{3}x$

B 15.  $y^2 - 2y + x^2 = 0, y^2 - 6y + x^2 = 0$

$y = \frac{x}{\sqrt{3}}, x = 0$

B 24.  $y^2 - 2y + x^2 = 0, y^2 - 6y + x^2 = 0$

$y = \frac{x}{\sqrt{3}}, y = 0$

B 25.  $y^2 - 6y + x^2 = 0, y^2 - 2y + x^2 = 0$

$y = x, x = 0$

B 26.  $y^2 - 4y + x^2 = 0, y^2 - 2y + x^2 = 0$

$x = 0, y = \sqrt{3}x$

B 27.  $y^2 - 4y + x^2 = 0, y^2 - 8y + x^2 = 0$

$x = 0, y = \sqrt{3}x$

B 28.  $y^2 - 4y + x^2 = 0, y^2 - 8y + x^2 = 0$

$y = \frac{x}{\sqrt{3}}, y = \sqrt{3}x$

B 29.  $y^2 - 4y + x^2 = 0, y^2 - 6y + x^2 = 0$

$y = \frac{x}{\sqrt{3}}, y = \sqrt{3}x$

B 30.  $y^2 - 6y + x^2 = 0, y^2 - 10y + x^2 = 0$

$y = \frac{x}{\sqrt{3}}, y = \sqrt{3}x$

## Контрольные вопросы

1.Различные виды плоских фигур и способы вычисления их площадей.

### Практическая работа № 16 по теме

#### «Приближенное вычисление определенных интегралов»

Цель: проверить умение вычислять определенные интегралы по формулам прямоугольников, трапеций, парабол.

Задание. Вычислить приближенное значение интеграла методом прямоугольников, трапеций, методом Симпсона, взяв  $n=10$ , точность вычислений  $10^{-5}$ .

В 1.  $\int_0^4 \sqrt{16 - x^2} dx$

В 16.  $\int_2^3 \frac{0,2x^2}{\ln x} dx$

В 2.  $\int_{-3}^3 x^2 \sqrt{9 - x^2} dx$

В 17.  $\int_0^2 \sqrt{4 - x^2} dx$

В 3.  $\int_0^4 \sqrt{x^3 + 9} dx$

В 18.  $\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - 0,11 \sin^2 x} dx$

В 11.  $\int_2^3 \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} dx$

В 19.  $\int_1^2 \frac{1+x+x^2}{\sqrt{1+x^3}} dx$

В 5.  $\int_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \frac{\sqrt{x^2-2}}{x^4} dx$

В 20.  $\int_0^{\pi} \frac{1}{3+2\cos x} dx$

В 6.  $\int_0^8 \sqrt{8x - x^2} dx$

В 21.  $\int_1^5 \sqrt{x^3 - 8} dx$

В 7.  $\int_0^4 x^2 \sin x dx$

В 22.  $\int_0^4 \frac{2}{\sqrt{4-5x}} dx$



$$\text{В 8.} \quad \int_0^1 \sqrt{4 + x^2} dx$$

$$\text{В 23.} \quad \int_0^3 \sqrt{x - x^3} dx$$

$$\text{В 9.} \quad \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4-3x}} dx$$

$$\text{В 24.} \quad \int_0^2 \sqrt{3 - 2x^2} dx$$

$$\text{В 10.} \quad \int_0^2 \sqrt{x + x^2} dx$$

$$\text{В 25.} \quad \int_0^1 \sqrt{4 + 2x^4} dx$$

$$\text{В 11.} \quad \int_2^3 \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

$$\text{В 26.} \quad \int_0^1 \frac{\ln(2+x)}{1-x^3} dx$$

$$\text{В 12.} \quad \int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx$$

$$\text{В 27.} \quad \int_0^{\pi/4} \sin^3 x dx$$

$$\text{В 13.} \quad \int_0^1 \sqrt{1 + x^4} dx$$

$$\text{В 28.} \quad \int_0^4 x^3 \cos x dx$$

$$\text{В 14.} \quad \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$$

$$\text{В 29.} \quad \int_2^3 \frac{x^3}{\sqrt{3+x^2}} dx$$

$$\text{В 15.} \quad \int_0^{\pi/3} \cos^3 x dx$$

$$\text{В 30.} \quad \int_0^1 \sqrt{2 + 4x^4} dx$$

### Контрольные вопросы:

1. В чем суть метода прямоугольников?
2. В чем суть метода трапеций?
3. . В чем суть метода парабол?

### Самостоятельная работа № 1.

#### Вариант 1.

1.Вычислить неопределенные интегралы

a)  $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx$ ;    б)  $\int (x^5 + 3)^6 x^4 dx$ ,    в)  $\int (4-3x)e^{-3x} dx$

2.Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями. Сделать чертеж.

$y=6/x$  и  $y=-x+7$ .

3.Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость

$\int_e^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^3}$ .

### Вариант 2.

1.Вычислить неопределенные интегралы

a)  $\int \frac{x^3}{1-7x^4} dx$ ;    б)  $\int \cos^4 x \sin x dx$ ,    в)  $\int (1-6x)e^{2x} dx$

2.Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями. Сделать чертеж.

$y=\frac{1}{2}x^2$  и  $y=\frac{1}{2}x+1$ .

3.Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость

$\int_0^{\infty} \frac{x dx}{(x+2)^3}$ .

### Вариант 3.

1.Вычислить неопределенные интегралы

a)  $\int \frac{x^3}{x^4+7} dx$ ;    б)  $\int (1-3x^3)^5 x^2 dx$ ,    в)  $\int (2-9x)e^{-3x} dx$

2.Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями. Сделать чертеж.

$y=4/x$  и  $y=x+5$ .

3.Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость

$\int_0^{\infty} x e^{x^2} dx$ .

### Вариант 4.

1.Вычислить неопределенные интегралы

a)  $\int \frac{3x^2}{2x^3+3} dx$ ;    б)  $\int \sin^5 x \cos x dx$ ,    в)  $\int (5x-2)e^{3x} dx$

2.Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями. Сделать чертеж.

$$y = \frac{1}{2}x^2 \text{ и } y = 4 - x$$

3. Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость

$$\int_0^{\infty} x^2 a^{x^2} dx.$$

## Интегральное исчисление функций нескольких переменных

### Устный опрос

1. Задачи, приводящие к понятию двойного интеграла.
2. Что называется двойным интегралом?
3. Свойства двойного интеграла.
4. Вычисление двойных интегралов в декартовых координатах.
5. Вычисление двойных интегралов в полярных координатах.

### Практическая работа № 17 по теме

#### «Вычисление двойных интегралов в декартовых координатах»

**Цель:** проверить умение вычислять двойные интегралы в декартовых координатах

**Задание 1.** Вычислить интеграл по области D, ограниченной указанными линиями.

$$\text{В 1} \iint y^2 \cos xy \, dx \, dy$$

D

$$D: x = 0, y = \sqrt{\pi/2}; y = x/2$$

$$\text{В 16} \iint y^2 \cos \frac{xy}{2} \, dx \, dy$$

D

$$D: x = 0, y = \sqrt{\pi/2}; y = x/2$$

$$\text{В 2} \iint 3y^2 \sin \frac{xy}{2} \, dx \, dy$$

D

$$D: x = 0, y = \sqrt{4\pi/3}; y = 2x/3$$

$$\text{В 17} \iint (18x^2 y^2 + 32x^3 y^3) \, dx \, dy$$

D

$$D: x = 1, y = -\sqrt[3]{x}; y = x^3$$

**B 3**  $\iint (3x^2y^2 + 4xy) \, dx \, dy:$

D

$D: x = 1, y = -\sqrt{x}; y=x^2$

**B18**  $\iint (9x^2y^2 + 2xy) \, dx \, dy$

D

$D: x = 1; y = \sqrt{x}; y=-x^3$

**B 4**  $\iint (27x^2y^2 + 12xy) \, dx \, dy$

D

$D: x = 1, y = -\sqrt[3]{x}; y=x^2$

**B 19**  $\iint (18x^2y^2 + 8xy) \, dx \, dy$

D

$D: x = 1, y = \sqrt[3]{x}; y=-x^2$

**B 5**  $\iint y^2 \sin \frac{xy}{2} \, dx \, dy$

D

$D: x = 0, y = \sqrt{\pi}; y=x$

**B 20**  $\iint y^2 e^{-\frac{xy}{4}} \, dx \, dy$

D

$D: x = 0, y = 4; y=2x$

**B 6**  $\iint 4y^2 \sin 2xy \, dx \, dy$

D

$D: x = 0, y = \sqrt{2\pi}; y=2x$

**B 21**  $\iint (27x^2y^2 + 12xy) \, dx \, dy$

D

$D: x = 1, y = -\sqrt{x}; y=x^3$

**B 7**  $\iint 4y^2 \sin xy \, dx \, dy$

D

$D: x = 0, y = \sqrt{\pi/2}; y=x$

**B 22**  $\iint (9x^2y^2 + 8xy) \, dx \, dy$

D

$D: x = 1, y = \sqrt[3]{x}; y=-x^3$

**B8**  $\iint (49x^2y^2 + 28xy) dx dy$

D

$D: x = 1, y = -\sqrt[3]{x}; \quad y=x^2$

**B 23**  $\iint y^2 \cos xy dx dy$

D

$D: x = 0, y = \sqrt{\pi}; \quad y=x$

**B9**

$\iint (9x^2y^2 + 48x^3y^3) dx dy$

D

$D: x = 1, y = \sqrt{x}; \quad y=-x^2$

**B 24**  $\iint (18x^2y^2 + 32x^3y^3) dx dy$

D

$D: x = 1, y = \sqrt[3]{x}; \quad y=-x^2$

**B10**  $\iint y^2 e^{-\frac{xy}{4}} dx dy$

D

$D: x = 0, y = 2; \quad y=x$

**B 25**  $\iint (18x^2y^2 + 32x^3y^3) dx dy$

D

$D: x = 1, y = -\sqrt{x}; \quad y=x^3$

**B11**  $\iint (36x^2y^2 + 96x^3y^3) dx dy$

D

$D: x = 1, y = \sqrt[3]{x}; \quad y=-x^3$

**B 26**  $\iint y^2 e^{-\frac{xy}{2}} dx dy$

D

$D: x = 0, y = 1; \quad y=x/2$

$$\mathbf{B\ 12} \iint y^2 \sin \frac{xy}{2} dx dy$$

D

$$D: x = 0, y = \sqrt{\pi}; y=x/2$$

$$\mathbf{B\ 27} \iint y^2 \cos xy dx dy$$

D

$$D: x = 0, y = \sqrt{\pi}; y=2x$$

$$\mathbf{B13} \iint (12x^2y^2 + 16x^3y^3) dx dy$$

D

$$D: x = 1, y = -\sqrt{x}; y=x^2$$

$$\mathbf{B\ 28} \iint (18x^2y^2 + 24xy) dx dy$$

D

$$D: x = 1; y = -\sqrt[3]{x}; y=x^3$$

$$\mathbf{B\ 14} \iint y^2 e^{-\frac{xy}{8}} dx dy$$

D

$$D: x = 0, y = 2; y=x/2$$

$$\mathbf{B\ 29} \iint (9x^2y^2 + 12xy) dx dy$$

D

$$D: x = 1; y = \sqrt{x}; y=-x^2$$

$$\mathbf{B\ 15} \iint y^2 \cos \frac{xy}{2} dx dy$$

D

$$D: x = 0, y = \sqrt{2\pi}; y=2x$$

$$\mathbf{B\ 30} \iint y^2 \cos xy dx dy$$

D

$$D: x = 0, y = \sqrt{\pi/4}; y=x$$

**Задача 2.** Изменить порядок интегрирования.

$$2.1. \int_{-2}^{-1} dy \int_{-\sqrt{2+y}}^0 f \, dx + \int_{-1}^0 dy \int_{-\sqrt{-y}}^0 f \, dx.$$

$$2.2. \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^0 f \, dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_{-\sqrt{-y}}^0 f \, dx.$$

$$2.3. \int_0^1 dy \int_0^y f \, dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_0^{\sqrt{2-y^2}} f \, dx.$$

$$2.4. \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f \, dx + \int_1^2 dy \int_0^{\sqrt{2-y}} f \, dx.$$

$$2.5. \int_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int_{-\sqrt{2-x^2}}^0 f \, dy + \int_{-1}^0 dx \int_x^0 f \, dy.$$

$$2.6. \int_0^{1/\sqrt{2}} dy \int_0^{\arcsin y} f \, dx + \int_{1/\sqrt{2}}^1 dy \int_0^{\arccos y} f \, dx$$

$$2.7. \int_{-2}^{-1} dy \int_0^{\sqrt{2+y}} f \, dx + \int_{-1}^0 dy \int_0^{\sqrt{-y}} f \, dx.$$

$$2.8. \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^0 f \, dx + \int_1^e dy \int_{-1}^{-\ln y} f \, dx \quad 2.9.$$

$$\int_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} f \, dy + \int_{-1}^0 dx \int_0^{x^2} f \, dy.$$

$$2.10. \int_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^0 f \, dy + \int_{-\sqrt{3}}^0 dx \int_{\sqrt{4-x^2}-2}^0 f \, dy.$$

$$2.11. \int_0^1 dx \int_{1-x^2}^1 f \, dy + \int_1^e dx \int_{\ln x}^1 f \, dy.$$

$$2.12. \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt[3]{y}} f \, dx + \int_1^2 dy \int_0^{2-y} f \, dx.$$

$$2.13. \int_0^{\pi/4} dy \int_0^{\sin y} f \, dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} dy \int_0^{\cos y} f \, dx..$$

$$2.14. \int_{-2}^{-1} dx \int_{-(2+x)}^0 f \, dy + \int_{-1}^0 dx \int_{\sqrt[3]{x}}^0 f \, dy.$$

$$2.15. \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f \, dx + \int_1^e dy \int_{\ln y}^1 f \, dx.$$

$$2.16. \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^0 f \, dx + \int_1^2 dy \int_{-\sqrt{2-y}}^0 f \, dx.$$

$$2.17. \int_0^1 dy \int_{-y}^0 f \, dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^0 f \, dx.$$

$$2.18. \int_0^1 dy \int_0^{y^2} f \, dx + \int_1^2 dy \int_0^{2-y} f \, dx.$$

$$2.19. \int_0^{\sqrt{3}} dx \int_{\sqrt{4-x^2}-2}^0 f dy + \int_{\sqrt{3}}^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^0 f dy. \quad 2.20. \int_{-2}^{-1} dy \int_{-(2+y)}^0 f dx + \int_{-1}^0 dy \int_{\sqrt[3]{y}}^0 f dx.$$

$$2.21. \int_0^1 dy \int_0^y f dx + \int_1^e dy \int_{\ln y}^1 f dx.$$

$$2.22. \int_0^1 dx \int_0^{x^2} f dy + \int_1^{\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} f dy.$$

$$2.23. \int_0^{\pi/4} dx \int_0^{\sin x} f dy + \int_{\pi/4}^{\pi/2} dx \int_0^{\cos x} f dy.$$

$$2.24. \int_{-\sqrt{2}}^{-1} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^0 f dx + \int_{-1}^0 dy \int_y^0 f dx.$$

$$2.25. \int_0^1 dx \int_0^{x^2} f dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f dy.$$

$$2.26. \int_0^{\sqrt{3}} dx \int_0^{2-\sqrt{4-x^2}} f dy + \int_{\sqrt{3}}^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} f dy.$$

$$2.27. \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x}}^0 f dy + \int_1^2 dx \int_{-\sqrt{2-x}}^0 f dy.$$

$$2.28. \int_0^1 dx \int_0^x f dy + \int_1^{\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} f dy.$$

$$2.29. \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_0^{\sqrt{2-y^2}} f dx.$$

$$2.30. \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x}} f dy + \int_1^2 dx \int_0^{\sqrt{2-x}} f dy.$$

**Задача 3. Вычислить.**

$$3.1. \iint_D (12x^2y^2 + 16x^3y^3) dx dy; \\ D: x=1, y=x^2, y=-\sqrt{x}.$$

$$3.2. \iint_D (9x^2y^2 + 48x^3y^3) dx dy; \\ D: x=1, y=\sqrt{x}, y=-x^2.$$

$$3.3. \iint_D (36x^2y^2 - 96x^3y^3) dx dy; \\ D: x=1, y=\sqrt[3]{x}, y=-x^3.$$

$$3.4. \iint_D (18x^2y^2 + 32x^3y^3) dx dy; \\ D: x=1, y=x^3, y=-\sqrt[3]{x}.$$



$$3.5. \iint_D (27x^2y^2 + 48x^3y^3) dx dy;$$

$$D: x=1, y=x^2, y=-\sqrt[3]{x}.$$

$$3.7. \iint_D (18x^2y^2 + 32x^3y^3) dx dy;$$

$$D: x=1, y=x^3, y=-\sqrt{x}.$$

$$3.9. \iint_D (4xy + 3x^2y^2) dx dy;$$

$$D: x=1, y=x^2, y=-\sqrt{x}.$$

$$3.11. \iint_D (8xy + 9x^2y^2) dx dy;$$

$$D: x=1, y=\sqrt[3]{x}, y=-x^3.$$

$$3.13. \iint_D (12xy + 27x^2y^2) dx dy;$$

$$D: x=1, y=x^2, y=-\sqrt[3]{x}.$$

$$3.15. \iint_D \left( \frac{4}{5}xy + \frac{9}{11}x^2y^2 \right) dx dy;$$

$$D: x=1, y=x^3, y=-\sqrt{x}.$$

$$3.17. \iint_D (24xy - 48x^3y^3) dx dy;$$

$$D: x=1, y=x^2, y=-\sqrt{x}.$$

$$3.19. \iint_D (4xy + 16x^3y^3) dx dy;$$

$$D: x=1, y=\sqrt[3]{x}, y=-x^3.$$

$$3.6. \iint_D (18x^2y^2 + 32x^3y^3) dx dy;$$

$$D: x=1, y=\sqrt[3]{x}, y=-x^2.$$

$$3.8. \iint_D (27x^2y^2 + 48x^3y^3) dx dy;$$

$$D: x=1, y=\sqrt{x}, y=-x^3.$$

$$3.10. \iint_D (12xy + 9x^2y^2) dx dy;$$

$$D: x=1, y=\sqrt{x}, y=-x^2.$$

$$3.12. \iint_D (24xy + 18x^2y^2) dx dy;$$

$$D: x=1, y=x^3, y=-\sqrt[3]{x}.$$

$$3.14. \iint_D (8xy + 18x^2y^2) dx dy;$$

$$D: x=1, y=\sqrt[3]{x}, y=-x^2.$$

$$3.16. \iint_D \left( \frac{4}{5}xy + 9x^2y^2 \right) dx dy;$$

$$D: x=1, y=\sqrt{x}, y=-x^3.$$

$$3.18. \iint_D (6xy + 24x^3y^3) dx dy;$$

$$D: x=1, y=\sqrt{x}, y=-x^2.$$

$$3.20. \iint_D (4xy + 16x^3y^3) dx dy;$$

$$D: x=1, y=x^3, y=-\sqrt[3]{x}.$$

$$3.21. \iint_D (44xy + 16x^3y^3) dx dy;$$

$$D: x = 1, y = x^2, y = -\sqrt[3]{x}.$$

$$3.22. \iint_D (4xy + 176x^3y^3) dx dy;$$

$$D: x = 1, y = \sqrt[3]{x}, y = -x^3.$$

$$3.23. \iint_D (xy - 4x^3y^3) dx dy;$$

$$D: x = 1, y = x^3, y = -\sqrt{x}.$$

$$3.24. \iint_D (4xy + 176x^3y^3) dx dy;$$

$$D: x = 1, y = \sqrt{x}, y = -x^3.$$

$$3.25. \iint_D \left( 6x^2y^2 + \frac{25}{3}x^4y^4 \right) dx dy;$$

$$D: x = 1, y = x^2, y = -\sqrt{x}.$$

$$3.26. \iint_D (9x^2y^2 + 25x^4y^4) dx dy;$$

$$D: x = 1, y = \sqrt{x}, y = -x^2.$$

$$3.27. \iint_D \left( 3x^2y^2 + \frac{50}{3}x^4y^4 \right) dx dy;$$

$$D: x = 1, y = \sqrt[3]{x}, y = -x^3.$$

$$3.28. \iint_D (9x^2y^2 + 25x^4y^4) dx dy;$$

$$D: x = 1, y = x^3, y = -\sqrt[3]{x}.$$

$$3.29. \iint_D (54x^2y^2 + 150x^4y^4) dx dy;$$

$$D: x = 1, y = x^2, y = -\sqrt[3]{x}.$$

$$3.30. \iint_D (xy - 9x^5y^5) dx dy;$$

$$D: x = 1, y = \sqrt[3]{x}, y = -x^2.$$

### Контрольные вопросы:

1. Какой интеграл называется повторным?
2. Что называется областью интегрирования?
3. Как найти область интегрирования?

### Практическая работа № 18 по теме

#### «Вычисление двойных интегралов в полярных координатах»

**Цель:** проверить умение вычислять двойные интегралы в полярных координатах. **Задание.** Вычислить интеграл по области **D**, заданной системой неравенств:

- изобразить область в декартовой системе координат;
- вычислить интеграл, переходя к полярным координатам.

$$\mathbf{B\ 1} \iint \sqrt{16 - x^2 - y^2} \, dx \, dy$$

D

$$D: \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4; \\ x \geq 0; y \leq 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{B\ 16} \iint \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy$$

D

$$D: \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 9 \\ y \geq 0; x \geq 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{B\ 2.} \iint \frac{1}{(9+X^2+Y^2)^2} \, dx \, dy$$

D

$$D: \begin{cases} 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9 \\ y \geq 0; x \geq 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{B\ 17.} \iint \frac{1}{\sqrt{3-x^2-y^2}} \, dx \, dy$$

D

$$D: \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 9; \\ 0 \leq y \end{cases}$$

$$\mathbf{B\ 3.} \iint \frac{108}{(9-X^2Y^2)^2} \, dx \, dy$$

D

$$D: \begin{cases} 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9; \\ x \leq 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{B\ 18.} \iint (x - y) \, dx \, dy$$

D

$$D: \begin{cases} 2 \leq x^2 + y^2 \leq 4; \\ 0 \leq y \end{cases}$$

$$\mathbf{B\ 4.} \iint \frac{1}{\sqrt{9-x^2-y^2}} \, dx \, dy$$

D

$$D: \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 3; \\ y \leq 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{B19.} \iint \sqrt{16 - x^2 - y^2} \, dx \, dy$$

D

$$D: \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4; \\ 0 \leq x \end{cases}$$

$$\mathbf{B\ 5.} \iint \arctg \frac{x}{y} \, dx \, dy$$

D

$$\mathbf{B\ 20.} \iint \frac{1}{x^2} e^{\frac{y}{x}} \, dx \, dy$$

D

$$D: \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4; \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$$D: \begin{cases} 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4; \\ 0 \leq y \end{cases}$$

$$\mathbf{B\ 6.} \iint \frac{1}{(4-x^2-y^2)^2} dx dy$$

$$\mathbf{B\ 21.} \iint \frac{1}{(4-x^2-y^2)^2} dx dy$$

D

D

$$D: \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 2; \\ y^2 \leq 0 \end{cases}$$

$$D: \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4; \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{B\ 7.} \iint \frac{x^2}{y^2} dx dy$$

$$\mathbf{B\ 22} \iint \arctg \frac{x}{y} dx dy$$

D

D

$$D: \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 9; \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$$D: \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4; \\ 0 \leq y \end{cases}$$

$$\mathbf{B\ 8.} \iint \sqrt{16 - x^2 - y^2} dx dy$$

$$\mathbf{B\ 23.} \iint \frac{y}{x^2} dx dy$$

D

D

$$D: \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1; \\ y \leq 0 \end{cases}$$

$$D: \begin{cases} 0 \leq y; \\ 16 \leq x^2 + y^2 \leq 25 \end{cases}$$

$$\mathbf{B\ 9.} \iint e^{x^2+y^2} dx dy$$

$$\mathbf{B\ 24.} \iint \frac{1}{(4+x^2+y^2)^2} dx dy$$

D

D

$$D: \begin{cases} 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9; \\ 0 \leq y \end{cases}$$

$$D: \begin{cases} y \geq 0; x \geq 0; \\ 2 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \end{cases}$$

$$\mathbf{B\ 10.} \iint \ln \sqrt{16 - x^2 - y^2} dx dy$$

$$\mathbf{B\ 25.} \iint \frac{x^2}{y^3} dx dy$$

D

D

$$D: \begin{cases} 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9; \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$$D: \begin{cases} y \geq 0; \\ x^2 + y^2 \leq 9 \end{cases}$$

**B 11.**  $\iint (x - y) dx dy$

D

D:  $\begin{cases} 2 \leq x^2 + y^2 \leq 4; \\ y \geq 0; x \geq 0 \end{cases}$

**B 12.**  $\iint (9 - x^2 - y^2) dx dy$

D

D:  $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4; \\ y \leq 0 \end{cases}$

**B13.**  $\iint \ln \sqrt{16 - x^2 - y^2} dx dy$

D

D:  $\begin{cases} 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9; \\ y \geq 0 \end{cases}$

**B 14.**  $\iint \sqrt{4 - x^2 - y^2} dx dy$

D

D:  $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 9; \\ y \geq 0 \end{cases}$

**B 15.**  $\iint (1 - x^2 - y^2) dx dy$

D

D:  $\begin{cases} 0 \leq y; \\ x^2 + y^2 \leq 9 \end{cases}$

**B 26.**  $\iint \frac{x}{y^2} dx dy$  D

D:  $\begin{cases} x \geq 0; \\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \end{cases}$

**B 27.**  $\iint \frac{y^2}{x^2} dx dy$

D

D:  $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4; \\ y \geq 0 \end{cases}$

**B 28.**  $\iint \frac{1}{x+y} dx dy$

D

D:  $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4 \\ y \geq 0 \end{cases}$

**B 29.**  $\iint \frac{1}{(x^2+y^2)^2} dx dy$

D

D:  $\begin{cases} x \geq 0; \\ x^2 + y^2 \leq 2 \end{cases}$

**B 30.**  $\iint \frac{x+y}{x^2+y^2} dx dy$

D

D:  $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4; \\ y \leq 0 \end{cases}$

**Задание 2.** Вычислить двойной интеграл, перейдя к полярным координатам.

1.  $\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ , где  $D: x^2 + y^2 = 4; y \geq 0$ .
2.  $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dxdy$ , где .
3.  $\iint_D \sqrt{1+x^2+y^2} dxdy$ , где  $D: x^2 + y^2 = 16; x \geq 0; y \geq 0$ .
4.  $\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{25-x^2-y^2}}$ , где  $D: x^2 + y^2 = 25; x \geq 0; y \geq 0$ .
5.  $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dxdy$ , где  $D: x^2 + y^2 = 1; x \geq 0$ .
6.  $\iint_D (1+x^2+y^2) dxdy$ , где  $D: x^2 + y^2 = 4; x \geq 0; y \geq 0$ .
7.  $\iint_D 5 dxdy$ , где  $D: x^2 + y^2 = 9$ .
8.  $\iint_D \frac{1}{7} dxdy$ , где  $D: x^2 + y^2 = 2x; y \geq 0$ .
9.  $\iint_D 3 dxdy$ , где  $D: x^2 + y^2 = 16; x \leq 0$ .
10.  $\iint_D dxdy$ , где  $D: x^2 + y^2 = 49; y \leq 0$ .
11.  $\iint_D 4 dxdy$ , где  $D: x^2 + y^2 = 4x; y \geq 0$ .
12.  $\iint_D \sqrt{9-x^2-y^2} dxdy$ , где  $D: x^2 + y^2 = 9; x \geq 0; y \geq 0$ .
13.  $\iint_D 5 dxdy$ , где  $D: x^2 + y^2 + 2x = 0$ .
14.  $\iint_D \frac{2}{3} dxdy$ , где  $D: x^2 + y^2 = 25; x \leq 0; y \geq 0$ .
15.  $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dxdy$ , где  $D: x^2 + y^2 = 4y$ .
16.  $\iint_D (x^2 + y^2) dxdy$ , где  $D: x^2 + y^2 = 6x$ .
17.  $\iint_D (x^2 + y^2) dxdy$ , где  $D: (x+1)^2 + y^2 = 1$ .
18.  $\iint_D (x^2 + y^2) dxdy$ , где  $D: (x-1)^2 + y^2 = 1$ .
19.  $\iint_D (x^2 + y^2) dxdy$ , где  $D: x^2 + (y+2)^2 = 4$ .

20.  $\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy$ , где  $D: x^2 + y^2 = 2x$ .
21.  $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ , где  $D: x^2 + y^2 + 4y = 0$ .
22.  $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ , где  $D: x^2 + y^2 + 6x = 0$ .
23.  $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ , где  $D: x^2 + y^2 - 10y = 0$ .
24.  $\iint_D \arctg \frac{y}{x} dx dy$ , где  $D: x^2 + y^2 = 1$ .
25.  $\iint_D \arctg \frac{y}{x} dx dy$ , где  $D: x^2 + y^2 = 9$ .
26.  $\iint_D \arctg \frac{y}{x} dx dy$ , где  $D: x^2 + y^2 = 16$ .
27.  $\iint_D x dx dy$ , где  $D: x^2 + y^2 = 16$ .
28.  $\iint_D x dx dy$ , где  $D: x^2 + y^2 = 2y$ .
29.  $\iint_D y dx dy$ , где  $D: x^2 + y^2 = 16$ .
30.  $\iint_D y dx dy$ , где  $D: x^2 + y^2 = 4x$ .

**Контрольные вопросы:** 1. Сформулировать алгоритм перехода от декартовых координат к полярным координатам.

### Практическая работа № 19 по теме

#### «Вычисление площадей с помощью двойных интегралов»

**Цель:** проверить умение вычислять площади с помощью двойных интегралов.

**Задание.** Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями

**В1.**  $y^2 - 2y + x^2 = 0, y^2 - 4y + x^2 = 0$

**В 16.**  $y^2 - 4y + x^2 = 0, y^2 - 8y + x^2 = 0$

$y = \frac{x}{\sqrt{3}}, y = \sqrt{3}x$

$y = \frac{x}{\sqrt{3}}, y = 0$

$$\mathbf{B2.} y^2 - 6y + x^2 = 0, y^2 - 8y + x^2 = 0$$

$$y = \frac{x}{\sqrt{3}}, y = \sqrt{3}x$$

$$\mathbf{B 17.} y^2 - 2y + x^2 = 0, y^2 - 4y + x^2 = 0$$

$$y = x, x = 0$$

$$\mathbf{B 3.} y^2 - 8y + x^2 = 0, y^2 - 10y + x^2 = 0$$

$$y = \frac{x}{\sqrt{3}}, y = \sqrt{3}x$$

$$\mathbf{B 18.} y^2 - 4y + x^2 = 0, y^2 - 8y + x^2 = 0$$

$$y = x, x = 0$$

$$\mathbf{B 4.} y^2 - 4y + x^2 = 0, y^2 - 6y + x^2 = 0$$

$$y = x, x = 0$$

$$\mathbf{B 19.} y^2 - 2y + x^2 = 0, y^2 - 10y + x^2 = 0$$

$$y = 0, y = \sqrt{3}x$$

$$\mathbf{B 5.} y^2 - 6y + x^2 = 0, y^2 - 10y + x^2 = 0$$

$$y = x, x = 0$$

$$\mathbf{B 20.} y^2 - 2y + x^2 = 0, y^2 - 4y + x^2 = 0$$

$$y = \frac{x}{\sqrt{3}}, y = \sqrt{3}x$$

$$\mathbf{B 6.} y^2 - 8y + x^2 = 0, y^2 - 10y + x^2 = 0$$

$$x = 0, y = \sqrt{3}x$$

$$\mathbf{B 21.} y^2 - 2y + x^2 = 0, y^2 - 6y + x^2 = 0$$

$$y = \frac{x}{\sqrt{3}}, y = \sqrt{3}x$$

$$\mathbf{B 7.} y^2 - 4y + x^2 = 0, y^2 - 6y + x^2 = 0$$

$$x = 0, y = \sqrt{3}x$$

$$\mathbf{B 22.} y^2 - 2y + x^2 = 0, y^2 - 8y + x^2 = 0$$

$$y = \frac{x}{\sqrt{3}}, y = \sqrt{3}x$$

$$\mathbf{B 8.} y^2 - 2y + x^2 = 0, y^2 - 6y + x^2 = 0$$

$$y = \frac{x}{\sqrt{3}}, y = 0$$

$$\mathbf{B 23.} y^2 - 2y + x^2 = 0, y^2 - 6y + x^2 = 0$$

$$y = \frac{x}{\sqrt{3}}, y = 0$$



$$\mathbf{B\ 9.} \ y^2 - 2y + x^2 = 0, \ y^2 - 10y + x^2 = 0$$

$$y = \frac{x}{\sqrt{3}}, \ y = \sqrt{3}x$$

$$\mathbf{B\ 10.} \ y^2 - 4y + x^2 = 0, \ y^2 - 10y + x^2 = 0$$

$$y = \frac{x}{\sqrt{3}}, \ y = \sqrt{3}x$$

$$\mathbf{B\ 11.} \ y^2 - 4y + x^2 = 0, \ y^2 - 2y + x^2 = 0$$

$$y = x, \ x = 0$$

$$\mathbf{B\ 12.} \ y^2 - 6y + x^2 = 0, \ y^2 - 8y + x^2 = 0$$

$$y = x, \ x = 0$$

$$\mathbf{B\ 13.} \ y^2 - 4y + x^2 = 0, \ y^2 - 8y + x^2 = 0$$

$$y = x, \ x = 0$$

$$\mathbf{B\ 14.} \ y^2 - 4y + x^2 = 0, \ y^2 - 8y + x^2 = 0$$

$$x = 0 \ y = \sqrt{3}x$$

$$\mathbf{B\ 24.} \ y^2 - 2y + x^2 = 0, \ y^2 - 6y + x^2 = 0$$

$$y = \frac{x}{\sqrt{3}}, \ y = 0$$

$$\mathbf{B\ 25.} \ y^2 - 6y + x^2 = 0, \ y^2 - 2y + x^2 = 0$$

$$y = x, \ x = 0$$

$$\mathbf{B\ 26.} \ y^2 - 4y + x^2 = 0, \ y^2 - 2y + x^2 = 0$$

$$x = 0, \ y = \sqrt{3}x$$

$$\mathbf{B\ 27.} \ y^2 - 4y + x^2 = 0, \ y^2 - 8y + x^2 = 0$$

$$x = 0, \ y = \sqrt{3}x$$

$$\mathbf{B\ 28.} \ y^2 - 4y + x^2 = 0, \ y^2 - 8y + x^2 = 0$$

$$y = \frac{x}{\sqrt{3}}, \ y = \sqrt{3}x$$

$$\mathbf{B\ 29.} \ y^2 - 4y + x^2 = 0, \ y^2 - 6y + x^2 = 0$$

$$y = \frac{x}{\sqrt{3}}, \ y = \sqrt{3}x$$

$$\text{В15 } y^2 - 2y + x^2 = 0, y^2 - 6y + x^2 = 0$$

$$y = \frac{x}{\sqrt{3}}, x = 0$$

$$\text{В 30. } y^2 - 6y + x^2 = 0, y^2 - 10y + x^2 = 0$$

$$y = \frac{x}{\sqrt{3}}, y = \sqrt{3}x$$

**Задание 2.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями в прямоугольной системе координат.

$$1. \quad y = 4 - x^2; 3x - y = 0; y = 0.$$

$$2. \quad 2y = x^2; 2x + 2y - 3 = 0.$$

$$3. \quad y - 2x = 0; y = x^2; x = 1.$$

$$4. \quad y = x^3; y = x; y = 2x.$$

$$5. \quad y^2 = x; 3y^2 = 4x - 4.$$

$$6. \quad y = (x - 4)^2; y = 16 - x^2.$$

$$7. \quad y = x + 1; y = \cos x; y = 0.$$

$$8. \quad y = \frac{2}{\pi}x; y = \sin x; y = 0.$$

$$9. \quad 4y = 8x - x^2; 4y = x + 6.$$

$$10. \quad y = e^x; y = e^{-x}; x = 3.$$

$$11. \quad y = 2^x; 2x + 3y = 8; x \geq 0; y \geq 0.$$

$$12. \quad y = \ln x; y = -1; x = 3.$$

$$13. \quad xy = 6; x + y = 7.$$

$$14. \quad xy = 4; x - y = 0; x - 4 = 0.$$

$$15. \quad x + 2y^2 = 0; x + 3y^2 = 1.$$

$$16. \quad y^2 = x^3; x = \frac{4}{3}.$$

$$17. \quad x = 4y^2; x = \frac{y^2}{9}; x = 2.$$

$$18. \quad y = \ln x; x + y = 1; y = 1.$$

$$19. \quad y = 2^x; y = 2x - x^2; 0 \leq x \leq 2.$$

$$20. \quad y = \arcsin x; 0 \leq y \leq \pi; x \geq 0.$$

$$21. \quad y = \arccos x; y \geq 0; x \geq 0.$$

$$22. \quad x = \arcsin y; 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}; y \geq 0.$$

$$23. \quad x = \arccos y; y \geq 0; x \leq 0.$$

$$24. \quad y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}; y = \sqrt{3}; x \geq 0.$$

$$25. \quad y = \sqrt{x - 1}; y = |x - 2|.$$

$$26. \quad x = |y|; x = 4 - y^2.$$

$$27. \quad x = \ln y; y \leq 7.29; x \geq 0.$$

$$28. \quad y = x^2 + 4x; x - y + 4 = 0.$$

$$29. \quad y = x^2; 4y = x^2; c = \pm 2.$$

$$30. \quad y = x^2 + 1; y = 3 - x^2.$$

### Контрольные вопросы:

1. Алгоритм нахождения части поверхности  $S$ , проектирующейся на область  $D$ .

### Самостоятельная работа

#### Вариант 1.

$$1). \quad \iint_D f(x, y) dx dy, \quad D - \text{круг } x^2 + y^2 \leq 9$$

#### Вариант 2.

$$1). \quad \iint_D f(x, y) dx dy, \quad D - \text{полукруг } y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1$$

2).  $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ , D – 1 четверть круга  
 $x^2 + y^2 \leq 9$

### Вариант 3.

1).  $\iint_D f(x, y) dx dy$ , D – круговой сектор  
 $x^2 + y^2 \leq 4, y \geq x, y \leq x\sqrt{3}, x \geq 0$

2).  $\iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ , D – круговое кольцо  
 $x^2 + y^2 \geq 1, x^2 + y^2 \leq 4$

### Вариант 5.

1).  $\iint_D f(x, y) dx dy$ , D – круговое кольцо  
 $x^2 + y^2 \geq 1, x^2 + y^2 \leq 16$

$\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$ , D – круг  
 $x^2 + y^2 \leq 4$

### Вариант 7.

1).  $\iint_D f(x, y) dx dy$ , D – полукруг  $x^2 + y^2 \leq 9$ ,  
 $y \geq 0$

2).  $\iint_D e^{-(x^2 + y^2)} dx dy$ , D – круг  $x^2 + y^2 \leq 4$

2).  $\iint_D y dx dy$ , D – круговой сектор  
 $x^2 + y^2 \leq 1, -1 \leq x \leq 0, 0 \leq y \leq 1$

### Вариант 4.

1).  $\iint_D f(x, y) dx dy$ , D – круговое кольцо  
 $x^2 + y^2 \leq 25, x^2 + y^2 \geq 4$

2).  $\iint_D \frac{dx dy}{x^2 + y^2 + 1}$ , D – полукруг  
 $y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1$

### Вариант 6.

1).  $\iint_D f(x, y) dx dy$ , D – круг  $x^2 + y^2 \leq 25$

2).  $\iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2} dx dy$ , D – круговой сектор  
 $x^2 + y^2 \leq 1$ ,  
 $y \geq \frac{\sqrt{3}}{3}x, y \leq \sqrt{3}x, x \geq 0$

### Вариант 8.

1).  $\iint_D f(x, y) dx dy$ , D – круговой сектор  
 $x^2 + y^2 \leq 25, y \geq 0$ ,  
 $y \leq 2x$

2).  $\iint_D \sqrt{4 - x^2 - y^2} dx dy$ , D –  
кольцо  $x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 = 16$

## **Дифференциальные уравнения.**

Устный опрос по теме:

1. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям.
2. Какие уравнения называются дифференциальными?
3. Решение дифференциального уравнения.
4. Дифференциальное уравнение первого порядка.
5. Задача Коши.
6. Дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными.
7. Линейное дифференциальное уравнение первого порядка

8. Однородное дифференциальное уравнение первого порядка.
9. Дифференциальные уравнения высших порядков. Решение уравнения.
10. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.
11. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

### Практическая работа № 20 по теме

#### «Дифференциальные уравнения первого порядка»

**Цель:** проверить умение решать дифференциальные уравнения первого порядка с разделенными и разделяющимися переменными.

**Задание 1.** Найти общее решение уравнений а), б).

**Задание 2.** Найти частное решение уравнения с разделяющимися переменными

**B1.1.a)**  $x^2 dx = 3y^2 dy$

**B16.1.a)**  $x^2 dx = 3y^2 dy$

б)  $y(1+x)dx + x(1-y)dy = 0$

б)  $y(1+x)dx + x(1-y)dy = 0$

2.  $y^2 dx = e^{-x} dy; y = 1 \text{ при } x = 0$

2.  $dx = e^{-x} dy; y = 1 \text{ при } x = 0$

**B2. 1.a)**  $\frac{1}{\sqrt{x}} dy = \frac{3}{\sqrt{y}} dx$

**B17. 1.a)**  $\frac{1}{\sqrt{x}} dy = \frac{3}{\sqrt{y}} dx$

б)  $y^2 dx + (x-2) dy = 0$

б)  $y^2 dx + (x-2) dy = 0$

2.  $\frac{1}{y^2} dx = \frac{1}{x^2} dy, y = 2 \text{ при } x = 0$

2.  $dx = \frac{1}{x^2} dy, y = 2 \text{ при } x = 0$

**B31.a)**  $\sqrt{x} dx = \sqrt{y} dy$

**B18.1.a)**  $\sqrt{x} dx = \sqrt{y} dy$

б)  $(1+y^2)dx - \sqrt{x} dy = 0$

б)  $(1+y^2)dx - \sqrt{x} dy = 0$

2.  $(1+y) dx = (1-x) dy,$

2.  $(1+y) dx = (1-x) dy,$

$y = 3 \text{ при } x = -2$

$y = 3 \text{ при } x = -2$

$$\mathbf{B4. 1.a)} (3x^2 - 2x) dx = dy$$

$$6) -(2xy+3y)dx + x^2 dy = 0$$

$$2.y dx = x dy, y = 6 \text{ при } x = 2$$

$$\mathbf{B5.1.a)} (4x - 3) dx = dy$$

$$6) (xy+x)\frac{dx}{dy}=1$$

$$2.\frac{2x-1}{y+1} = \frac{dx}{dy}, \quad y = 0 \text{ при } x = 5$$

$$\mathbf{B6. 1.a)} x dx = dy$$

$$6) 2(xy+y)dx = x dy$$

$$2.(y+1) dx - (1-x) dy = 0,$$

$$y = 1 \text{ при } x = 0$$

$$3. xy^2 y' = x^3 + y^3$$

$$4. xy' + y = x + 1$$

$$\mathbf{B7.1.a)} x^2 dx = 3y^2 dy$$

$$6) y(1+x)dx + x(1-y) dy = 0$$

$$2.y^2 dx = e^{-x} dy; y = 1 \text{ при } x = 0$$

$$\mathbf{B8.1.a)} \frac{1}{\sqrt{x}} dy = \frac{3}{\sqrt{y}} dx$$

$$6) y^2 dx + (x-2) dy = 0$$

$$2.\frac{1}{y^2} dx = \frac{1}{x^2} dy, y = 2 \text{ при } x = 0$$

$$\mathbf{B9. 1.a)} \sqrt{x} dx = \sqrt{y} dy$$

$$\mathbf{B19. 1.a)} (3x^2 - 2x) dx = dy$$

$$6) -(2xy+3y)dx + x^2 dy = 0$$

$$2.y dx = x dy, y = 6 \text{ при } x = 2$$

$$\mathbf{B20. 1.a)} (4x - 3) dx = dy$$

$$6) (xy+x)\frac{dx}{dy}=1$$

$$2.\frac{2x-1}{y+1} = \frac{dx}{dy}, \quad y = 0 \text{ при } x = 5$$

$$\mathbf{B21.1.a)} x dx = dy$$

$$6) 2(xy+y)dx = x dy$$

$$2.(y+1) dx - (1-x) dy = 0,$$

$$y = 1 \text{ при } x = 0$$

$$3. xy^2 y' = x^3 + y^3$$

$$4. xy' + y = x + 1$$

$$\mathbf{B22.1.a)} x^2 dx = 3y^2 dy$$

$$6) y(1+x)dx + x(1-y) dy = 0$$

$$2.y^2 dx = e^{-x} dy; y = 1 \text{ при } x = 0$$

$$\mathbf{B23.1.a)} \frac{1}{\sqrt{x}} dy = \frac{3}{\sqrt{y}} dx$$

$$6) y^2 dx + (x-2) dy = 0$$

$$2.\frac{1}{y^2} dx = \frac{1}{x^2} dy, y = 2 \text{ при } x = 0$$

$$\mathbf{B24.1.a)} \sqrt{x} dx = \sqrt{y} dy$$

$$6)(1+y^2)dx - \sqrt{x} dy = 0$$

$$2.(1+y) dx = (1-x) dy,$$

$$y = 3 \text{ при } x = -2$$

$$\mathbf{B10.1.a)}(3x^2 - 2x) dx = dy$$

$$6) -(2xy+3y)dx + x^2 dy = 0$$

$$2.y dx = x dy, y = 6 \text{ при } x = 2$$

$$\mathbf{B11.1.a)}(4x - 3) dx = dy$$

$$6) (xy+x)\frac{dx}{dy}=1$$

$$2.\frac{2x-1}{y+1} = \frac{dx}{dy}, \quad y = 0 \text{ при } x = 5$$

$$\mathbf{B12.1.a)}x dx = dy$$

$$6) 2(xy+y)dx = x dy 2.(y + 1) dx - (1-x) dy = 0,$$

$$y = 1 \text{ при } x = 0$$

$$\mathbf{B13.1.a)}x^2 dx = 3y^2 dy$$

$$6)y(1+x)dx + x(1-y) dy = 0$$

$$2.y^2 dx = e^{-x} dy;$$

$$y = 1 \text{ при } x = 0$$

$$\mathbf{B14.1.a)}\frac{1}{\sqrt{x}} dy = \frac{3}{\sqrt{y}} dx$$

$$6)y^2 dx + (x-2) dy = 0$$

$$2.\frac{1}{y^2} dx = \frac{1}{x^2} dy, y = 2 \text{ при } x = 0$$

$$6)(1+y^2)dx - \sqrt{x} dy = 0$$

$$2.(1+y) dx = (1-x) dy,$$

$$y = 3 \text{ при } x = -2$$

$$\mathbf{B25.1.a)}(3x^2 - 2x) dx = dy$$

$$6) -(2xy+3y)dx + x^2 dy = 0$$

$$2.y dx = x dy, y = 6 \text{ при } x = 2$$

$$\mathbf{B26.1.a)}(4x - 3) dx = dy$$

$$6) (xy+x)\frac{dx}{dy}=1$$

$$2.\frac{2x-1}{y+1} = \frac{dx}{dy}, \quad y = 0 \text{ при } x = 5$$

$$\mathbf{B27.1.a)}x dx = dy$$

$$6) 2(xy+y)dx = x dy 2.(y + 1) dx - (1-x) dy = 0,$$

$$y = 1 \text{ при } x = 0$$

$$\mathbf{B28.1.a)}x^2 dx = 3y^2 dy$$

$$6)y(1+x)dx + x(1-y) dy = 0$$

$$2.y^2 dx = e^{-x} dy; y = 1 \text{ при } x = 0$$

$$\mathbf{B29.1.a)}\frac{1}{\sqrt{x}} dy = \frac{3}{\sqrt{y}} dx$$

$$6)y^2 dx + (x-2) dy = 0$$

$$2.\frac{1}{y^2} dx = \frac{1}{x^2} dy, y = 2 \text{ при } x = 0$$

$$\mathbf{B15.1.a)} \sqrt{x} dx = \sqrt{y} dy$$

$$6)(1+y^2)dx - \sqrt{x} dy = 0$$

$$2.(1+y) dx = (1-x) dy,$$

$$y = 3 \text{ при } x = -2$$

$$\mathbf{B30.1.a)} \sqrt{x} dx = \sqrt{y} dy$$

$$6)(1+y^2)dx - \sqrt{x} dy = 0$$

$$2.(1+y) dx = (1-x) dy,$$

$$y = 3 \text{ при } x = -2$$

Контрольные вопросы:

1. Какое уравнение называется дифференциальным?
2. Что называется общим решением дифференциального уравнения?
3. Что называется частным решением дифференциального уравнения?
4. Понятие дифференциальных уравнений с разделенными и разделяющимися переменными.

### Практическая работа № 21 по теме «Однородные дифференциальные уравнения первого порядка»

**Цель:** научиться решать однородные дифференциальные уравнения первого порядка.

**Задание.** Решить однородное дифференциальное уравнение.

$$\mathbf{B1.} xy+y^2 - (2x^2 + xy)y' = 0$$

$$\mathbf{B2.} (x-y)dx + xdy = 0$$

$$\mathbf{B3.} (x^2 - xy)dy - y^2 dx = 0$$

$$\mathbf{B4.} xy^2 y' = x^3 + y^3$$

$$\mathbf{B5.} (x-y)y dx = x^2 dy$$

$$\mathbf{B16.} xy+y^2 - (2x^2 + xy)y' = 0$$

$$\mathbf{B17.} (x-y)dx + xdy = 0$$

$$\mathbf{B18.} (x^2 - xy)dy - y^2 dx = 0$$

$$\mathbf{B19.} xy^2 y' = x^3 + y^3$$

$$\mathbf{B20.} (x-y)y dx = x^2 dy$$



$$\text{B6. } xy^2 y' = x^3 + y^3$$

$$\text{B21. } xy^2 y' = x^3 + y^3$$

$$\text{B7. } xy + y^2 - (2x^2 + xy)y' = 0$$

$$\text{B22. } xy + y^2 - (2x^2 + xy)y' = 0$$

$$\text{B8. } (x-y)dx + xdy = 0$$

$$\text{B23. } (x-y)dx + xdy = 0$$

$$\text{B9. } (x^2 - xy)dy - y^2 dx = 0$$

$$\text{B24. } (x^2 - xy)dy - y^2 dx = 0$$

$$\text{B10. } xy^2 y' = x^3 + y^3$$

$$\text{B25. } xy^2 y' = x^3 + y^3$$

$$\text{B11. } (x-y)y dx = x^2 dy$$

$$\text{B26. } (x-y)y dx = x^2 dy$$

$$\text{B12. } xy^2 y' = x^3 + y^3$$

$$\text{B27. } xy^2 y' = x^3 + y^3$$

$$\text{B13.1.a) } x^2 dx = 3y^2 dy$$

$$\text{B28.1.a) } x^2 dx = 3y^2 dy$$

$$6)y(1+x)dx + x(1-y)dy = 0$$

$$6)y(1+x)dx + x(1-y)dy = 0$$

$$2.y^2 dx = e^{-x} dy;$$

$$2.y^2 dx = e^{-x} dy; y = 1 \text{ при } x = 0$$

$$y = 1 \text{ при } x = 0$$

$$3.xy + y^2 - (2x^2 + xy)y' = 0$$

$$3.xy + y^2 - (2x^2 + xy)y' = 0$$

$$4.xy' - xy = (1+x^2)e^x$$

$$4.xy' - xy = (1+x^2)e^x$$

$$\text{B14. } (x-y)dx + xdy = 0$$

$$\text{B29. } (x-y)dx + xdy = 0$$

$$\text{B15. } (x^2 - xy)dy - y^2 dx = 0$$

$$\text{B30. } (x^2 - xy)dy - y^2 dx = 0$$

Контрольные вопросы:

1. Какое уравнение называется однородным уравнением первого порядка

**Практическая работа № 22 по теме  
«Однородные дифференциальные уравнения первого порядка»**

**Цель:** научиться решать линейные дифференциальные уравнения первого порядка.

**Задание.** Решить линейное дифференциальное уравнение.

**B1.**  $xy' - xy = (1+x^2)e^x$

**B16.**  $xy' - xy = (1+x^2)e^x$

**B2.**  $y' + 2xy = x^3$

**B17.**  $y' + 2xy = x^3$

**B3.**  $(1+x^2)y' - xy = 2x$

**B18.**  $(1+x^2)y' - xy = 2x$

**B4.**  $xy' + y = x + 1$

**B19.**  $xy' + y = x + 1$

**B5.**  $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x$

**B20.**  $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x$

**B6.**  $y' + y = x + 1$

**B21.**  $xy' + y = x + 1$

**B7.**  $xy' - xy = (1+x^2)e^x$

**B22.**  $xy' - xy = (1+x^2)e^x$

**B8.**  $y' + 2xy = x^3$

**B23.**  $y' + 2xy = x^3$

**B9.**  $(1+x^2)y' - xy = 2x$

**B24.**  $(1+x^2)y' - xy = 2x$

**B10.**  $xy' + y = x + 1$

**B25.**  $xy' + y = x + 1$

**B11.**  $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x$

**B26.**  $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x$

**B12.**  $xy' + y = x + 1$

**B27.**  $xy' + y = x + 1$

**B13.**  $xy' - xy = (1+x^2)e^x$

**B28.**  $xy' - xy = (1+x^2)e^x$

**B14.**  $y' + 2xy = x^3$

**B29.**  $y' + 2xy = x^3$

**B15.**  $(1+x^2)y' - xy = 2x$

**B30.**  $(1+x^2)y' - xy = 2x$

**Задача 2.** Найти решение задачи Коши.

$$4.1. y' - y/x = x^2, \quad y(1) = 0.$$

$$4.2.$$

$$y' - y \operatorname{ctg} x = 2x \sin x, \quad y(\pi/2) = 0.$$

$$4.3. y' + y \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x, \quad y(0) = 0. \quad 4.4. y' + y \operatorname{tg} x = \cos^2 x, \quad y(\pi/4) = 1/2.$$

$$4.5. y' - \frac{y}{x+2} = x^2 + 2x, \quad y(-1) = 3/2. \quad 4.6. y' - \frac{1}{x+1} y = e^x (x+1), \quad y(0) = 1.$$

$$4.7. y' - \frac{y}{x} = x \sin x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1. \quad 4.8. y' + \frac{y}{x} = \sin x, \quad y(\pi) = \frac{1}{\pi}.$$

$$4.9. y' + \frac{y}{2x} = x^2, \quad y(1) = 1. \quad 4.10. y' + \frac{2x}{1+x^2} y = \frac{2x^2}{1+x^2}, \quad y(0) = \frac{2}{3}.$$

$$4.11. y' - \frac{2x-5}{x^2} y = 5, \quad y(2) = 4. \quad 4.12. y' + \frac{y}{x} = \frac{x+1}{x} e^x, \quad y(1) = e.$$

$$4.13. y' - \frac{y}{x} = -2 \frac{\ln x}{x}, \quad y(1) = 1. \quad 4.14. y' - \frac{y}{x} = -\frac{12}{x^3}, \quad y(1) = 4.$$

$$4.15. y' + \frac{2}{x} y = x^3, \quad y(1) = -5/6. \quad 4.16. y' + \frac{y}{x} = 3x, \quad y(1) = 1.$$

$$4.17. y' - \frac{2xy}{1+x^2} = 1+x^2, \quad y(1) = 3. \quad 4.18. y' + \frac{1-2x}{x^2} y = 1, \quad y(1) = 1.$$

$$4.19. y' + \frac{3y}{x} = \frac{2}{x^3}, \quad y(1) = 1. \quad 4.20. y' + 2xy = -2x^3, \quad y(1) = e^{-1}.$$

$$4.21. y' + \frac{xy}{2(1-x^2)} = \frac{x}{2}, \quad y(0) = \frac{2}{3}. \quad 4.22. y' + xy = -x^3, \quad y(0) = 3.$$

$$4.23. y' - \frac{2}{x+1}y = e^x(x+1)^2, \quad y(0)=1. \quad 4.24.$$

$$y' + 2xy = xe^{-x^2} \sin x, \quad y(0)=1.$$

$$4.25. y' - 2y/(x+1) = (x+1)^3, \quad y(0)=1/2. \quad 4.26.$$

$$y' - y \cos x = -\sin 2x, \quad y(0)=3.$$

$$4.27. y' - 4xy = -4x^3, \quad y(0) = -1/2.$$

$$4.28. y' - \frac{y}{x} = -\frac{\ln x}{x}, \quad y(1)=1.$$

$$4.29. y' - 3x^2y = x^2(1+x^3)/3, \quad y(0)=0. \quad 4.30.$$

$$y' - y \cos x = \sin 2x, \quad y(0) = -1.$$

$$4.31. y' - y/x = -2/x^2, \quad y(1)=1.$$

Контрольные вопросы:

1. Какое уравнение называется линейным уравнением первого порядка?

**Практическая работа № 23 по теме**  
**«Дифференциальные уравнения второго порядка.**  
**Линейные однородные уравнения второго порядка с постоянными**  
**коэффициентами»**

**Цель:** научиться решать линейные однородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Решить однородные линейные дифференциальные уравнения второго порядка. В пункте а) найти частное решение при заданных начальных условиях

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(0) = y'_0.$$

$$1,10. \text{ а) } y'' + y' - 2y = 0 \quad y(0)=1 \quad y'(0)=3$$

$$\text{б) } y'' + 12y' + 36y = 0$$

$$\text{в) } 4y'' + 9y = 0$$

$$2,12. \text{ a) } 3y'' - 2y' - 8y = 0 \quad y(0) = 1 \quad y'(0) = 1$$

$$\text{б) } y'' - 6y' + 9y = 0$$

$$\text{в) } y'' - 8y' + 17y = 0$$

$$3,13. \text{ a) } y'' - 4y' + 3y = 0 \quad y(0) = 6 \quad y'(0) = 10$$

$$\text{б) } y'' + 8y' + 16y = 0$$

$$\text{в) } 4y'' - 20y' + 25y = 0$$

$$4,14. \text{ a) } y'' - 7y' + 6y = 0 \quad y(0) = 2 \quad y'(0) = -1$$

$$\text{б) } y'' + 10y' + 25y = 0$$

$$\text{в) } y'' + 2y' + 5y = 0$$

$$5,15. \text{ a) } 2y'' + y' - y = 0 \quad y(0) = 1 \quad y'(0) = -1$$

$$\text{б) } 4y'' - 4y' + y = 0$$

$$\text{в) } y'' - 2y' + 10y = 0$$

$$6,16. \text{ a) } 2y'' + 5y' = 0 \quad y(0) = 1 \quad y'(0) = 4$$

$$\text{б) } y'' - 14y' + 49y = 0$$

$$\text{в) } y'' + 4y = 0$$

$$7,17. \text{ a) } 12y'' + 5y' = 0 \quad y(0) = 2 \quad y'(0) = 2$$

$$\text{б) } 9y'' - 6y' + y = 0$$

$$\text{B)} \quad 5y'' - 6y' + 5y = 0$$

$$8,18. \text{ a)} \quad y'' - 6y' + 8y = 0 \quad y(0) = 2 \quad y'(0) = -4$$

$$\text{б)} \quad 16y'' + 8y' + y = 0$$

$$\text{B)} \quad y'' - 6y' + 13y = 0$$

$$9,19. \text{ a)} \quad y'' - 4y' - 5y = 0 \quad y(0) = 2 \quad y'(0) = -3$$

$$\text{б)} \quad 16y'' + 24y' + 9y = 0$$

$$\text{B)} \quad y'' - 4y' + 13y = 0$$

$$10,20. \text{ a)} \quad y'' - 3y' + 2y = 0 \quad y(0) = 1 \quad y'(0) = 6$$

$$\text{б)} \quad 9y'' + 6y' + y = 0$$

$$\text{B)} \quad y'' + 9y = 0$$

## Самостоятельная работа

### 1 вариант.

Определить вид дифференциального уравнения, найти его общее решение, а где указано частное решение:

1)  $y' = x - 2$ ;

2)  $(3x - 4)y' = y$ ;

3)  $y' = \frac{1 - 2x}{y}$ ;

4)  $y' - 2xy = xe^{x^2}$ ;

5)  $y' = \frac{y}{x}$   $\{y(1) = 2\}$ , построить интегральную кривую.

### 2 вариант.

Определить вид дифференциального уравнения, найти его общее решение, а где указано частное решение:

1)  $y' - 4y = 8xe^{4x}$ ;

2)  $y' = 2x - 3$ ;

3)  $y' = \frac{y}{5x - 2}$ ;

4)  $yy' = 8x - 3$ ;

5)  $y' = \frac{y+1}{x}$   $\{y(1) = 0\}$ , построить интегральную кривую.

## Практическая работа № 24 по теме

### «Линейные неоднородные уравнения второго порядка »

**Цель:** научиться решать линейные неоднородные уравнения второго порядка.

### Вариант 1

1. Найти общее решение дифференциального уравнения:

а)  $(1 - x^2)y'' = xy'$

б)  $y'' - 4y' + 3y = e^{5x}$

2. Найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям:

а)  $y'' + 4y' - 12y = 8 \sin 2x$ ;  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 0$

б)  $y'' - 8y' + 16y = e^{4x}$ ;  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$

### Вариант 2

1. Найти общее решение дифференциального уравнения:

а)  $2yy'' + (y')^2 + (y')^4 = 0$

б)  $y'' - 6y' + 9y = e^x$

2. Найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям:

а)  $y'' - 6y' + 9y = x^2 - x + 3$ ;  $y(0) = \frac{4}{3}$ ,  $y'(0) = \frac{1}{27}$

б)  $y'' + 4y' - 5y = 8 \cos x$ ;  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 0$

### Вариант 3

1. Найти общее решение дифференциального уравнения:

а)  $y'' + y' \operatorname{tg} x = \sin 2x$

б)  $y'' + 7y' + 12y = \sin x$

2. Найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям:

а)  $y'' + 4y = e^{-2x}$ ;  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 0$

б)  $2y'' + y' - y = 2e^x$ ;  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 0$

### Вариант 4

1. Найти общее решение дифференциального уравнения:

а)  $y'' + \frac{1}{x}y' = x^2$

б)  $y'' + y = \cos 2x$

2. Найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям:

а)  $y'' - 2y' + 5y = xe^{2x}$ ;  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$

б)  $y'' - 2y' - 3y = 2x$ ;  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 0$

### Вариант 5

1. Найти общее решение дифференциального уравнения:

а)  $1 + (y')^2 + yy'' = 0$

б)  $y'' - 4y' + 8y = \sin 2x$

2. Найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям:

а)  $y'' + 5y' + 6y = 12 \cos 2x$ ;  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 3$

б)  $y'' - 6y' + 9y = -12x$ ;  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 0$



### Вариант 6

1. Найти общее решение дифференциального уравнения:

а)  $y'(1 + y) - 5y'y^2 = 0$

б)  $y'' + y' - 2y = e^x$

2. Найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям:

а)  $y'' - 5y' + 6y = (12x - 7)e^{-x}$ ;  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 0$

б)  $y'' + y' = \sin 3x$ ;  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$

### Вариант 7

1. Найти общее решение дифференциального уравнения:

а)  $xy'' + 2y' = x^3$

б)  $y'' - 4y' - 5y = x^2$

2. Найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям:

а)  $y'' - 4y' + 13y = 26x + 5$ ;  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$

б)  $y'' + 4y' = x$ ;  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 1$

### Вариант 8

1. Найти общее решение дифференциального уравнения:

а)  $y'' \operatorname{tg} y = 2(y')^2$

б)  $y'' - y' = 2(1 - x)$

2. Найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям:

а)  $y'' - 4y' = 6x^2 + 1$ ;  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = 3$

б)  $y'' - 2y' + y = \cos x$ ;  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$

Контрольные вопросы

1. Алгоритм решения линейного неоднородного уравнения второго порядка.

## Теория рядов

### Практическая работа № 25 по теме «Исследование числовых рядов на сходимость»

**Цель:** научиться исследовать числовые ряды на сходимость

Выписать три первых члена ряда найти третью частичную сумму

1,11 а)  $\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{2^n}{n \cdot n!};$

б)  $\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\ln n}{n}.$

2,12 а)  $\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{5^{n-1}}{n^2 \cdot (n-1)!};$

б)  $\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{4n^3}{(n^4 + 4)^2}$

3,13 а)  $\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{3^{n+2}}{(n-5)!};$

б)  $\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{|\sin n|}{\sqrt{n^3}}.$

4,14 а)  $\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{2^{2n}}{n \cdot (n+1)!};$

б)  $\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\cos^2 n}{\sqrt[3]{n^5}}.$

5,15а)  $\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{3^{n+1}}{n! (n+1)};$

б)  $\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{n}{n^2 + 1}.$

6,16 а)  $\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{n^2 + 1}{\sqrt{n} \cdot 3^n};$

б)  $\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n}.$

7,17 а)  $\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{2^{n+2} n^2}{3^{2n-1}};$

б)  $\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{e^n}{1 + e^{n^2}}.$

8,18а)  $\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{2^{3n} \cdot n!}{(2n)!};$

б)  $\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin^4 n}{2n\sqrt{n}}.$

9,19 а)  $\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2};$

б)  $\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2} \cdot \cos n}.$

$$10,20 \text{ а) } \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{n!(n+1)!}{(2n)!};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1+\cos^2 n}{n}.$$

## Практическая работа № 26 по теме «Область сходимости степенного ряда»

**Цель:** научиться исследовать степенные ряды на сходимость

### 2. Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимость

$$1. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(3n-2)!}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2n}{50n+5}; \quad \text{с) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(n+1) \cdot 3^n}$$

$$2. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \left( -\frac{2n}{3n+5} \right)^n; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 5^n}; \quad \text{с) } \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{(2n+1)}}$$

$$3. \text{ а) } \sum_{n=4}^{\infty} \frac{(-1)^n (n-3)}{n^2-1}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)(-1)^n}{n(n+2)}; \quad \text{с) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\ln n}$$

$$4. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{(2n+1)^n}; \quad \text{б) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot \ln n}; \quad \text{с) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{6n+5}$$

$$5. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot n}{100n+1}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+5)(-1)^n}{n^2+3n}; \quad \text{с) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[4]{n^5}}$$

$$6. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^n}{2n!}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 3^n}; \quad \text{с) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n+1) \cdot n}$$

$$7. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n+1}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} \sqrt[5]{n^3+1}}; \quad \text{с) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$\begin{array}{lll}
8. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}; & \text{ b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (n!)^2}{(2n)!}; & \text{ c) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n \cdot \sqrt[3]{n}} \\
9. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}; & \text{ b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot (n^2 + 1)}; & \text{ c) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n \cdot (n+1)} \\
10. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}; & \text{ b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^n}; & \text{ c) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+5}{3^n}
\end{array}$$

Найти область сходимости и проверить сходимость на границах интервала:

$$\begin{array}{ll}
1. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n-1} \cdot x^n; & \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (x-1)^n}{5^{n-1} (n+1)}; \\
2. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1} \cdot x^n}{5n^2 \sqrt{5^n}}; & \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{2n} (x-3)^n}{(n^2+1) 2^{3n-1}}; \\
3. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot x^n}{\sqrt{3^n} (n^2+1)}; & \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n-1} n (x-2)^n}{(2n-1) 4^{n+1}}; \\
4. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{5^n} \cdot x^n}{2^n \cdot (n^2+1)}; & \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+2) 5^{2n-1} (x-1)^n}{(2n^2+3) 2^{5n+1}}; \\
5. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \cdot 2^n \cdot x^n}{(n+5)!}; & \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5n^2+2) (x-2)^n}{(n^3+1) 3^{2n}}; \\
6. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1} \cdot x^n}{5^{2n-1} \cdot n}; & \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n} (n^2+2) (x-1)^n}{5^{2n+1} (n^2-2)}; \\
7. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{3n-1} \cdot x^n}{(n^2+n) \cdot 2^n}; & \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{2n+3} n^3 (x-2)^n}{3^{2n+1} (n^3+5)}; \\
8. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{2^{n+1}} x^n}{n \cdot (n^2+1)}; & \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n+1} n^2 (x-1)^n}{3^{2n-1} (n^2+1)}; \\
9. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-2} \cdot n \cdot x^n}{3^{n-3} (n-3)}; & \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n+1} (n^2+2) (x-1)^n}{(2n+1) 5^{2n-2}};
\end{array}$$

$$10. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \cdot x^n}{3^n (n+2)!};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n-1} (n^2 + 5) (x-2)^n}{(5n^2 + 1) 4^{3n-1}}$$

**Практическая работа № 27 по теме  
«Разложений функций в степенной ряд»**

**Практическая работа № 27 по теме**

научиться раскладывать функции в степенной ряд

**Тест по теме «Ряды»**

1 вариант.

Задание 1. Четвертый член ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}$  равен:

- а)  $-\frac{1}{5}$       б)  $-\frac{1}{9}$       в)  $\frac{1}{7}$       г)  $-\frac{1}{7}$

Задание 2. Ряд  $\cos x + \frac{\cos^2 x}{2} + \frac{\cos^3 x}{6} + \frac{\cos^4 x}{24} + \dots$  является...

- А. Степенным  
Б. Функциональным  
В. Знакопередающим  
Г. Знакоположительным

Задание 3. Дан ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{10n+1}$ . Используя необходимое условие сходимости ряда,

сделайте вывод

- А. ряд расходится  
Б. ряд сходится  
В. нельзя определить сходится или расходится ряд  
Г. другой ответ

Задание 4. Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$  исследовали на сходимость по признаку Коши, вычислили

предел  $k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{3}$ . Тогда можно сделать вывод, что ...

- А. Данный ряд сходится  
Б. Данный ряд расходится  
В. Данный ряд может как сходиться так и расходиться.  
Г. Данный ряд не существует

Задание 5. Найдите сумму ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$

1. 1  
2. -1  
3. 0,5  
4. -0,5

Задание 6. Установите между рядом и его названием.

Название	Ряд
1. Рад с положительными членами	А. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$
2. Знакопередающийся ряд	Б. $x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \dots$
3. Степенной ряд	В. $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \dots$
4. Функциональный ряд	Г. $\cos x + \cos^2 x + \cos^3 x + \cos^4 x + \dots$

Задание 7. Установите соответствие между числовым рядом и его общим членом  $a_n$

Ряд	Общий член ряда $a_n$
1. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \dots$	А. $a_n = \frac{1}{n+2}$
2. $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots$	Б. $a_n = \frac{1}{2n}$
3. $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \dots$	В. $a_n = \frac{1}{2n+1}$
4. $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots$	Г. $a_n = \frac{1}{2n-1}$

2 вариант

Задание 1. Четвертый член ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n-1}}{3n+1}$  равен:

- а) 1    б)  $-\frac{1}{13}$     в)  $\frac{1}{13}$     г)  $\frac{1}{9}$

Задание 2. Ряд  $1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}x^3 + \dots$  является

- А. Знакопередающимся  
Б. Функциональным  
В. Степенным  
Г. Знакоположительным.

Задание 3. Дан ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{2n-1}$ . Используя необходимое условие сходимости ряда

сделайте вывод

- А) ряд сходится  
Б) ряд расходится  
В) нельзя определить сходится или расходится ряд  
Г) другой ответ.

Задание 4. Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n}$  исследовали на сходимость по признаку Даламбера, вычислили

предел  $d = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 5$ . Тогда можно сделать вывод, что...

- А. Данный ряд сходится  
Б. Данный ряд расходится  
В. Данный ряд может как сходиться так и расходиться.  
Г. Данный ряд не существует

Задание 5. Найдите сумму ряда:  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n$

- А. 1

Б. 0,1

В. 0,9

Г.  $\frac{1}{9}$

Задание 6. Установите между рядом и его названием.

Название	Ряд
1. Ряд с положительными членами	А. $\sin x + \sin^2 x + \sin^3 x + \sin^4 x + \dots$
2. Знакопередающийся ряд	Б. $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$
3. Степенной ряд	В. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots$
4. Функциональный ряд	Г. $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots$

Задание 7. Установите соответствие между числовым рядом и его общим членом  $a_n$

Ряд	Общий член ряда $a_n$
1. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \dots$	А. $a_n = \frac{1}{n+2}$
2. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$	Б. $a_n = \frac{1}{2n}$
3. $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots$	В. $a_n = \frac{1}{2^n}$
4. $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots$	Г. $a_n = \frac{1}{n^2}$

## Основы теории комплексных чисел

### Практическая работа № 28 по теме «Действия над комплексными числами в алгебраической форме»

**Цель:** научить выполнять действия с комплексными числами в алгебраической форме

#### Вариант №1

1. Выполнить действия в алгебраической форме.

$Z_1=2-7i$ ,  $Z_2=3+5i$ . Найти:  $Z_1+Z_2$ ;  $Z_1-Z_2$ ;  $Z_1 \cdot Z_2$ ,  $Z_1:Z_2$

#### Вариант №2

1. Выполнить действия в алгебраической форме.

$Z_1=3+4i$ ,  $Z_2=-1-2i$ . Найти:  $Z_1+Z_2$ ;  $Z_1-Z_2$ ;  $Z_1:Z_2$ ,  $Z_1 \cdot Z_2$

#### Вариант №3

1. Выполнить действия в алгебраической форме.

$Z_1=3-4i$ ,  $Z_2=2+5i$ . Найти:  $Z_1+Z_2$ ;  $Z_1-Z_2$ ;  $Z_1 \cdot Z_2$ ,  $Z_1:Z_2$ .

#### Вариант №4

1. Выполнить действия в алгебраической форме.

$Z_1=3-2i$ ,  $Z_2=-3+5i$ . Найти:  $Z_1+Z_2$ ;  $Z_1-Z_2$ ;  $Z_1:Z_2$ ,  $Z_1 \cdot Z_2$

#### Вариант №5

1. Выполнить действия в алгебраической форме.

$Z_1=2-5i$ ,  $Z_2=2+4i$ . Найти:  $Z_1+Z_2$ ;  $Z_1-Z_2$ ;  $Z_1 \cdot Z_2$ ,  $Z_1:Z_2$ .

#### Вариант №6

1. Выполнить действия в алгебраической форме.

$Z_1=1+2i$ ,  $Z_2=-5-2i$ . Найти:  $Z_1+Z_2$ ;  $Z_1-Z_2$ ;  $Z_1:Z_2$ ,  $Z_1 \cdot Z_2$

#### Вариант №7

1. Выполнить действия в алгебраической форме.

$Z_1=2-6i$ ,  $Z_2=3+4i$ . Найти:  $Z_1+Z_2$ ;  $Z_1-Z_2$ ;  $Z_1 \cdot Z_2$ ,  $Z_1:Z_2$ .



#### Вариант №8

1. Выполнить действия в алгебраической форме.

$Z_1=1+2i$ ,  $Z_2=-1-7i$ . Найти:  $Z_1+Z_2$ ;  $Z_1-Z_2$ ;  $Z_1:Z_2$ ,  $Z_1 \cdot Z_2$

#### Вариант №9

1. Выполнить действия в алгебраической форме.

$Z_1=2-4i$ ,  $Z_2=3+2i$ . Найти:  $Z_1+Z_2$ ;  $Z_1-Z_2$ ;  $Z_1Z \cdot 2$ ,  $Z_1:Z_2$  .

#### Вариант №10

1. Выполнить действия в алгебраической форме.

$Z_1=1-2i$ ,  $Z_2=-1-3i$ . Найти:  $Z_1+Z_2$ ;  $Z_1-Z_2$ ;  $Z_1:Z_2$ ,  $Z \cdot 1Z_2$

#### Вариант №11

1. Выполнить действия в алгебраической форме.

$Z_1=1+7i$ ,  $Z_2=2+2i$ . Найти:  $Z_1+Z_2$ ;  $Z_1-Z_2$ ;  $Z_1Z \cdot 2$ ,  $Z_1:Z_2$

#### Вариант №12

1. Выполнить действия в алгебраической форме.

$Z_1=3+i$ ,  $Z_2=-1-2i$ . Найти:  $Z_1+Z_2$ ;  $Z_1-Z_2$ ;  $Z_1:Z_2$ ,  $Z_1Z_2 \cdot$

#### Вариант №13

1. Выполнить действия в алгебраической форме.

$Z_1=1-4i$ ,  $Z_2=-2+5i$ . Найти:  $Z_1+Z_2$ ;  $Z_1-Z_2$ ;  $Z_1 \cdot Z_2$ ,  $Z_1:Z_2$ .

#### Вариант №14

1. Выполнить действия в алгебраической форме.

$Z_1=3+2i$ ,  $Z_2=-3+2i$ . Найти:  $Z_1+Z_2$ ;  $Z_1-Z_2$ ;  $Z_1:Z_2$ ,  $Z_1Z \cdot 2$

#### Вариант №15

1. Выполнить действия в алгебраической форме.

$Z_1=3-5i$ ,  $Z_2=2+4i$ . Найти:  $Z_1+Z_2$ ;  $Z_1-Z_2$ ;  $Z_1Z \cdot 2$ ,  $Z_1:Z_2$ .

#### Вариант №16

1. Выполнить действия в алгебраической форме.

$$Z_1 = -1 + 3i, \quad Z_2 = -5 - 3i. \text{Найти: } Z_1 + Z_2; \quad Z_1 - Z_2; \quad Z_1 : Z_2, \quad Z_1 Z_2$$

Вариант №17

1. Выполнить действия в алгебраической форме.

$$Z_1 = 2 - 6i, \quad Z_2 = 3 + 4i. \text{Найти: } Z_1 + Z_2; \quad Z_1 - Z_2; \quad Z_1 Z_2, \quad Z_1 : Z_2.$$

Вариант №18

1. Выполнить действия в алгебраической форме.

$$Z_1 = 1 + 2i, \quad Z_2 = -1 - 7i. \text{Найти: } Z_1 + Z_2; \quad Z_1 - Z_2; \quad Z_1 : Z_2, \quad Z_1 Z_2$$

Вариант №19

1. Выполнить действия в алгебраической форме.

$$Z_1 = 1 - 4i, \quad Z_2 = 3 + 4i. \text{Найти: } Z_1 + Z_2; \quad Z_1 - Z_2; \quad Z_1 Z_2, \quad Z_1 : Z_2.$$

Вариант №20

1. Выполнить действия в алгебраической форме.

$$Z_1 = -1 - 2i, \quad Z_2 = 2 - 3i. \text{Найти: } Z_1 + Z_2; \quad Z_1 - Z_2; \quad Z_1 : Z_2, \quad Z_1 Z_2$$

Вариант №21

1. Выполнить действия в алгебраической форме.

$$Z_1 = 2 - i, \quad Z_2 = 3 - 5i. \text{Найти: } Z_1 + Z_2; \quad Z_1 - Z_2; \quad Z_1 Z_2, \quad Z_1 : Z_2$$

Вариант №22

1. Выполнить действия в алгебраической форме.

$$Z_1 = 3 + 4i, \quad Z_2 = -1 + 2i. \text{Найти: } Z_1 + Z_2; \quad Z_1 - Z_2; \quad Z_1 : Z_2, \quad Z_1 Z_2$$

Вариант №23

1. Выполнить действия в алгебраической форме.

$$Z_1 = 3 - i, \quad Z_2 = 2 + 5i. \text{Найти: } Z_1 + Z_2; \quad Z_1 - Z_2; \quad Z_1 Z_2, \quad Z_1 : Z_2.$$

Вариант №24

1. Выполнить действия в алгебраической форме.

$Z_1=3+2i$ ,  $Z_2=-3+i$ . Найти:  $Z_1+Z_2$ ;  $Z_1-Z_2$ ;  $Z_1:Z_2$ ,  $Z_1Z_2$

Вариант №25

1. Выполнить действия в алгебраической форме.

$Z_1=2-3i$ ,  $Z_2=1+4i$ . Найти:  $Z_1+Z_2$ ;  $Z_1-Z_2$ ;  $Z_1 \cdot Z_2$ ,  $Z_1:Z_2$ .

Вариант №26

1. Выполнить действия в алгебраической форме.

$Z_1=1+2i$ ,  $Z_2=-2-2i$ . Найти:  $Z_1+Z_2$ ;  $Z_1-Z_2$ ;  $Z_1:Z_2$ ,  $Z_1Z_2$ .

Вариант №27

1. Выполнить действия в алгебраической форме.

$Z_1=2-5i$ ,  $Z_2=2+4i$ . Найти:  $Z_1+Z_2$ ;  $Z_1-Z_2$ ;  $Z_1Z_2$ ,  $Z_1:Z_2$ .

Вариант №28

1. Выполнить действия в алгебраической форме.

$Z_1=1+2i$ ,  $Z_2=-1-4i$ . Найти:  $Z_1+Z_2$ ;  $Z_1-Z_2$ ;  $Z_1:Z_2$ ,  $Z_1 \cdot Z_2$

Вариант №29

1. Выполнить действия в алгебраической форме.

$Z_1=2-4i$ ,  $Z_2=-3+5i$ . Найти:  $Z_1+Z_2$ ;  $Z_1-Z_2$ ;  $Z_1Z_2$ ,  $Z_1:Z_2$

Вариант №30

1. Выполнить действия в алгебраической форме.

$Z_1=3+i$ ,  $Z_2=-3-2i$ . Найти:  $Z_1-Z_2$ ;  $Z_1+Z_2$ ;  $Z_1:Z_2$ ,  $Z_1 \cdot Z_2$

### Контрольные вопросы:

1. Что называется мнимой единицей?
2. Свойство мнимой единицы.
2. Правило возведения мнимой единицы в натуральную степень  $n$ .
3. Дать определение комплексного числа?
4. Действия с комплексными числами в алгебраической форме.

**Практическая работа № 29 по теме**  
**«Действия над комплексными числами в тригонометрической и**  
**показательной формах»**

**Цель:** научить выполнять действия с комплексными числами в

тригонометрической и показательной формах

**Задание.** Выполнить действия с

1)  $Z_1 + Z_2$ ;  $Z_1 - Z_2$ ;  $Z_1 \cdot Z_2$ ,

$Z_1 : Z_2$

1.  $z_1 = 8(\cos 55^\circ + \sin 55^\circ)$ ,  $z_2 = 2(\cos 5^\circ + \sin 5^\circ)$ ,
2.  $z_1 = 5(\cos 48^\circ + \sin 48^\circ)$ ,  $z_2 = 2(\cos 12^\circ + \sin 12^\circ)$ ,
3.  $z_1 = 3(\cos 70^\circ + \sin 70^\circ)$ ,  $z_2 = 2(\cos 20^\circ + \sin 20^\circ)$ ,
4.  $z_1 = 10(\cos 105^\circ + \sin 105^\circ)$ ,  $z_2 = 2(\cos 15^\circ + \sin 15^\circ)$ ,
5.  $z_1 = 12(\cos 145^\circ + \sin 145^\circ)$ ,  $z_2 = 2(\cos 5^\circ + \sin 5^\circ)$ ,
6.  $z_1 = 7(\cos 255^\circ + \sin 255^\circ)$ ,  $z_2 = 2(\cos 15^\circ + \sin 15^\circ)$ ,
7.  $z_1 = 9(\cos 168^\circ + \sin 168^\circ)$ ,  $z_2 = 2(\cos 12^\circ + \sin 12^\circ)$ ,
8.  $z_1 = 6(\cos 40^\circ + \sin 40^\circ)$ ,  $z_2 = 2(\cos 20^\circ + \sin 20^\circ)$ ,
9.  $z_1 = 3(\cos 40^\circ + \sin 40^\circ)$ ,  $z_2 = 2(\cos 5^\circ + \sin 5^\circ)$ ,
10.  $z_1 = 10(\cos 75^\circ + \sin 75^\circ)$ ,  $z_2 = 2(\cos 15^\circ + \sin 15^\circ)$ ,
11.  $z_1 = 9(\cos 123^\circ + \sin 123^\circ)$ ,  $z_2 = 2(\cos 12^\circ + \sin 12^\circ)$ ,
12.  $z_1 = 5(\cos 160^\circ + \sin 160^\circ)$ ,  $z_2 = 2(\cos 20^\circ + \sin 20^\circ)$ ,
13.  $z_1 = 3(\cos 235^\circ + \sin 235^\circ)$ ,  $z_2 = 2(\cos 5^\circ + \sin 5^\circ)$ ,
14.  $z_1 = 4(\cos 30^\circ + \sin 30^\circ)$ ,  $z_2 = 2(\cos 15^\circ + \sin 15^\circ)$ ,
15.  $z_1 = 2(\cos 258^\circ + \sin 258^\circ)$ ,  $z_2 = 2(\cos 12^\circ + \sin 12^\circ)$ ,
16.  $z_1 = 7(\cos 115^\circ + \sin 115^\circ)$ ,  $z_2 = 2(\cos 20^\circ + \sin 20^\circ)$ ,
17.  $z_1 = 14(\cos 310^\circ + \sin 310^\circ)$ ,  $z_2 = 2(\cos 5^\circ + \sin 5^\circ)$ ,
18.  $z_1 = 8(\cos 45^\circ + \sin 45^\circ)$ ,  $z_2 = 2(\cos 15^\circ + \sin 15^\circ)$ ,
19.  $z_1 = 6(\cos 213^\circ + \sin 213^\circ)$ ,  $z_2 = 2(\cos 12^\circ + \sin 12^\circ)$ ,
20.  $z_1 = 9(\cos 70^\circ + \sin 70^\circ)$ ,  $z_2 = 2(\cos 20^\circ + \sin 20^\circ)$ ,
21.  $z_1 = 4(\cos 40^\circ + \sin 40^\circ)$ ,  $z_2 = 2(\cos 5^\circ + \sin 5^\circ)$ ,
22.  $z_1 = 6(\cos 300^\circ + \sin 300^\circ)$ ,  $z_2 = 2(\cos 15^\circ + \sin 15^\circ)$ ,
23.  $z_1 = 3(\cos 33^\circ + \sin 33^\circ)$ ,  $z_2 = 2(\cos 12^\circ + \sin 12^\circ)$ ,
24.  $z_1 = 5(\cos 250^\circ + \sin 250^\circ)$ ,  $z_2 = 2(\cos 20^\circ + \sin 20^\circ)$ ,
25.  $z_1 = 8(\cos 85^\circ + \sin 85^\circ)$ ,  $z_2 = 2(\cos 5^\circ + \sin 5^\circ)$ ,
26.  $z_1 = 10(\cos 165^\circ + \sin 165^\circ)$ ,  $z_2 = 2(\cos 15^\circ + \sin 15^\circ)$ ,
27.  $z_1 = 9(\cos 48^\circ + \sin 48^\circ)$ ,  $z_2 = 2(\cos 12^\circ + \sin 12^\circ)$ ,
28.  $z_1 = 5(\cos 100^\circ + \sin 100^\circ)$ ,  $z_2 = 2(\cos 20^\circ + \sin 20^\circ)$ ,
29.  $z_1 = 4(\cos 175^\circ + \sin 175^\circ)$ ,  $z_2 = 2(\cos 5^\circ + \sin 5^\circ)$ ,
30.  $z_1 = 16(\cos 120^\circ + \sin 120^\circ)$ ,  $z_2 = 2(\cos 15^\circ + \sin 15^\circ)$ ,

Контрольные вопросы

**Практическая работа № 30 по теме**

## «Решение уравнений на множестве комплексных чисел»

**Цель:** научить решать уравнения на множестве комплексных чисел

Задача 1

Решить квадратное уравнение:

I.  $x^2 - 2x + 17 = 0$

2.  $2x^2 + 2x + 1 = 0$

3.  $4x^2 - 4x + 17 = 0$

4.  $x^2 + 6x + 25 = 0$

5.  $4x^2 - 20x + 29 = 0$

6.  $9x^2 - 6x + 2 = 0$

7.  $x^2 - 4x + 29 = 0$

8.  $2x^2 - 2x + 5 = 0$

9.  $4x^2 + 4x + 5 = 0$

10.  $x^2 - 4x + 13 = 0$

II.  $9x^2 - 6x + 17 = 0$

12.  $4x^2 - 12x + 25 = 0$

13.  $x^2 + 4x + 5 = 0$

14.  $2x^2 - 10x + 17 = 0$

15.  $x^2 - 6x + 13 = 0$

16.  $x^2 + 6x + 18 = 0$

17.  $x^2 - 4x + 40 = 0$

18.  $4x^2 - 12x + 13 = 0$

19.  $2x^2 + 6x + 5 = 0$

20.  $x^2 - 2x + 5 = 0$

21.  $9x^2 - 6x + 10 = 0$

22.  $2x^2 + 6x + 5 = 0$

23.  $x^2 + 6x + 13 = 0$

24.  $2x^2 - 6x + 17 = 0$

25.  $9x^2 - 6x + 2 = 0$

26.  $x^2 - 6x + 10 = 0$

27.  $x^2 + 2x + 26 = 0$

28.  $2x^2 + 6x + 9 = 0$

29.  $2x^2 + 10x + 13 = 0$

30.  $x^2 - 6x + 34 = 0$

### Самостоятельная работа

#### ВАРИАНТ 1

1. Даны комплексные числа:  $z_1=2-3i$ ,  $z_2=2i+3$ ,  $z_3=3-2i$ .

Вычислите: а)  $z_1 + z_2$ ; б)  $z_1 + z_3$ ; в)  $z_1 - z_2$ ; г)  $z_2 - z_3$ ; д)  $z_1 \cdot z_2$ ; е)  $z_3 \cdot z_2$ .

2. Вычислите:  $(2 - i)(2 + i) - (3 - 2i) + 7$ .

3. Найти частное комплексных чисел: а)  $\frac{1}{i}$ ; б)  $\frac{1}{2+i}$ ; в)  $\frac{3-i}{2+2i}$ .

4. Изобразить на координатной плоскости и представить следующие комплексные числа в тригонометрической форме:

а)  $-3$ ; б)  $-i$ ; в)  $1 + i$ ; г)  $-1 + i\sqrt{3}$ .

5. Найти координаты точки  $M$ , изображающей комплексное число:

$$z = \frac{5+i}{2-i} + i + \frac{-2+i}{3-2i}.$$

6. Решите уравнения в комплексных числах:

а)  $x^2 - 4x + 8 = 0$ ; б)  $x^2 + ix + 6 = 0$ .

#### ВАРИАНТ 2

1. Даны комплексные числа:  $z_1 = 2 + i$ ,  $z_2 = 3i + 1$ ,  $z_3 = -2 - i$ .

Вычислите: а)  $z_1 + z_2$ ; б)  $z_1 + z_3$ ; в)  $z_1 - z_2$ ; г)  $z_2 - z_3$ ; д)  $z_1 \cdot z_2$ ; е)  $z_3 \cdot z_2$ .

2. Вычислите:  $(3 + i)(3 - i) - (6 + 2i) + 7$ .

3. Найти частное комплексных чисел: а)  $\frac{1}{i}$ ; б)  $\frac{1}{1-i}$ ; в)  $\frac{3+i}{2-2i}$ .

4. Изобразить на координатной плоскости и представить следующие комплексные числа в тригонометрической форме:

а)  $-4$ ; б)  $i$ ; в)  $1-i$ ; г)  $-\sqrt{3} + i$ .

5. Найти координаты точки  $M$ , изображающей комплексное число:

$$z = \frac{2-3i}{2i+1} - i + \frac{6i-4}{i+2}.$$

6. Решите уравнения в комплексных числах:

а)  $x^2 - 8x + 17 = 0$ ; б)  $x^2 + ix + 20 = 0$ .

### Тест по теме «Комплексные числа»

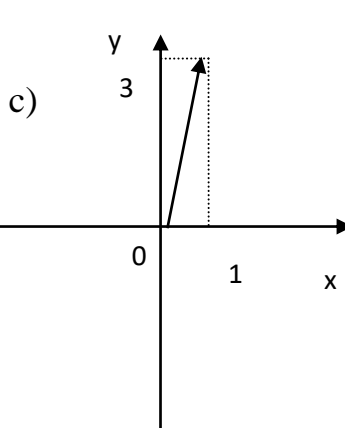
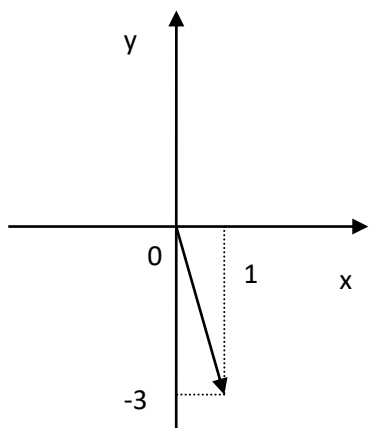
#### Вариант I

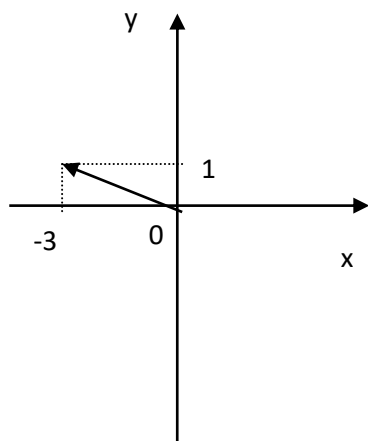
**A1.** Даны комплексные числа  $z_1 = 2+3i$ ,  $z_2 = 3-i$ . Тогда  $z_1 \cdot z_2$

- а)  $9+7i$
- б)  $6-7i$
- в)  $2-3i$
- г)  $4+6i$

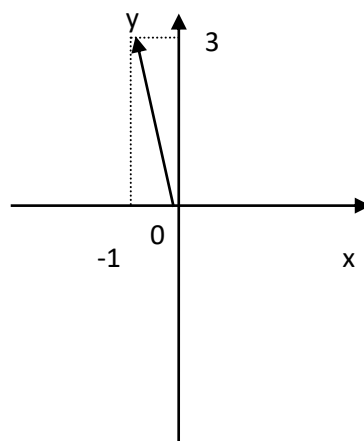
**A2.** Изображение комплексного числа  $z = 1-3i$  имеет вид

а)





b)



d)

**A3.** Если  $z = 4 + i$ , то сопряженное ему число  $\bar{z}$  равно

- a)  $1 + 4i$
- b)  $5 + i$
- c)  $4 - i$
- d)  $1 - 4i$

**A4.** Если  $z_1 = 1 + 3i, z_2 = 2 - 3i$ , то  $z_1 + z_2$

- a)  $2 + 3i$
- b)  $3 - i$
- c)  $3$
- d)  $3 + 6i$

**A5.** Дано комплексное число  $z = 4 - 3i$ , то его модуль равен

- a)  $8$
- b)  $16$
- c)  $-5$
- d)  $5$

**A6.** Модуль комплексного числа  $r=2$ , а аргумент  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ . Тогда в тригонометрической форме комплексное число имеет вид

- a)  $2(\cos \frac{\pi}{4} - i \cdot \sin \frac{\pi}{4})$
- b)  $2(\sin \frac{\pi}{4} - i \cdot \cos \frac{\pi}{4})$
- c)  $2(\cos \frac{\pi}{4} + i \cdot \sin \frac{\pi}{4})$
- d)  $2(\sin \frac{\pi}{4} + i \cdot \cos \frac{\pi}{4})$

**B1.** Даны комплексные числа  $z_1 = 1 + 6i, z_2 = 3 + 3i$ . Найдите  $\frac{z_1}{z_2}$

**C1.** Решите уравнение  $x^2 - 6x + 25 = 0$

**C2.** Вычислите  $\frac{5 \cdot Z_1 + 4Z_2}{3Z_1}$ , если  $z_1 = 5 - 2i; z_2 = 2 - 6i$

## Вариант II

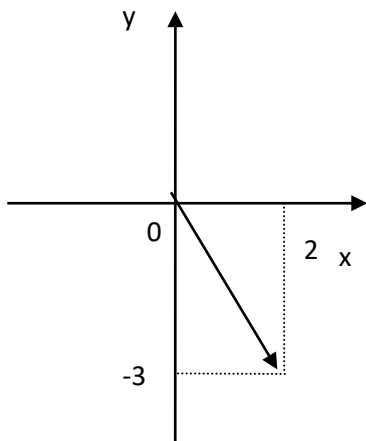
**При выполнении заданий A1 - A8 необходимо проставить номер варианта ответа, который соответствует номеру выбранного Вами ответа**

**A1.** Даны комплексные числа  $z_1 = 1 + 5i, z_2 = 3 - 4i$ . Тогда  $z_1 \cdot z_2$

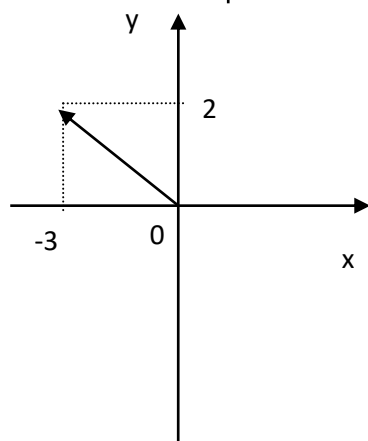
- a)  $15 + 8i$
- b)  $23 + 11i$
- c)  $23 - 3i$
- d)  $20 + 6i$

**A2.** Изображение комплексного числа  $z = 2 + 3i$  имеет вид

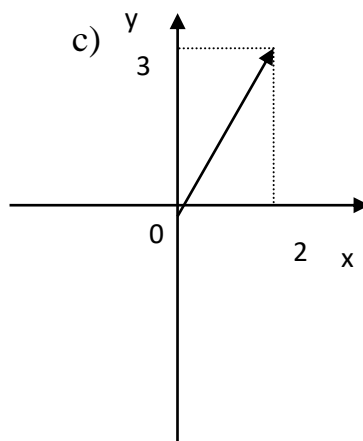
a)



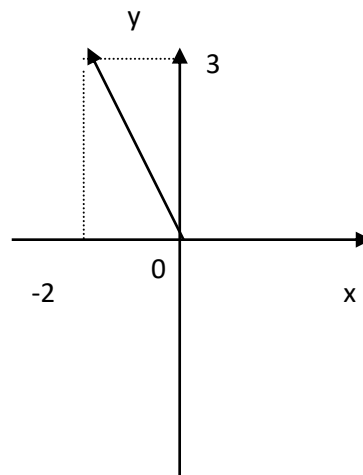
в)



с)



д)





**A3.** Если  $z = 2 + 3i$ , то сопряженное ему число  $\bar{z}$  равно

- a)  $2 - 3i$
- b)  $3 + 2i$
- c)  $3 - 2i$
- d)  $4 + 6i$

**A4.** Если  $z_1 = 3 + i, z_2 = 4 + 2i$ , то  $z_1 + z_2$

- a)  $7 + 3i$
- b)  $4 + 6i$
- c)  $7 - 3i$
- d)  $4 - 6i$

**A5.** Дано комплексное число  $z = 12 + 5i$ , то его модуль равен

- a) 2
- b) 5
- c)  $\sqrt{12}$
- d) 13

**A6.** Модуль комплексного числа  $r=3$ , а аргумент  $\varphi = \frac{\pi}{3}$ . Тогда в тригонометрической форме комплексное число имеет вид

- a)  $3(\cos \frac{\pi}{3} - i \cdot \sin \frac{\pi}{3})$
- b)  $3(\sin \frac{\pi}{3} + i \cdot \cos \frac{\pi}{3})$
- c)  $3(\cos \frac{\pi}{3} + i \cdot \sin \frac{\pi}{3})$
- d)  $3(\sin \frac{\pi}{3} - i \cdot \cos \frac{\pi}{3})$

**B1.** Даны комплексные числа  $z_1 = 2 - 4i, z_2 = 3 + 6i$ . Найдите  $\frac{z_1}{z_2}$

**C1.** Решите уравнение  $x^2 - 4x + 29 = 0$

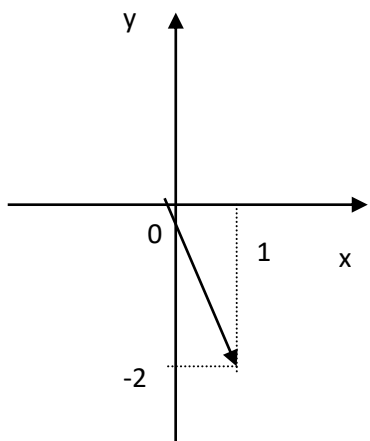
**C2.** Вычислите  $\frac{5 \cdot Z_1 + 4Z_2}{3Z_1}$ , если  $z_1 = 4 + i; z_2 = 2 + 3i$

**A1.** Даны комплексные числа  $z_1 = 2+4i, z_2 = 1+3i$ . Тогда  $z_1 \cdot z_2$

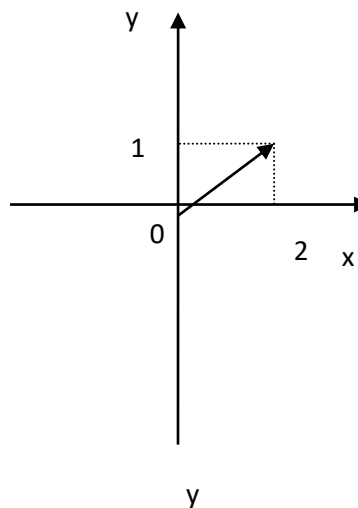
- a)  $8+6i$
- b)  $-10+10i$
- c)  $4-3i$
- d)  $-2+8i$

**A2.** Изображение комплексного числа  $z = -2+i$  имеет вид

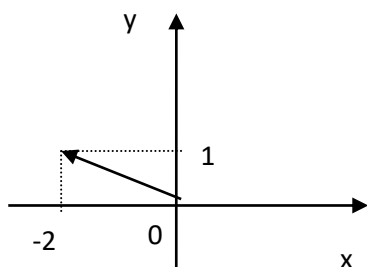
a)



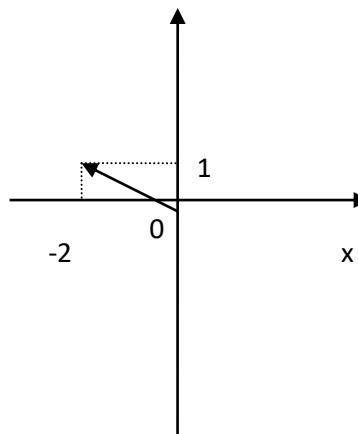
c)



b)



d)



**A3.** Если  $z = 3+5i$ , то сопряженное ему число  $\bar{z}$  равно

- a)  $-3+5i$
- b)  $3-5i$
- c)  $5-3i$
- d)  $-5+3i$

**A4.** Если  $z_1 = 3-5i, z_2 = 4+2i$ , то  $z_1 + z_2$

- a)  $7-i$
- b)  $5+3i$
- c)  $5-2i$
- d)  $7-3i$

**A5.** Дано комплексное число  $z = 2+3i$ , то его модуль равен

- a) 4
- b)  $\sqrt{13}$
- c) 5
- d) 9
- a) ;

**A6.** Модуль комплексного числа  $r=4$ , а аргумент  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ . Тогда в тригонометрической форме комплексное число имеет вид

- a)  $4(\cos \frac{\pi}{2} + i \cdot \sin \frac{\pi}{2})$
- b)  $4(\sin \frac{\pi}{2} + i \cdot \cos \frac{\pi}{2})$
- c)  $4(\sin \frac{\pi}{2} - i \cdot \cos \frac{\pi}{2})$
- d)  $4(\cos \frac{\pi}{2} - i \cdot \sin \frac{\pi}{2})$

**B2.** Даны комплексные числа  $z_1 = 2 - 3i, z_2 = 4 + i$ . Найдите  $\frac{z_1}{z_2}$

**C1.** Решите уравнение  $x^2 - 4x + 13 = 0$

**C2.** Вычислите  $\frac{5 \cdot Z_1 + 4Z_2}{3Z_1}$ , если  $z_1 = 3 + 5i; z_2 = 6 - 2i$

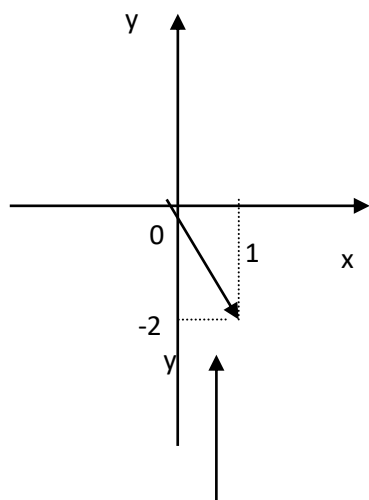
### Вариант IV

**A1.** Даны комплексные числа  $z_1 = 1 + 2i, z_2 = 3 - 4i$ . Тогда  $z_1 \cdot z_2$

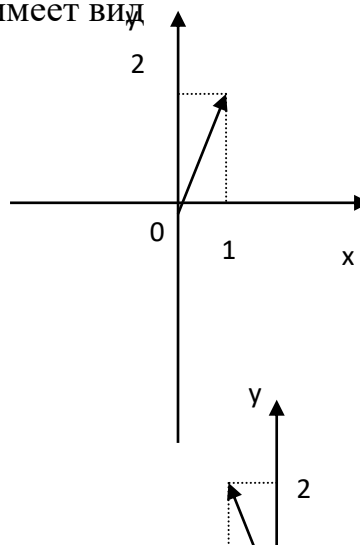
- a)  $3 + 6i$
- b)  $3 - 8i$
- c)  $11 + 2i$
- d)  $4 - 2i$

**A2.** Изображение комплексного числа  $z = 1 - 2i$  имеет вид

a)



c)



b)

d)

**A3.** Если  $z = 5 - 2i$ , то сопряженное ему число  $\bar{z}$  равно

- a)  $5 + 2i$
- b)  $2 - 5i$
- c)  $2 - 5i$
- d)  $1 + 6i$

**A4.** Если  $z_1 = 2 - 3i, z_2 = 4 + 5i$ , то  $z_1 + z_2$

- a)  $4 + 6i$
- b)  $6 + 2i$
- c)  $4 - 3i$
- d)  $6 - 2i$

**A5.** Дано комплексное число  $z = 4 + 2\sqrt{5}i$ , то его модуль равен

- a) 10
- b) 8
- c) 6
- d) -6

**A6.** Модуль комплексного числа  $r=4$ , а аргумент  $\varphi = \frac{\pi}{8}$ . Тогда в тригонометрической форме комплексное число имеет вид

- a)  $4(\sin \frac{\pi}{8} - i \cdot \cos \frac{\pi}{8})$
- b)  $4(\cos \frac{\pi}{8} + i \cdot \sin \frac{\pi}{8})$
- c)  $4(\cos \frac{\pi}{8} - i \cdot \sin \frac{\pi}{8})$
- d)  $4(\sin \frac{\pi}{8} + i \cdot \cos \frac{\pi}{8})$

**B2.** Даны комплексные числа  $z_1 = 3 - i, z_2 = 4 + 3i$ . Найдите  $\frac{z_1}{z_2}$

**C1.** Решите уравнение  $2,5x^2 + x + 1 = 0$

**C2.** Вычислите  $\frac{5 \cdot Z_1 + 4Z_2}{3Z_1}$ , если  $z_1 = 1 + 2i$ ;  $z_2 = 3 - 4i$

## **Лекция № 1. Матрицы. Действия с матрицами.**

## 1.1 Основные понятия.

*Матрицей* называется прямоугольная таблица чисел, содержащая  $m$  строк одинаковой длины (или  $n$  столбцов одинаковой длины). Матрица записывается в виде:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

или, сокращённо,  $A = (a_{ij})$ , где  $i = 1, m$  (т.е.  $i = 1, 2, 3, \dots, m$ ) – номер строки,  $j = 1, n$  (т.е.  $j = 1, 2, 3, \dots, n$ ) – номер столбца.

Матрица  $A$  называют матрицей *размера*  $m \times n$  и пишут  $A_{m \times n}$ . Числа  $a_{ij}$ , составляющие матрицу называются её *элементами*. Элементы, стоящие на диагонали, идущей из верхнего левого угла, образуют *главную диагональ*.

Матрицы *равны между собой*, если равны все соответствующие элементы этих матриц, т.е.  $A = B$ , если  $a_{ij} = b_{ij}$ , где  $i = 1, m$ ,  $j = 1, n$ .

Матрица, у которой число строк равно числу столбцов, называется *квадратной*. Квадратную матрицу размера  $n \times n$  называют матрицей  $n$ -го *порядка*.

Квадратная матрица, у которой все элементы, кроме элементов главной диагонали, равны нулю, называется *диагональной*.

Диагональная матрица, у которой каждый элемент главной диагонали равен единице, называется *единичной*. Обозначается буквой  $E$ .

### Пример 1.1

$$E_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ единичная матрица 3-го порядка.}$$

Квадратная матрица называется *треугольной*, если все элементы, расположенные по одну сторону от главной диагонали, равны нулю.

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой*. Обозначается буквой  $O$ . Имеет вид:

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

В матричном исчислении матрицы  $O$  и  $E$  играют роль чисел 0 и 1 в арифметике.

Матрица, содержащая один столбец или одну строку, называется *вектором* (или вектор-столбец, или вектор-строка соответственно). Их вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_m \end{pmatrix} B = (b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_n)$$

Матрица размера 1 x 1, состоящая из одного числа, отождествляется с этим числом, т.е.  $(5)_{1 \times 1}$  есть 5.

Матрица, полученная из данной заменой каждой её строки столбцом с тем же номером, называется матрицей **транспонированной** к данной. Обозначается  $A^T$ .

$$\text{Так если } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \text{ то } A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \text{ если } A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ то } A^T = (1 \quad 0)$$

Транспонированная матрица обладает следующим свойством:  $(A^T)^T = A$ .

## 1.2. Действия над матрицами.

### Сложение:

Операция сложения матриц вводится только для матриц одинаковых размеров.

Суммой двух матриц  $A_{m \times n} = (a_{ij})$  и  $B_{m \times n} = (b_{ij})$  называется матрица  $C_{m \times n} = (c_{ij})$  такая, что  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$  ( $i = 1, m, j = 1, n$ ). Записывают  $C = A + B$ .

$$\text{Пример 1.2. } \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Аналогично определяется *разность матриц*.

### Умножение на число:

Произведением матрицы  $A_{m \times n} = (a_{ij})$  на число  $k$  называется матрица  $B_{m \times n} = (b_{ij})$  такая, что  $b_{ij} = k * a_{ij}$  ( $i = 1, m, j = 1, n$ ). Записывают  $B = k * A$ .

$$\text{Пример 1.3. } A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, k = 2, A * k = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 6 & 8 & 10 \end{pmatrix}$$

Матрица  $-A = (-1) * A$  называется *противоположной* матрице  $A$ .

Разность матриц  $A - B$  можно определить так:  $A - B = A + (-B)$ .

Операции сложения матриц и умножения матрицы на число обладают следующими *свойствами*:

- |                                  |                                                  |
|----------------------------------|--------------------------------------------------|
| 1. $A + B = B + A$ ;             | 5. $1 * A = A$ ;                                 |
| 2. $A + (B + C) = (A + B) + C$ ; | 6. $\alpha * (A + B) = \alpha A + \alpha B$ ;    |
| 3. $A + O = A$ ;                 | 7. $(\alpha + \beta) * A = \alpha A + \beta B$ ; |
| 4. $A - A = O$ ;                 | 8. $\alpha * (\beta A) = (\alpha \beta) * A$ ,   |

Где  $A, B, C$  – матрицы,  $\alpha$  и  $\beta$  – числа.



## Элементарные преобразования матриц:

Элементарными преобразованиями матриц являются:

- Перестановка местами двух параллельных рядов матрицы;
- Умножение всех элементов ряда матрицы на число, отличное от нуля;
- Прибавление ко всем элементам ряда матрицы соответствующих элементов параллельного ряда, умноженных на одно и то же число.

Две матрицы А и В называются эквивалентными, если одна из них получается из другой с помощью элементарных преобразований. Записывается  $A \sim B$ .

При помощи элементарных преобразований любую матрицу можно привести к матрице, у которой в начале главной диагонали стоят подряд несколько единиц, а все остальные элементы равны нулю. Такую матрицу называют *канонической*, например

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Пример 1.4.** Привести к каноническому виду матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение: Выполняя элементарные преобразования, получаем

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & -15 & -6 & -9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & -15 & -6 & -9 \end{pmatrix} \sim$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

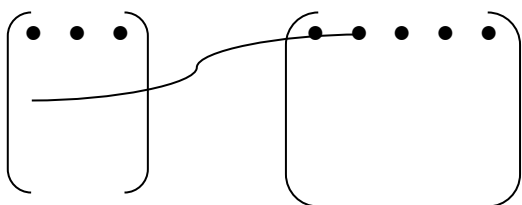
## Произведение матриц:

Операция умножения двух матриц вводится только для случая, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы.

Произведением матрицы  $A_{m \times n} = (a_{ij})$  на матрицу  $B_{n \times p} = (b_{jk})$  называется матрица  $C_{m \times p} = (c_{ik})$  такая, что  $c_{ik} = a_{i1} * b_{1k} + a_{i2} * b_{2k} + \dots + a_{in} b_{nk}$ , где  $i = 1, m, k = 1, p$ ,

Т.е элемент  $i$ -й строки и  $k$ -го столбца матрицы произведения  $C$  равен сумме произведений элементов  $i$ -й строки матрицы  $A$  на соответствующие элементы  $k$ -го столбца матрицы  $B$ .

Получение элемента  $c_{ij}$  схематично изображается так





Если матрицы  $A$  и  $B$  квадратные одного размера, то произведения  $AB$  и  $BA$  всегда существуют. Легко показать, что  $A * E = E * A = A$ , где  $A$  – квадратная матрица,  $E$  – единичная матрица того же размера.

### Пример 1.5

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{pmatrix}$$

**Пример 1.6.**  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ . Тогда произведение  $A * B$  не определено, так как число столбцов матрицы  $A(3)$  не совпадает с числом строк матрицы  $B(2)$ . При этом определено произведение  $B \times A$ , которое считают следующим образом:

$$B * A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+9 & 2+3 & 1+0 \\ 1+6 & 2+2 & 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 1 \\ 7 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Матрицы  $A$  и  $B$  называются перестановочными, если  $AB = BA$ .

Умножение матриц обладает следующими свойствами:

1.  $A * (B * C) = (A * B) * C$ ;
2.  $A * (B + C) = AB + AC$ ;
3.  $(A + B) * C = AC + BC$ ;
4.  $\alpha(AB) = (\alpha A)B$ ,

Если, конечно, написанные суммы и произведения матриц имеют смысл.

Для операции транспонирования верны свойства:

1.  $(A + B)^T = A^T + B^T$ ;
2.  $(AB)^T = B^T * A^T$ .

## ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Что называется матрицей?
2. Какие матрицы называются равными?
3. Какая матрица называется единичной?
4. Какая матрица называется транспонированной к данной?
5. Какие действия можно выполнять над матрицами?
6. Перечислите элементарные преобразования матриц.
7. Всегда ли выполнимо действие умножения двух матриц?
8. Перечислите свойства, которыми обладает умножение матриц.

## Лекция № 2. Определители.

### 2.1. Основные понятия.

Квадратной матрице  $A$  порядка  $n$  можно сопоставить число  $\det A$  (или  $|A|$ , или  $\Delta$ ), называемое ее определителем, следующим образом:

$$1. \quad n = 1, A = (a_1); \det A = a_1.$$

$$2. \quad n = 2, A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}; \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} * a_{22} - a_{12} a_{21}$$

$$3. \quad n = 3, A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}; \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + \\ + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}$$

Определитель матрицы  $A$  также называют ее детерминантом. Правило вычисления детерминанта для матрицы порядка  $N$  является довольно сложным для восприятия и применения. Однако известны методы, позволяющие реализовать вычисление определителей высоких порядков на основе определителей низших порядков. Один из методов основан на свойстве разложения определителя по элементам некоторого ряда. При этом заметим, что определители невысоких порядков(1,2,3) желательно уметь вычислять согласно определению.

Вычисление определителя 2-го порядка иллюстрируется схемой:

$$\begin{vmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{vmatrix}$$

**Пример 2.1.** Найти определители матриц  $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$

Решение:  $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 2 * 6 - 5 * (-3) = 12 - (-15) = 27$

$$\begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix} = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

При вычислении определителя 3-го порядка удобно пользоваться правилом треугольников (или Саррюса), которое символически можно записать так:

$$\begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{vmatrix}$$

**Пример 2.2.** Вычислить определитель матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Решение:

$$\det A = 5 * 1 * (-3) + (-2) * (-4) * 6 + 3 * 0 * 1 - 6 * 1 * 1 - 3 * (-2) * (-3) - 0 * (-4) * 5 = -15 + + 48 - 6 - 18 = 48 - 39 = 9.$$

## 2.2. Свойства определителей.

Сформулируем основные свойства определителей, присущие определителем всех порядков, некоторые из этих свойств поясним на определителях 3-го порядка.

*Свойство 1* («Равноправность строк и столбцов»). Определитель не изменится, если его строки заменить столбцами, и наоборот.

Иными словами, 
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

В дальнейшем строки и столбцы будем просто называть рядами определителя.

*Свойство 2.* При перестановке двух параллельных рядов определитель меняет знак.

*Свойство 3.* Определитель, имеющий два одинаковых ряда, равен нулю.

*Свойство 4.* Общий множитель элементов какого-либо ряда определителя можно вынести за знак определителя.

Из свойств 3 и 4 следует, что если все элементы некоторого ряда пропорциональны соответствующим элементам параллельного ряда, то такой определитель равен нулю.

Действительно, 
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ k * a_{11} & k * a_{12} & k * a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k * \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k * 0 = 0$$

*Свойство 5.* Если элементы какого-либо ряда определителя представляют собой суммы двух слагаемых, то определитель может быть разложен на сумму двух соответствующих определителей.

Например, 
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} + b \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} + c \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} + d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b \\ a_{21} & a_{22} & c \\ a_{31} & a_{32} & d \end{vmatrix}$$

*Свойство 6* («Элементарные преобразования определителя»). Определитель не изменится, если к элементам одного ряда прибавить соответствующие элементы параллельного ряда умноженные на любое число.

*Пример 2.3.* Доказать, что 
$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} + k * a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} + k * a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} + k * a_{32} \end{vmatrix}$$

Решение: Действительно, используя свойства 5, 4 и 3, получим

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & k * a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & k * a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & k * a_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + k * \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{32} \end{vmatrix} = \Delta + k * 0 = \Delta$$

Дальнейшие свойства определителей связаны с понятиями минора и алгебраического дополнения.

**Минором** некоторого элемента  $a_{ij}$  определителя  $n$ -го порядка называется определитель  $n - 1$ -го порядка, полученный из исходного путём вычёркивания строки и столбца, на пересечении которых находится выбранный элемент. Обозначается  $m_{ij}$ .

$$\text{Так если } \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \text{ то } m_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad m_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

**Алгебраическим дополнением** элемента  $a_{ij}$  определителя называется его минор, взятый со знаком «плюс», если сумма  $i + j$  – чётное число, и со знаком «минус», если эта сумма нечётная. Обозначается  $A_{ij}$ :  $A_{ij} = (-1)^{i+j} * m_{ij}$ .

Так,  $A_{11} = +m_{11}$ ,  $A_{32} = -m_{32}$ .

**Свойство 7** («Разложение определителя по элементам некоторого ряда»). Определитель равен сумме произведений элементов некоторого ряда на соответствующие им алгебраические дополнения.

Проиллюстрируем и одновременно докажем свойство 7 на примере определителя 3-его порядка. В этом случае свойство 7 означает, что

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} * A_{11} + a_{12} * A_{12} + a_{13} * A_{13}$$

В самом деле, имеем

$$\begin{aligned} a_{11} * A_{11} + a_{12} * A_{12} + a_{13} * A_{13} &= a_{11} * \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} * \left( - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \right) + a_{13} * \\ &* \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) = \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} = \Delta \end{aligned}$$

Свойство 7 содержит в себе способ вычисления определителей высоких порядков.

**Пример 2.4.** Вычислите определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 & 8 \\ -1 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

Решение: Для разложения определителя обычно выбирают тот ряд, где есть нулевые элементы, т.к. соответствующие им слагаемые в разложении будут равны нулю.

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 8 \\ -1 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 3 * \begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 5 & 3 & 2 \\ -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} + 1 * \begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 5 & 3 & 2 \\ -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} + 0 * \begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 7 & 0 & 1 \\ -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} - 1 * \begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 7 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= 3 * (7 * 3 * 4 + (-1) * 0 * 2 + 5 * 7 * 1 - (-1) * 3 * 1 - 7 * 7 * 2 - 5 * 0 * 4) + (5 \\
&\quad * 3 * 4 + (-1) * 7 * 2 + 5 * 7 * 8 - (-1) * 3 * 8 - 5 * 7 * 4 - 5 * 7 \\
&\quad * 2) - (5 * 0 * 2 + 7 * 1 * 5 + 7 * 3 * 8 - 5 * 0 * 8 - 3 * 1 * 5 - 7 * 7 \\
&\quad * 2) = 122
\end{aligned}$$

*Свойство 8.* Сумма произведений элементов какого-либо ряда определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов параллельного ряда равна нулю.

Так, например,  $a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = 0$

## ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Сформулируйте правило вычисления определителя второго порядка.
2. Сформулируйте правила вычисления определителя третьего порядка.
3. Перечислите свойства определителей.
4. Дайте определение минора некоторого элемента определителя.
5. Дайте определение алгебраического дополнения элемента определителя.

## Лекция № 3. Нахождение обратной матрицы.

### Основные понятия.

Пусть  $A$  – квадратная матрица  $n$ -го порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Квадратная матрица  $A$  называется **невыврожденной**, если определитель  $\Delta = \det A$  не равен нулю:  $\Delta = \det A \neq 0$ . В противном случае ( $\Delta = 0$ ) матрица  $A$  называется **вырожденной**.

Матрицей, **союзной к матрице**  $A$ , называется матрица

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

где  $A_{ij}$  – алгебраическое дополнение элемента  $a_{ij}$  данной матрицы  $A$  (оно определяется так же, как и алгебраическое дополнение элемента определителя).

Матрица  $A^{-1}$  называется **обратной** матрице  $A$ , если выполняется условие

$$A * A^{-1} = A^{-1} * A = E,$$

где  $E$  – единичная матрица того же порядка, что и матрица  $A$ . Матрица  $A^{-1}$  имеет те же размеры, что и матрица  $A$ .

### Обратная матрица.

**Теорема 3.1.** *Всякая невырожденная матрица имеет обратную.*

Проведём доказательство для случая матрицы 3-го порядка. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \text{ причем } \det A \neq 0$$

Составим союзную матрицу

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

и найдём произведение матриц  $A$  и  $A^*$ :

$$\begin{aligned}
A * A^* &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} & \dots & a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33} \\ a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13} & \dots & a_{21}A_{31} + a_{22}A_{32} + a_{23}A_{33} \\ a_{31}A_{11} + a_{32}A_{12} + a_{33}A_{13} & \dots & a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \det A & 0 & 0 \\ 0 & \det A & 0 \\ 0 & 0 & \det A \end{pmatrix} = \det A * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \det A * E, \text{ т. е. } A * A^* = \det A * E
\end{aligned}$$

Здесь мы использовали свойства 7 и 8 определителей.

Аналогично убеждаемся, что

$$A^* * A = \det A * E.$$

Равенства (3.2) и (3.3) перепишем в виде

$$A * (A^* / \det A) = E \quad \text{и} \quad (A^* / \det A) * A = E.$$

Сравнивая полученные результаты с определением (3.1), получаем

$$A^{-1} = \frac{A^*}{\det A}, \text{ т. е. } A^{-1} = \frac{1}{\det A} * \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Отметим *свойства* обратной матрицы:

1.  $\det(A^{-1}) = 1 / \det A$ ;
2.  $(A * B)^{-1} = B^{-1} * A^{-1}$ ;
3.  $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$ .

**Пример 3.1.** Найти  $A^{-1}$ , если  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Решение: 1) Находим  $\det A$ :  $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 3 = 5 \neq 0$

2) Находим  $A^*$ :  $A_{11} = 1$ ,  $A_{21} = -3$ ,  $A_{12} = -(-1) = 1$ ,  $A_{22} = 2$ , поэтому  $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

3) Находим  $A^{-1}$ :  $A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 & -3/5 \\ 1/5 & 2/5 \end{pmatrix}$

Проверка:

$$A * A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1/5 & -3/5 \\ 1/5 & 2/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/5 + 3/5 & -6/5 + 6/5 \\ -1/5 + 1/5 & 3/5 + 2/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

**Пример 3.2.** Определить, при каких значениях  $\alpha$  существует матрица, обратная данной.



$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ \alpha & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение: Всякая невырожденная матрица имеет обратную. Найдём определитель матрицы А:

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ \alpha & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 0 + 2\alpha - 12 - 0 + 2\alpha = 4\alpha - 9$$

Если  $4\alpha - 9 \neq 0$ , т.е.  $\alpha \neq 9/4$ , то  $\Delta A \neq 0$ , т.е. матрица А невырожденная, имеет обратную.

**Пример 3.3.** Показать, что матрица А является обратной для В, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение: Найдём произведение матриц А и В:

$$A * B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-3+1 & -3+5-2 & 1-2+1 \\ 3-6+3 & -3+10-6 & 1-4+3 \\ 3-9+6 & -3+15-12 & 1-6+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Аналогично  $B * A = E$ . Следовательно, матрица А является обратной для В.

### 3.3. Ранг матрицы (самостоятельное изучение)

Рассмотрим матрицу А размера  $m \times n$ .

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Выделим в ней  $k$  строк и  $k$  столбцов ( $k \leq \min(m;n)$ ). Из элементов, стоящих на пересечении выделенных строк и столбцов, составим определитель  $k$ -го порядка. Все такие определители называются *минорами этой матрицы*. В матрице А пунктиром выделен минор 2-го порядка. (Заметим, что таких миноров можно составить  $C_m^k * C_n^k$  штук, где  $C_n^k = n! / k!(n-k)!$  – число сочетаний из  $n$  элементов по  $k$ .)

Наибольший из порядков миноров данной матрицы, отличных от нуля, называется **рангом матрицы**. Обозначается  $r$ ,  $r(A)$  или  $\text{rang} A$ .

Очевидно, что  $0 \leq r \leq \min(m;n)$ , где  $\min(m;n)$  – меньшее из чисел  $m$  и  $n$ .

Минор, порядок которого определяет ранг матрицы, называется базисным. У матрицы может быть несколько базисных миноров.

**Пример 3.4.** Найти ранг матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение: Все миноры 3-го порядка равны нулю. Есть минор 2-го порядка, отличный от нуля  $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -15 \neq 0$ . Значит,  $r(A) = 2$ . Базисный минор стоит на пересечении 2 и 3

строки с 1 и 3 столбцами.

Отметим свойства ранга матрицы:

1. При транспонировании матрицы её ранг не меняется.
2. Если вычеркнуть из матрицы нулевой ряд, то ранг матрицы не изменится.
3. Ранг матрицы не изменяется при элементарных преобразованиях матрицы.

Ранг канонической матрицы равен числу единиц на главной диагонали. На этом основан один из способов вычисления ранга матрицы.

**Пример 3.5.** Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

используя результаты примера 1.4.

Решение: В примере 1.4 показано, что  $A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

То есть  $A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Таким образом, ранг матрицы A равен  $r(A) = 2$ .

### ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Какая квадратная матрица называется невырожденной (вырожденной)?
2. Какая матрица называется обратной данной?
3. Любая ли матрица имеет обратную?
4. Как проверить, правильно ли найдена обратная матрица?
5. Перечислите свойства обратной матрицы.
6. Что называется рангом матрицы?
7. Перечислите свойства ранга матрицы?



Система уравнений называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение, и *несовместимой*, если она не имеет ни одного решения.

Совместная система называется *определённой*, если она имеет единственное решение, и *неопределённой*, если она имеет более одного решения. В последнем случае каждое её решение называется *частным решением* системы. Совокупность всех частных решений называется *общим решением*.

*Решить систему* – это значит выяснить, совместна она или несовместна. Если система совместна, найти её общее решение.

Две системы называются *эквивалентными* (равносильными), если они имеют одно и то же общее решение. Другими словами, системы эквивалентны, если каждое решение одной из них является решением другой, и наоборот.

Эквивалентные системы получаются, в частности, при *элементарных преобразованиях* системы при условии, что преобразования выполняются лишь над строками матрицы.

Система линейных уравнений называется *однородной*, если все свободные члены равны нулю:

[illegible]

Однородная система всегда совместна, так как  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$  является решением системы. Это решение называется *нулевым* или *тривиальным*.

### Решение систем линейных уравнений.

### Теорема Кронекера-Капелли:

Пусть дана произвольная система  $m$  линейных уравнений с  $n$  неизвестными

[illegible]

Исчерпывающий ответ на вопрос о совместимости этой системы даёт *теорема Кронекера-Капелли*.

**Теорема 4.1.** Система линейных алгебраических уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг расширенной матрицы системы равен рангу основной матрицы.

Примем её без доказательства.

Правила практического разыскания всех решений совместной системы линейных уравнений  
вытекают из следующих теорем.

**Теорема 4.2.** Если ранг совместной системы равен числу неизвестных, то система имеет единственное решение.

**Теорема 4.3.** Если ранг совместной системы меньше числа неизвестных, то система имеет бесчисленное множество решений.

**Правило решения произвольной системы линейных уравнений.**

1. Найти ранги основной и расширенной матриц системы. Если  $r(A) \neq r(\bar{A})$ , то система несовместна. —
2. Если  $r(A) = r(\bar{A}) = r$ , система совместна. Найти какой-либо базисный минор порядка  $r$  (напоминание: минор, порядок которого определяет ранг матрицы, называется базисным). Взять  $r$  уравнений, из коэффициентов которых составлен базисный минор (остальные уравнения отбросить). Неизвестные, коэффициенты которых входят в базисный минор, называют *главными* и оставляют слева, а остальные  $n - r$  неизвестных называют *свободными* и переносят в правые части уравнений.
3. Найти выражения главных неизвестных через свободные. Получено общее решение системы.
4. Придавая свободным неизвестным произвольные значения, получим соответствующие значения главных неизвестных. Таким образом можно найти частные решения исходной системы уравнений.

**Пример 4.1.** Исследовать на совместность систему

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 3x + 3y = -2 \end{cases}$$

Решение:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $r(A) = 1$ ,  $\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ ,  $r(\bar{A}) = 2$  ( $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$ )

Таким образом,  $r(A) \neq r(\bar{A})$ , следовательно, система несовместна.

**Пример 4.2.** Решить систему

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$$

Решение:  $r(A) \neq \overline{r}(\bar{A}) = 2$ . Берём два первых уравнения:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 + x_4 = 1 - x_1 + 2x_2 \\ x_3 - x_4 = -1 - x_1 + 2x_2 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 - x_1 + 2x_2 & 1 \\ -1 - x_1 + 2x_2 & -1 \end{vmatrix} = 2x_1 - 4x_2, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 - x_1 + 2x_2 \\ 1 & -1 - x_1 + 2x_2 \end{vmatrix} = -2$$

Следовательно,  $x_3 = -x_1 + 2x_2$ ,  $x_4 = 1$  — общее решение. Положив, например,  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0$ , получаем одно из частных решений:  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = 0$ ,  $x_4 = 1$ .

**4.3. Решение невырожденных линейных систем.**

Пусть дана система  $n$  линейных уравнений с  $n$  неизвестными

[illegible]

или в матричной форме  $A * X = B$ .

Основная матрица  $A$  такой системы квадратная. Определитель этой матрицы

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

называется *определителем системы*. Если определитель системы отличен от нуля, то система называется *невыврожденной*.

Найдём решение данной системы уравнений в случае  $\Delta \neq 0$ .

Умножив обе части уравнения  $A * X = B$  слева на матрицу  $A^{-1}$ , получим  $A^{-1} * A * X = A^{-1} * B$ .

Поскольку  $A^{-1} * A = E$  и  $E * X = X$ , то  $X = A^{-1} * B$ .

Отыскание решения системы по формуле (4.1) называют *матричным способом* решения системы.

Матричное равенство (4.1) запишем в виде

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix},$$

$$\text{то есть } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_{11}b_1 + a_{21}b_2 + \dots + a_{n1}b_n)/\Delta \\ (a_{12}b_1 + a_{22}b_2 + \dots + a_{n2}b_n)/\Delta \\ \dots \dots \dots \dots \\ (a_{1n}b_1 + a_{2n}b_2 + \dots + a_{nn}b_n)/\Delta \end{pmatrix}$$

Отсюда следует, что

$$x_I = (A_{I1}b_1 + A_{I2}b_2 + \dots + A_{In}b_n) / \Delta,$$

$$x_n = (A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \dots + A_{nn}b_n) / \Delta.$$

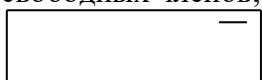
Но  $A_{1l}b_l + A_{2l}b_2 + \dots + A_{nl}b_l$  есть разложение определителя

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

по элементам первого столбца. Определитель  $\Delta_1$  получается из определителя  $\Delta$  путём замены первого столбца коэффициентов столбцом из свободных членов.

Итак,  $x_I = \Delta_I / \Delta$ .

Аналогично:  $x_2 = \Delta_2 / \Delta$ , где  $\Delta_2$  получен из  $\Delta$  путём замены второго столбца коэффициентов столбцом из свободных членов;  $x_3 = \Delta_3 / \Delta$ , ...,  $x_n = \Delta_n / \Delta$ .



Формулы  $x_i = \Delta_i / \Delta, i = 1, n$

называются формулами Крамера.

Итак, невырожденная система  $n$  линейных уравнений с  $n$  неизвестными имеет единственное решение, которое может быть найдено матричным способом (4.1) либо по формулам Крамера (4.2).

**Пример 4.3.** Решить систему 
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + 3x_2 = 7 \end{cases}$$

Решение:  $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7 \neq 0, \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 7, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 14$

Значит,  $x_1 = \frac{7}{7} = 1, x_2 = \frac{14}{7} = 2$

### ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Какой вид имеет система линейных алгебраических уравнений?
2. Как записать систему линейных алгебраических уравнений в матричной форме?
3. Сформулируйте теорему Кронекера-Капелли.
4. Какая система уравнений называется совместной (несовместной)?
5. Что значит решить систему линейных алгебраических уравнений?
6. Сформулируйте правила решения произвольной системы линейных алгебраических уравнений.
7. Сформулируйте правила решения систем с помощью обратной матрицы.
8. Сформулируйте правила решения систем методом определителя (формулы Крамера).

## Лекция № 5. Прямая линия на плоскости.

В этой лекции мы приступаем к рассмотрению аналитической геометрии, которая изучает свойства геометрических фигур средствами алгебры на основе метода координат. Данный метод позволяет каждой точке плоскости поставить в соответствие упорядоченную тройку чисел. Основным инструментом метода координат служит система координат. В этой лекции мы будем рассматривать только прямоугольную, или декартову, систему координат. Рассмотрим, как можно задать простейшую фигуру – прямую на плоскости.

### 5.1. Уравнение прямой на плоскости.

**Определение.** Любая прямая на плоскости может быть задана уравнением первого порядка

$$Ax + By + C = 0,$$

причем постоянные  $A, B$  не равны нулю одновременно, т.е.  $A^2 + B^2 \neq 0$ . Это уравнение первого порядка называют **общим уравнением прямой**.

В зависимости от значений постоянных  $A, B$  и  $C$  возможны следующие частные случаи:

- $C = 0, A \neq 0, B \neq 0$  – прямая проходит через начало координат
- $A = 0, B \neq 0, C \neq 0$  {  $By + C = 0$  }- прямая параллельна оси  $Ox$
- $B = 0, A \neq 0, C \neq 0$  {  $Ax + C = 0$  } – прямая параллельна оси  $Oy$
- $B = C = 0, A \neq 0$  – прямая совпадает с осью  $Oy$
- $A = C = 0, B \neq 0$  – прямая совпадает с осью  $Ox$

Уравнение прямой может быть представлено в различном виде в зависимости от каких – либо заданных начальных условий.

### 5.2. Уравнение прямой по точке и вектору нормали.

**Определение.** В декартовой прямоугольной системе координат вектор с компонентами  $(A, B)$  перпендикулярен прямой, заданной уравнением  $Ax + By + C = 0$ .

**Пример.** Найти уравнение прямой, проходящей через точку  $A(1, 2)$  перпендикулярно вектору  $\vec{n}(3, -1)$ .

Составим при  $A = 3$  и  $B = -1$  уравнение прямой:  $3x - y + C = 0$ . Для нахождения коэффициента  $C$  подставим в полученное выражение координаты заданной точки  $A$ .

Получаем:  $3 - 2 + C = 0$ , следовательно  $C = -1$ .

Итого: искомое уравнение:  $3x - y - 1 = 0$ .



### 5.3. Уравнение прямой, проходящей через две точки.

Пусть на плоскости заданы две точки  $M_1(x_1, y_1)$  и  $M_2(x_2, y_2)$ , тогда уравнение прямой, проходящей через эти точки:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

Если какой-либо из знаменателей равен нулю, следует приравнять нулю соответствующий числитель.

Записанное выше уравнение прямой упрощается:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

если  $x_1 \neq x_2$  и  $x = x_1$ , если  $x_1 = x_2$ .

Дробь  $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = k$  называется **угловым коэффициентом** прямой.

**Пример.** Найти уравнение прямой, проходящей через точки  $A(1, 2)$  и  $B(3, 4)$ .

Применяя записанную выше формулу, получаем:

$$\begin{aligned} y - 2 &= \frac{4 - 2}{3 - 1} (x - 1) \\ y - 2 &= x - 1 \\ x - y + 1 &= 0 \end{aligned}$$

### 5.4. Уравнение прямой по точке и угловому коэффициенту.

Если общее уравнение прямой  $Ax + By + C = 0$  привести к виду:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

и обозначить  $-\frac{A}{B} = k$ ;  $-\frac{C}{B} = b$ ; т.е.  $y = kx + b$ , то полученное уравнение называется **уравнением прямой с угловым коэффициентом  $k$** .

### 5.5. Уравнение прямой по точке и направляющему вектору.

По аналогии с пунктом, рассматривающим уравнение прямой через вектор нормали можно ввести задание прямой через точку и направляющий вектор прямой.

**Определение.** Каждый ненулевой вектор  $\vec{a}(\alpha_1, \alpha_2)$ , компоненты которого удовлетворяют условию  $A\alpha_1 + B\alpha_2 = 0$  называется направляющим вектором прямой

$$Ax + By + C = 0.$$

**Пример.** Найти уравнение прямой с направляющим вектором  $\vec{a}(1, -1)$  и проходящей через точку  $A(1, 2)$ .

Уравнение искомой прямой будем искать в виде:  $Ax + By + C = 0$ . В соответствии с определением, коэффициенты должны удовлетворять условиям:

$$1 \cdot A + (-1) \cdot B = 0, \text{ т.е. } A = B.$$

Тогда уравнение прямой имеет вид:  $Ax + Ay + C = 0$ , или  $x + y + C/A = 0$ .

при  $x = 1, y = 2$  получаем  $C/A = -3$ , т.е. искомое уравнение:

$$x + y - 3 = 0$$

## 5.6. Уравнение прямой в отрезках.

Если в общем уравнении прямой  $Ax + By + C = 0$   $C \neq 0$ , то, разделив на  $-C$ , получим:

$$-\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y = 1 \text{ или}$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \text{ где}$$

$$a = -\frac{C}{A}; \quad b = -\frac{C}{B}$$

Геометрический смысл коэффициентов в том, что коэффициент  $a$  является координатой точки пересечения прямой с осью  $Ox$ , а  $b$  – координатой точки пересечения прямой с осью  $Oy$ .

**Пример.** Задано общее уравнение прямой  $x - y + 1 = 0$ . Найти уравнение этой прямой в отрезках.

$$C = 1, \quad -\frac{x}{1} + \frac{y}{1} = 1, \quad a = -1, \quad b = 1.$$

## 5.7. Нормальное уравнение прямой.

Если обе части уравнения  $Ax + By + C = 0$  разделить на число  $\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ , которое

называется **нормирующим множителем**, то получим

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - p = 0 -$$

нормальное уравнение прямой.

Знак  $\pm$  нормирующего множителя надо выбирать так, чтобы  $\mu \cdot C < 0$ .

$p$  – длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую, а  $\varphi$  – угол, образованный этим перпендикуляром с положительным направлением оси  $Ox$ .

**Пример.** Дано общее уравнение прямой  $12x - 5y - 65 = 0$ . Требуется написать различные типы уравнений этой прямой.

уравнение этой прямой в отрезках:

$$\frac{12}{65}x - \frac{5}{65}y = 1$$

$$\frac{x}{(65/12)} + \frac{y}{(-13)} = 1$$

уравнение этой прямой с угловым коэффициентом: (делим на 5)

$$y = \frac{12}{5}x - \frac{65}{5} = \frac{12}{5}x - 13.$$

нормальное уравнение прямой:

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{12^2 + (-5)^2}} = \frac{1}{13} \quad \frac{12}{13}x - \frac{5}{13}y - 5 = 0; \quad \cos\varphi = 12/13; \sin\varphi = -5/13; p = 5.$$

Следует отметить, что не каждую прямую можно представить уравнением в отрезках, например, прямые, параллельные осям или проходящие через начало координат.

**Пример.** Прямая отсекает на координатных осях равные положительные отрезки. Составить уравнение прямой, если площадь треугольника, образованного этими отрезками равна  $8 \text{ см}^2$ .

Уравнение прямой имеет вид:  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ,  $a = b = 1$ ;  $ab/2 = 8$ ;  $a = 4$ ;  $-4$ .

$a = -4$  не подходит по условию задачи.

Итого:  $\frac{x}{4} + \frac{y}{4} = 1$  или  $x + y - 4 = 0$ .

**Пример.** Составить уравнение прямой, проходящей через точку  $A(-2, -3)$  и начало координат.

Уравнение прямой имеет вид:  $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$ , где  $x_1 = y_1 = 0$ ;  $x_2 = -2$ ;  $y_2 = -3$ .

$$\frac{x-0}{-2-0} = \frac{y-0}{-3-0}; \quad \frac{x}{-2} = \frac{y}{-3}; \quad 3x - 2y = 0.$$

**Для самостоятельного решения:** Составить уравнения прямых, проходящих через точку  $M(-3, -4)$  и параллельных осям координат.

Ответ:  $\{x + 3 = 0; y + 4 = 0\}$ .

## 5.8. Угол между прямыми на плоскости.

**Определение.** Если заданы две прямые  $y = k_1x + b_1$ ,  $y = k_2x + b_2$ , то острый угол между этими прямыми будет определяться как

$$\operatorname{tg}\alpha = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2} \right|.$$

Две прямые параллельны, если  $k_1 = k_2$ .

Две прямые перпендикулярны, если  $k_1 = -1/k_2$ .

**Теорема.** Прямые  $Ax + By + C = 0$  и  $A_1x + B_1y + C_1 = 0$  параллельны, когда пропорциональны коэффициенты  $A_1 = \lambda A$ ,  $B_1 = \lambda B$ . Если еще и  $C_1 = \lambda C$ , то прямые совпадают.

Координаты точки пересечения двух прямых находятся как решение системы двух уравнений.

### 5.9. Уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данной прямой.

**Определение.** Прямая, проходящая через точку  $M_1(x_1, y_1)$  и перпендикулярная к прямой  $y = kx + b$  представляется уравнением:

$$y - y_1 = -\frac{1}{k}(x - x_1)$$

### 5.10. Расстояние от точки до прямой.

Если задана точка  $M(x_0, y_0)$ , то расстояние до прямой  $Ax + By + C = 0$  определяется как

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

**Пример.** Определить угол между прямыми:  $y = -3x + 7$ ;  $y = 2x + 1$ .

$$K_1 = -3; \quad k_2 = 2 \quad \operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{2 - (-3)}{1 - (-3)2} \right| = 1; \quad \varphi = \pi/4.$$

**Пример.** Показать, что прямые  $3x - 5y + 7 = 0$  и  $10x + 6y - 3 = 0$  перпендикулярны.

Находим:  $k_1 = 3/5$ ,  $k_2 = -5/3$ ,  $k_1 k_2 = -1$ , следовательно, прямые перпендикулярны.

**Пример.** Даны вершины треугольника  $A(0; 1)$ ,  $B(6; 5)$ ,  $C(12; -1)$ . Найти уравнение высоты, проведенной из вершины  $C$ .

Находим уравнение стороны  $AB$ :  $\frac{x-0}{6-0} = \frac{y-1}{5-1}$ ;  $\frac{x}{6} = \frac{y-1}{4}$ ;  $4x = 6y - 6$ ;

$$2x - 3y + 3 = 0; \quad y = \frac{2}{3}x + 1.$$

Искомое уравнение высоты имеет вид:  $Ax + By + C = 0$  или  $y = kx + b$ .

$k = -\frac{3}{2}$ . Тогда  $y = -\frac{3}{2}x + b$ . Т.к. высота проходит через точку  $C$ , то ее координаты удовлетворяют

данному уравнению:  $-1 = -\frac{3}{2}12 + b$ , откуда  $b = 17$ . Итого:  $y = -\frac{3}{2}x + 17$ .

Ответ:  $3x + 2y - 34 = 0$ .

**Для самостоятельного решения:** Даны стороны треугольника  $x + y - 6 = 0$ ,  $3x - 5y + 15 = 0$ ,  $5x - 3y - 14 = 0$ . Составить уравнения его высот.

**Указание:** Сначала следует найти координаты вершин треугольника, как точек пересечения сторон, затем воспользоваться методом, рассмотренном в предыдущем примере.

Ответ:  $\{x - y = 0; 5x + 3y - 26 = 0; 3x + 5y - 26 = 0\}$ .

## ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Дайте определение уравнения линии на плоскости.
2. Напишите общее уравнение прямой.
3. Укажите различные случаи положения прямой относительно осей координат и соответствующие им уравнения.
4. Как проверить, лежит ли данная точка на данной прямой?
5. Что называется углом наклона прямой?
6. Что называется угловым коэффициентом прямой, каков его геометрический смысл?
7. Чему равен угловой коэффициент прямой, параллельно оси  $Ox$ ?
8. Напишите уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении.
9. Напишите уравнение прямой, проходящей через две данные точки, общее уравнение прямой.
10. Напишите формулу тангенса угла между двумя прямыми.
11. Сформулируйте условия параллельности и перпендикулярности двух прямых.
12. Как определить точку пересечения двух прямых?
13. В чем состоит геометрический смысл неравенства первой степени с двумя неизвестными?
14. В чем состоит геометрический смысл системы неравенств первой степени с двумя неизвестными?

## Лекция № 6. Кривые второго порядка.

### Кривая второго порядка может быть задана уравнением

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Существует система координат (не обязательно декартова прямоугольная), в которой данное уравнение может быть представлено в одном из видов, приведенных ниже.

- 1)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  - уравнение эллипса.
- 2)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$  - уравнение “мнимого” эллипса.
- 3)  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  - уравнение гиперболы.
- 4)  $a^2x^2 - c^2y^2 = 0$  – уравнение двух пересекающихся прямых.
- 5)  $y^2 = 2px$  – уравнение параболы.
- 6)  $y^2 - a^2 = 0$  – уравнение двух параллельных прямых.
- 7)  $y^2 + a^2 = 0$  – уравнение двух “мнимых” параллельных прямых.
- 8)  $y^2 = 0$  – пара совпадающих прямых.
- 9)  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$  – уравнение окружности.

### 6.1. Окружность.

Определение. **Окружностью** называется множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки (**центра**).

В окружности  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$  центр имеет координаты  $(a; b)$ .

**Пример.** Найти координаты центра и радиус окружности, если ее уравнение задано в виде:

$$2x^2 + 2y^2 - 8x + 5y - 4 = 0.$$

Для нахождения координат центра и радиуса окружности данное уравнение необходимо привести к виду, указанному выше в п.9. Для этого выделим полные квадраты:

$$x^2 + y^2 - 4x + 2,5y - 2 = 0$$

$$x^2 - 4x + 4 - 4 + y^2 + 2,5y + 25/16 - 25/16 - 2 = 0$$

$$(x - 2)^2 + (y + 5/4)^2 - 25/16 - 6 = 0$$

$$(x - 2)^2 + (y + 5/4)^2 = 121/16$$

Отсюда находим  $O(2; -5/4)$ ;  $R = 11/4$ .

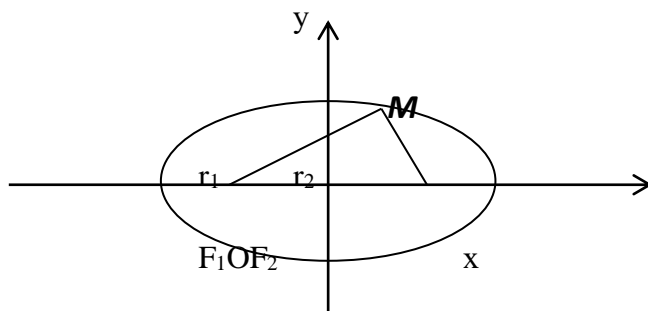
### 6.2. Эллипс.

**Определение.** *Эллисом* называется множество точек плоскости, сумма расстояний которых до двух данных точек, называемых *фокусами*, есть величина постоянная, равная  $2a$ .

Уравнение эллипса имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

**Определение.** **Фокусами** называются такие две точки, сумма расстояний от которых до любой точки эллипса есть постоянная величина.



$F_1, F_2$  – фокусы.  $F_1 = (c; 0); F_2 = (-c; 0)$

$c$  – половина расстояния между фокусами;

$a$  – большая полуось;

$b$  – малая полуось.

**Теорема.** Фокусное расстояние и полуоси эллипса связаны соотношением:

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

**Доказательство:** В случае, если точка  $M$  находится на пересечении эллипса с вертикальной осью,  $r_1 + r_2 = 2\sqrt{b^2 + c^2}$  (по теореме Пифагора). В случае, если точка  $M$  находится на пересечении эллипса с горизонтальной осью,  $r_1 + r_2 = a - c + a + c$ . Т.к. по определению сумма  $r_1 + r_2$  – постоянная величина, то, приравнявая, получаем:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$r_1 + r_2 = 2a.$$

**Определение.** Форма эллипса определяется характеристикой, которая является отношением фокусного расстояния к большей оси и называется **эксцентриситетом**.

$$E = c/a.$$

Т.к.  $c < a$ , то  $e < 1$ .

**Определение.** Величина  $k = b/a$  называется **коэффициентом сжатия** эллипса, а величина  $1 - k = (a - b)/a$  называется **сжатием** эллипса.

Коэффициент сжатия и эксцентриситет связаны соотношением:  $k^2 = 1 - e^2$ .

Если  $a = b$  ( $c = 0$ ,  $e = 0$ , фокусы сливаются), то эллипс превращается в окружность.

Если для точки  $M(x_1, y_1)$  выполняется условие:  $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} < 1$ , то она находится внутри эллипса, а если  $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} > 1$ , то точка находится вне эллипса.

С эллипсом связаны две прямые, называемые **директрисами**. Их уравнения:

$$x = a/e; \quad x = -a/e.$$

**Теорема.** Для того, чтобы точка лежала на эллипсе, необходимо и достаточно, чтобы отношение расстояния до фокуса к расстоянию до соответствующей директрисы равнялось эксцентриситету  $e$ .

**Пример.** Составить уравнение прямой, проходящей через левый фокус и нижнюю вершину эллипса, заданного уравнением:  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ .

- 1) Координаты нижней вершины:  $x = 0$ ;  $y^2 = 16$ ;  $y = -4$ .
- 2) Координаты левого фокуса:  $c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 16 = 9$ ;  $c = 3$ ;  $F_2(-3; 0)$ .
- 3) Уравнение прямой, проходящей через две точки:

$$\frac{x - 0}{-3 - 0} = \frac{y + 4}{0 + 4}; \quad \frac{x}{-3} = \frac{y + 4}{4}; \quad 4x = -3y - 12; \quad 4x + 3y + 12 = 0$$

**Пример.** Составить уравнение эллипса, если его фокусы  $F_1(0; 0)$ ,  $F_2(1; 1)$ , большая ось равна 2.

Уравнение эллипса имеет вид:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ . Расстояние между фокусами:

$$2c = \sqrt{(1-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2}, \text{ таким образом, } a^2 - b^2 = c^2 = 1/2$$

$$\text{по условию } 2a = 2, \text{ следовательно } a = 1, b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{1 - 1/2} = \sqrt{2}/2.$$

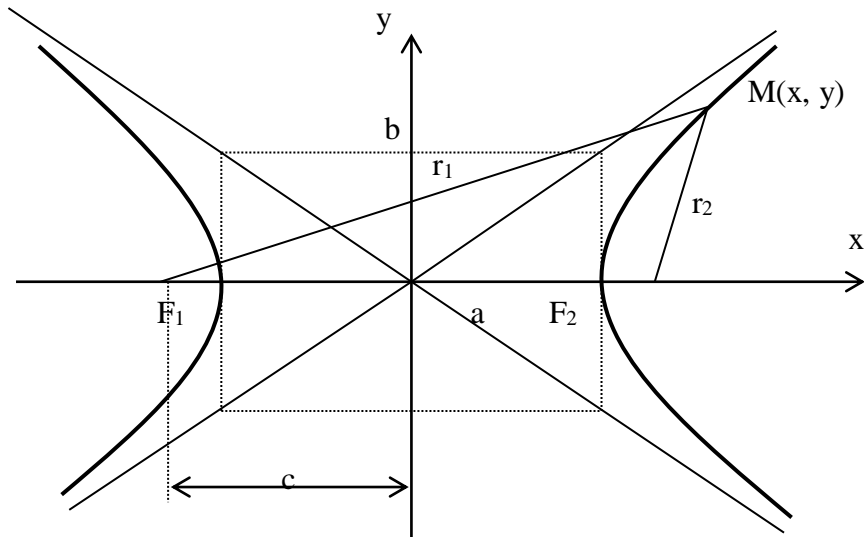
$$\text{Итого: } \frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{1/2} = 1.$$

### 6.3. Гипербола.

**Определение.** Гиперболой называется множество точек плоскости, для которых модуль разности расстояний от двух данных точек, называемых **фокусами** есть величина постоянная, равная  $2a$ , меньшая расстояния между фокусами.

По определению  $|r_1 - r_2| = 2a$ .  $F_1, F_2$  – фокусы гиперболы.  $F_1F_2 = 2c$ .





Выберем на гиперболе произвольную точку  $M(x, y)$ . Тогда:

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

$$4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = -4a^2 + 4xc$$

$$a^2(x-c)^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2xc + x^2c^2$$

$$a^2x^2 - 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2xc + x^2c^2$$

$$a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 - a^4 - x^2c^2 = 0$$

$$-x^2(c^2 - a^2) + a^2(c^2 - a^2) + a^2y^2 = 0$$

$$x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

обозначим  $c^2 - a^2 = b^2$  (геометрически эта величина – меньшая полуось)

$$a^2b^2 = b^2x^2 - a^2y^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

**Получили каноническое уравнение гиперболы.**

Гипербола симметрична относительно середины отрезка, соединяющего фокусы и относительно осей координат.

**Ось 2a называется действительной осью гиперболы.**

**Ось 2b называется мнимой осью гиперболы.**

Гипербола имеет две асимптоты, уравнения которых  $y = \pm \frac{b}{a} x$ .

**Определение.** Отношение  $e = \frac{c}{a} > 1$  называется **эксцентриситетом** гиперболы, где  $c$  – половина расстояния между фокусами,  $a$  – действительная полуось.

С учетом того, что  $c^2 - a^2 = b^2$ :

$$e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2}$$

$$\frac{b}{a} = \sqrt{e^2 - 1}$$

Если  $a = b$ ,  $e = \sqrt{2}$ , то гипербола называется **равнобочной (равносторонней)**.

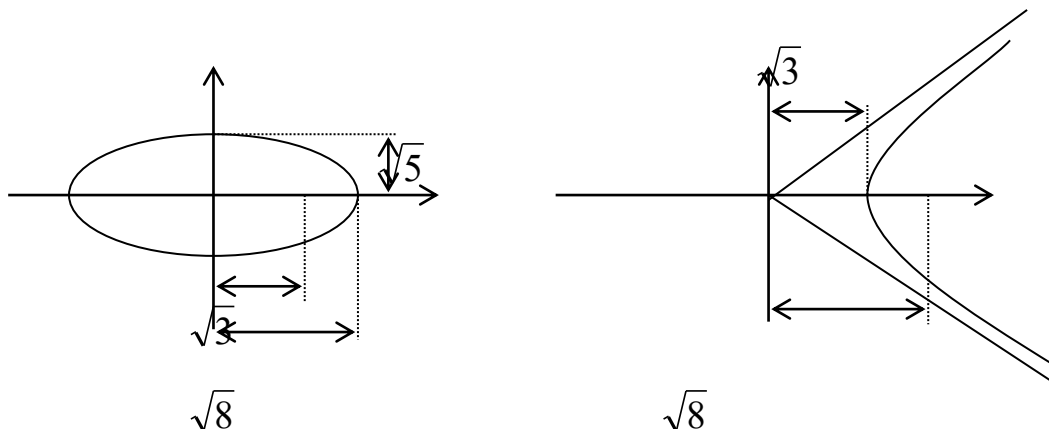
**Определение.** Две прямые, перпендикулярные действительной оси гиперболы и расположенные симметрично относительно центра на расстоянии  $a/e$  от него, называются **директрисами** гиперболы. Их уравнения:  $x = \pm \frac{a}{e}$ .

**Теорема.** Если  $r$  – расстояние от произвольной точки  $M$  гиперболы до какого-либо фокуса,  $d$  – расстояние от той же точки до соответствующей этому фокусу директрисы, то отношение  $r/d$  – величина постоянная, равная эксцентриситету.

**Пример.** Найти уравнение гиперболы, вершины и фокусы которой находятся в соответствующих вершинах и фокусах эллипса  $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{5} = 1$ .

Для эллипса:  $c^2 = a^2 - b^2$ .

Для гиперболы:  $c^2 = a^2 + b^2$ .



Уравнение гиперболы:  $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{5} = 1$ .

**Пример.** Составить уравнение гиперболы, если ее эксцентриситет равен 2, а фокусы совпадают с фокусами эллипса с уравнением  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ .

Находим фокусное расстояние  $c^2 = 25 - 9 = 16$ .

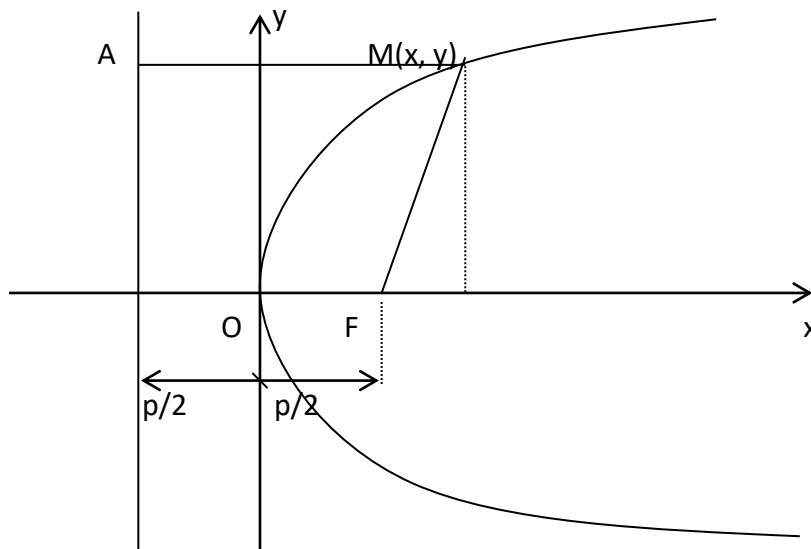
Для гиперболы:  $c^2 = a^2 + b^2 = 16$ ,  $e = c/a = 2$ ;  $c = 2a$ ;  $c^2 = 4a^2$ ;  $a^2 = 4$ ;  
 $b^2 = 16 - 4 = 12$ .

Итого:  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$  - искомое уравнение гиперболы.

#### 6.4. Парабола.

**Определение. Параболой** называется множество точек плоскости, каждая из которых находится на одинаковом расстоянии от данной точки, называемой фокусом, и от данной прямой, называемой директрисой и не проходящей через фокус.

Расположим начало координат посередине между фокусом и директрисой.



Величина  $p$  (расстояние от фокуса до директрисы) называется **параметром** параболы. Выведем каноническое уравнение параболы.

Из геометрических соотношений:  $AM = MF$ ;  $AM = x + p/2$ ;

$$MF^2 = y^2 + (x - p/2)^2$$

$$(x + p/2)^2 = y^2 + (x - p/2)^2$$

$$x^2 + xp + p^2/4 = y^2 + x^2 - xp + p^2/4$$

$$y^2 = 2px$$

Уравнение директрисы:  $x = -p/2$ .

**Пример.** На параболе  $y^2 = 8x$  найти точку, расстояние которой от директрисы равно 4.

Из уравнения параболы получаем, что  $p = 4$ .

$r = x + p/2 = 4$ ; следовательно:

$x = 2$ ;  $y^2 = 16$ ;  $y = \pm 4$ . Искомые точки:  $M_1(2; 4)$ ,  $M_2(2; -4)$ .

**Пример.** Дана парабола  $y^2 = 6x$ . Составить уравнение ее директрисы и найти ее фокус.

Сравнивая данное уравнение с каноническим уравнением параболы, видим, что  $2p=6$ ,  $p = 3$ . Так как уравнение директрисы имеет уравнение  $x = -\frac{p}{2}$ , а фокус – координаты  $\frac{p}{2}$  и  $0$ , то для рассматриваемого случая получим уравнение директрисы  $x = -\frac{3}{2}$  и фокус  $F\left(\frac{3}{2}; 0\right)$ .

*Ответ:*  $x = -\frac{3}{2}$ ,  $F\left(\frac{3}{2}; 0\right)$ .

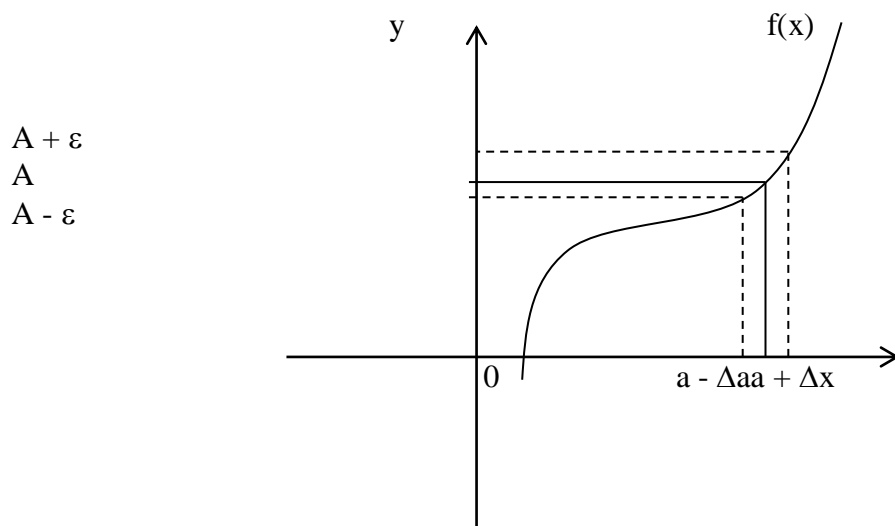
## ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Дайте определение линии второго порядка.
2. Какие линии второго порядка вы знаете?
3. Выведите уравнение окружности с центром в точке  $C(1; 2)$  и радиусом  $R = 4$ .
4. Дайте определение эллипса.
5. Какую форму имеет эллипс? Укажите на рисунке и назовите его основные элементы.
6. Что представляет собой эллипс, если его полуоси равны?
7. Дайте определение параболы.
8. Какую форму имеет парабола, определяемая уравнением  $y^2 = 2px$ , или  $x^2 = 2gy$ ? Как влияют параметры  $p$  и  $g$  на форму параболы?
9. Что представляет собой на графике в системе координат  $Oxу$  линия, заданная уравнением  $y = ax^2 + bx + c$ ?
10. Дайте определение гиперболы.
11. Какую форму имеет гипербола? Укажите на рисунке и назовите ее основные элементы.
12. Напишите уравнения асимптот гиперболы.
13. Напишите уравнение равносторонней гиперболы, асимптотами которой являются оси координат.
14. Приведите примеры использования уравнений линий второго порядка для изучения конкретных зависимостей.

## Лекция № 8. Предел функции.

Переменная и предел – это основные понятия математического анализа. Достаточно напомнить, что ключевым словом в определениях таких известных со школы понятий как производная и интеграл является слово предел.

### 8.1. Предел функции в точке.



Пусть функция  $f(x)$  определена в некоторой окрестности точки  $x = a$  (т.е. в самой точке  $x = a$  функция может быть и не определена)

**Определение.** Число  $A$  называется **пределом** функции  $f(x)$  при  $x \rightarrow a$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое число  $\Delta > 0$ , что для всех  $x$  таких, что

$$0 < |x - a| < \Delta$$

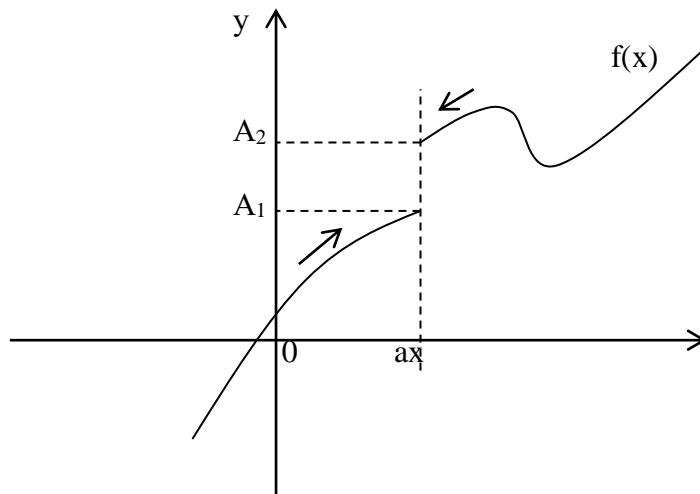
верно неравенство  $|f(x) - A| < \varepsilon$ .

То же определение может быть записано в другом виде:

Если  $a - \Delta < x < a + \Delta$ ,  $x \neq a$ , то верно неравенство  $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$ .

Запись предела функции в точке:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$

**Определение.** Если  $f(x) \rightarrow A_1$  при  $x \rightarrow a$  только при  $x < a$ , то  $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = A_1$  - называется **пределом** функции  $f(x)$  в точке  $x = a$  **слева**, а если  $f(x) \rightarrow A_2$  при  $x \rightarrow a$  только при  $x > a$ , то  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = A_2$  называется **пределом** функции  $f(x)$  в точке  $x = a$  **справа**.



Приведенное выше определение относится к случаю, когда функция  $f(x)$  не определена в самой точке  $x = a$ , но определена в некоторой сколь угодно малой окрестности этой точки.

Пределы  $A_1$  и  $A_2$  называются также **односторонними пределами** функции  $f(x)$  в точке  $x = a$ . Также говорят, что  $A$  – **конечный предел** функции  $f(x)$ .

## 8.2. Предел функции при стремлении аргумента к бесконечности.

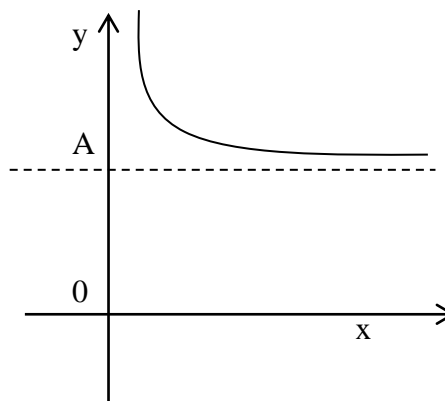
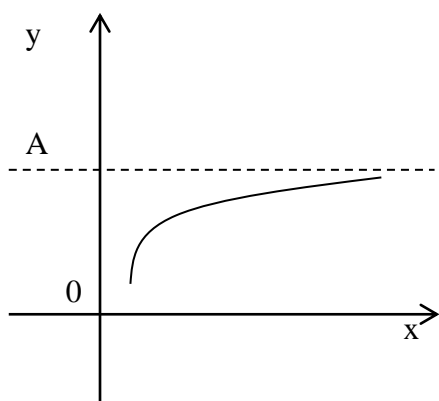
**Определение.** Число  $A$  называется **пределом** функции  $f(x)$  при  $x \rightarrow \infty$ , если для любого числа  $\varepsilon > 0$  существует такое число  $M > 0$ , что для всех  $x$ ,  $|x| > M$  выполняется неравенство

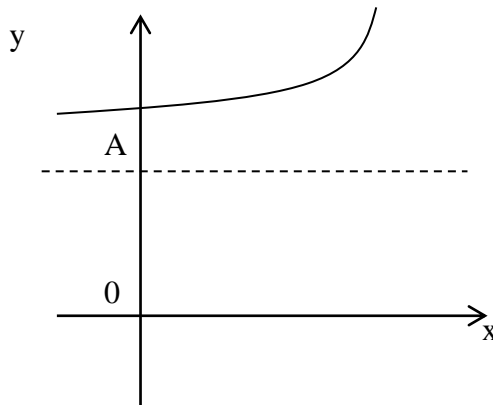
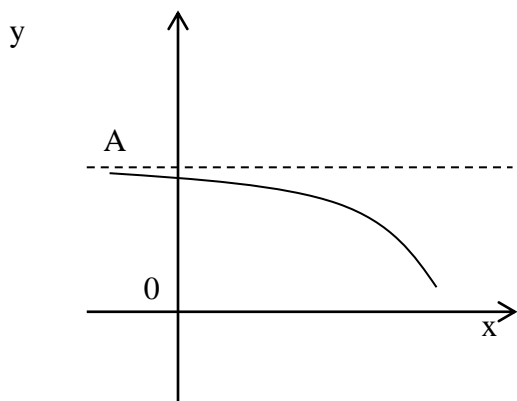
$$|A - f(x)| < \varepsilon$$

При этом предполагается, что функция  $f(x)$  определена в окрестности бесконечности.

Записывают:  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ .

Графически можно представить:





Аналогично можно определить пределы  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$  для любого  $x > M$  и

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$  для любого  $x < M$ .

### 8.3. Основные теоремы о пределах.

**Теорема 1.**  $\lim_{x \rightarrow a} C = C$ , где  $C = \text{const}$ .

Следующие теоремы справедливы при предположении, что функции  $f(x)$  и  $g(x)$  имеют конечные пределы при  $x \rightarrow a$ .

**Теорема 2.**  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

Доказательство этой теоремы будет приведено ниже.

**Теорема 3.**  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

**Следствие.**  $\lim_{x \rightarrow a} C \cdot f(x) = C \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x)$

**Теорема 4.**  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$  при  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$

**Теорема 5.** Если  $f(x) > 0$  вблизи точки  $x = a$  и  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ , то  $A > 0$ .

Аналогично определяется знак предела при  $f(x) < 0$ ,  $f(x) \geq 0$ ,  $f(x) \leq 0$ .

**Теорема 6.** Если  $g(x) \leq f(x) \leq u(x)$  вблизи точки  $x = a$  и  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} u(x) = A$ , то и  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ .

**Определение.** Функция  $f(x)$  называется **ограниченной** вблизи точки  $x = a$ , если существует такое число  $M > 0$ , что  $|f(x)| < M$  вблизи точки  $x = a$ .

**Теорема 7.** Если функция  $f(x)$  имеет конечный предел при  $x \rightarrow a$ , то она ограничена вблизи точки  $x = a$ .

**Доказательство.** Пусть  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ , т.е.  $|f(x) - A| < \varepsilon$ , тогда

$$|f(x)| = |f(x) - A + A| \leq |f(x) - A| + |A| \text{ или}$$

$$|f(x)| < \varepsilon + |A|, \text{ т.е.}$$

$$|f(x)| < M, \text{ где } M = \varepsilon + |A|$$

Теорема доказана.

#### 8.4. Бесконечно малые функции.

**Определение.** Функция  $f(x)$  называется **бесконечно малой** при  $x \rightarrow a$ , где  $a$  может быть числом или одной из величин  $\infty$ ,  $+\infty$  или  $-\infty$ , если  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ .

##### Свойства бесконечно малых функций:

- 1) Сумма фиксированного числа бесконечно малых функций при  $x \rightarrow a$  тоже бесконечно малая функция при  $x \rightarrow a$ .
- 2) Произведение фиксированного числа бесконечно малых функций при  $x \rightarrow a$  тоже бесконечно малая функция при  $x \rightarrow a$ .
- 3) Произведение бесконечно малой функции на функцию, ограниченную вблизи точки  $x = a$  является бесконечно малой функцией при  $x \rightarrow a$ .
- 4) Частное от деления бесконечно малой функции на функцию, предел которой не равен нулю есть величина бесконечно малая.

#### 8.5. Бесконечно большие функции и их связь с бесконечно малыми.

**Определение.** Функция называется **бесконечно большой** при  $x \rightarrow a$ , где  $a$  – число или одна из величин  $\infty$ ,  $+\infty$  или  $-\infty$ , если  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ , где  $A$  – число или одна из величин  $\infty$ ,  $+\infty$  или  $-\infty$ .

Связь бесконечно больших и бесконечно малых функций осуществляется в соответствии со следующей теоремой.

**Теорема.** Если  $f(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow a$  (если  $x \rightarrow \infty$ ) и не обращается в ноль, то

$$y = \frac{1}{f(x)} \rightarrow \infty$$

#### 8.6. Сравнение бесконечно малых функций.

Пусть  $\alpha(x)$ ,  $\beta(x)$  и  $\gamma(x)$  – бесконечно малые функции при  $x \rightarrow a$ . Будем обозначать эти функции  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  соответственно. Эти бесконечно малые функции можно сравнивать по скорости их убывания, т.е. по скорости их стремления к нулю.



Например, функция  $f(x) = x^{10}$  стремится к нулю быстрее, чем функция  $f(x) = x$ .

**Определение.** Если  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta} = 0$ , то функция  $\alpha$  называется **бесконечно малой более высокого порядка**, чем функция  $\beta$ .

**Определение.** Если  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta} = A$ ,  $A \neq 0$ ,  $A = const$ , то  $\alpha$  и  $\beta$  называются **бесконечно малыми одного порядка**.

**Определение.** Если  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta} = 1$ , то функции  $\alpha$  и  $\beta$  называются **эквивалентными бесконечно малыми**. Записывают  $\alpha \sim \beta$ .

**Пример.** Сравним бесконечно малые при  $x \rightarrow 0$  функции  $f(x) = x^{10}$  и  $f(x) = x$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{10}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x^9 = 0$$

т.е. функция  $f(x) = x^{10}$  – бесконечно малая более высокого порядка, чем  $f(x) = x$ .

**Определение.** Бесконечно малая функция  $\alpha$  называется **бесконечно малой порядка**  $k$  относительно бесконечно малой функции  $\beta$ , если предел  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta^k}$  конечен и отличен от нуля.

Однако следует отметить, что не все бесконечно малые функции можно сравнивать между собой. Например, если отношение  $\frac{\alpha}{\beta}$  не имеет предела, то функции несравнимы.

**Пример.** Если  $\alpha = x \sin x$ ,  $\beta = x$ , то при  $x \rightarrow 0$   $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\beta^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{x^2} = 1$ , т.е. функция  $\alpha$  – бесконечно малая порядка 2 относительно функции  $\beta$ .

**Пример.** Если  $\alpha = x \sin \frac{1}{x}$ ,  $\beta = x$ , то при  $x \rightarrow 0$   $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\beta}$  не существует, т.е. функция  $\alpha$  и  $\beta$  несравнимы.

Свойства эквивалентных бесконечно малых.

$$1) \alpha \sim \alpha, \quad \left( \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\alpha} = 1 \right)$$

$$2) \text{ Если } \alpha \sim \beta \text{ и } \beta \sim \gamma, \text{ то } \alpha \sim \gamma, \quad \left( \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\gamma} = \lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\beta}{\gamma} \right) = 1 \cdot 1 = 1 \right)$$

$$3) \text{ Если } \alpha \sim \beta, \text{ то } \beta \sim \alpha, \quad \left( \lim_{x \rightarrow a} \frac{\beta}{\alpha} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\frac{\alpha}{\beta}} = 1 \right)$$

$$4) \text{ Если } \alpha \sim \alpha_1 \text{ и } \beta \sim \beta_1 \text{ и } \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta} = k, \text{ то и } \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha_1}{\beta_1} = k \text{ или } \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha_1}{\beta_1}.$$

**Следствие:** а) если  $\alpha \sim \alpha_1$  и  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta} = k$ , то и  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha_1}{\beta}$

б) если  $\beta \sim \beta_1$  и  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta} = k$ , то  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta_1}$

Свойство 4 особенно важно на практике, т.к. оно фактически означает, что предел отношения бесконечно малых не меняется при замене их на эквивалентные бесконечно малые. Этот факт дает возможность при нахождении пределов заменять бесконечно малые на эквивалентные им функции, что может сильно упростить вычисление пределов.

**Пример.** Найти предел  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\sin 7x}$

Так как  $\operatorname{tg} 5x \sim 5x$  и  $\sin 7x \sim 7x$  при  $x \rightarrow 0$ , то, заменив функции эквивалентными бесконечно малыми, получим:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\sin 7x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{7x} = \frac{5}{7}$$

**Пример.** Найти предел  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{1 - \cos x}$ .

Так как  $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} \sim 2 \left( \frac{x}{2} \right)^2$  при  $x \rightarrow 0$ , то  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\frac{x^2}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} 2x = 0$ .

**Пример.** Найти предел  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2} = \infty$ .

Если  $\alpha$  и  $\beta$  - бесконечно малые при  $x \rightarrow a$ , причем  $\beta$  - бесконечно малая более высокого порядка, чем  $\alpha$ , то  $\gamma = \alpha + \beta$  - бесконечно малая, эквивалентная  $\alpha$ . Это можно доказать следующим

равенством  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\gamma}{\alpha} = \lim_{x \rightarrow a} \left( 1 + \frac{\beta}{\alpha} \right) = 1$ .

Тогда говорят, что  $\alpha$  - **главная часть** бесконечно малой функции  $\gamma$ .

**Пример.** Функция  $x^2 + x$  - бесконечно малая при  $x \rightarrow 0$ ,  $x$  - главная часть этой функции. Чтобы показать это, запишем  $\alpha = x^2$ ,  $\beta = x$ , тогда

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x + 1) = 1.$$

**Первый замечательный предел.**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$ , где  $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ ,

$Q(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_m$  - многочлены.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^n(a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_n}{x^n})}{x^m(b_0 + \frac{b_1}{x} + \dots + \frac{b_m}{x^m})} = x^{n-m} \frac{a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_n}{x^n}}{b_0 + \frac{b_1}{x} + \dots + \frac{b_m}{x^m}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_n}{x^n}}{b_0 + \frac{b_1}{x} + \dots + \frac{b_m}{x^m}} = \frac{a_0}{b_0}$$

$$\text{Итого: } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} 0, & \text{при } n < m \\ \frac{a_0}{b_0}, & \text{при } n = m \\ \infty, & \text{при } n > m \end{cases}$$

**Второй замечательный предел.**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

**Третий замечательный предел.**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

Часто если непосредственное нахождение предела какой – либо функции представляется сложным, то можно путем преобразования функции свести задачу к нахождению замечательных пределов.

Кроме трех, изложенных выше, пределов можно записать следующие полезные на практике соотношения:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^m - 1}{x} = m.$$

**Пример.** Найти предел.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} mx}{\sin nx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx}{nx} = \frac{m}{n}$$

**Пример.** Найти предел.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} x_0}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin(x - x_0)}{(x - x_0) \cos x \cos x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin(x - x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\cos x \cos x_0} = 1 \cdot \frac{1}{\cos^2 x_0} = \frac{1}{\cos^2 x_0}$$

**Пример.** Найти предел.

$$\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sin x - \cos x}{\pi - 4x} = \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{-\frac{2}{\sqrt{2}} \sin(\pi/4 - x)}{\pi - 4x} = \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{-\sin(\pi/4 - x)}{2\sqrt{2}(\pi/4 - x)} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

**Пример.** Найти предел.

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos x}{\pi - 2x} = \left\{ \begin{array}{l} y = \pi/2 - x \\ x = \pi/2 - y \\ \pi - 2x = \pi - \pi + 2y \end{array} \right\} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\cos(\pi/2 - y)}{2y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = \frac{1}{2}$$

**Пример.** Найти предел.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+3}{x-1} \right)^{x+3} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-1+4}{x-1} \right)^{x+3} = \left\{ \begin{array}{l} y = x-1 \\ x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty \end{array} \right\} = \lim_{y \rightarrow \infty} \left( \frac{y+4}{y} \right)^{y+4} = \lim_{y \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{4}{y} \right)^y \cdot \lim_{y \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{4}{y} \right)^4 = \\ &= \left\{ z = \frac{y}{4} \right\} = \lim_{z \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{z} \right)^{4z} = \left( \lim_{z \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{z} \right)^z \right)^4 = e^4 \end{aligned}$$

**Пример.** Найти предел  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 8x + 12}$ .

Для нахождения этого предела разложим на множители числитель и знаменатель данной дроби.

$$x^2 - 6x + 8 = 0;$$

$$x^2 - 8x + 12 = 0;$$

$$D = 36 - 32 = 4; \quad D = 64 - 48 = 16;$$

$$x_1 = (6 + 2)/2 = 4;$$

$$x_1 = (8 + 4)/2 = 6;$$

$$x_2 = (6 - 2)/2 = 2;$$

$$x_2 = (8 - 4)/2 = 2;$$

Тогда  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-4)}{(x-2)(x-6)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-4}{x-6} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

**Пример.** Найти предел.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}}{x^2 - x} \quad \text{домножим числитель и знаменатель дроби на сопряженное}$$

$$\text{выражение: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x+x^2 - 1+x-x^2}{x(x-1)(\sqrt{1+x+x^2} + \sqrt{1-x+x^2})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x(x-1)(\sqrt{1+x+x^2} + \sqrt{1-x+x^2})} =$$

$$= \frac{2}{-1 \cdot (1+1)} = -1.$$

**Пример.** Найти предел.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9} = \{x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)\} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-2)(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \frac{3-2}{3+3} = \frac{1}{6}$$

**Пример.** Найти предел  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x^2 - 3x + 2}$ .

Разложим числитель и знаменатель на множители.

$$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$$

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x-2)(x-3), \text{ т.к.}$$

$$\begin{array}{r} x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \quad x - 1 \\ x^3 - x^2x^2 - 5x + 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} - 5x^2 + 11x \\ - 5x^2 + 5x \\ \hline 6x - 6 \\ 6x - 6 \end{array}$$

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$$

Тогда  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x-1)(x-2)} = -2$

**Пример.** Найти предел.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(a+2h) - 2\sin(a+h) + \sin a}{h^2} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2\sin \frac{2a+2h}{2} \cos \frac{2h}{2} - 2\sin(a+h)}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2\sin(a+h)(\cosh - 1)}{h^2} = \\ &= 2 \lim_{h \rightarrow 0} \sin(a+h) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2\sin^2(h/2)}{4(h/2)^2} = 2\sin a \cdot (-1/2) = -\sin a \end{aligned}$$

**Для самостоятельного решения:**

1)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 + 2x^2 + 5x - 6}{x^3 + 2x^2 + 7x - 1} = \infty$

2)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x^3 + 4x + 5)(x^2 + x + 1)}{(x + 2)(x^4 + 2x^3 + 7x^2 + x - 1)} = 2$

3)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 8x + 12} = \frac{3}{4}$

4)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{4 + x + x^2} - 2}{x + 1} = -\frac{1}{4}$

5)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x \sin x} - 1}{x^2} = \frac{1}{2}$

6)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt[3]{1+x} - 1} = 3$

7)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{7+2x-x^2}}{x^2 - 2x} = \frac{\sqrt{7}}{4}$

8)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}{3x^4 - 16x^3 + 24x^2 - 16}$  - не определен.

## ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Дайте определение предела функции точке.
2. Дайте определение предела функции на бесконечности.
3. Что такое односторонние пределы функции?
4. Сформулируйте основные теоремы о пределах функций.
5. Что такое первый, второй и третий замечательные пределы?
6. Дайте определение бесконечно малой функции.
7. Сформулируйте основные свойства бесконечно малых функций.
8. Сформулируйте принцип эквивалентности бесконечно малых функций.
9. Дайте определение бесконечно большой функции.
10. Сформулируйте основные свойства бесконечно больших функций.
11. В чем заключается связь бесконечно больших и бесконечно малых функций?

## Лекция № 9. Непрерывность функции и ее разрывы.

### 9.1. Непрерывность функции в точке.

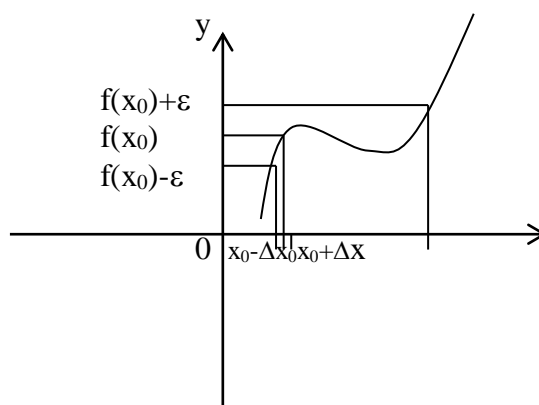
**Определение.** Функция  $f(x)$ , определенная в окрестности некоторой точки  $x_0$ , называется **непрерывной в точке**  $x_0$ , если предел функции и ее значение в этой точке равны, т.е.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

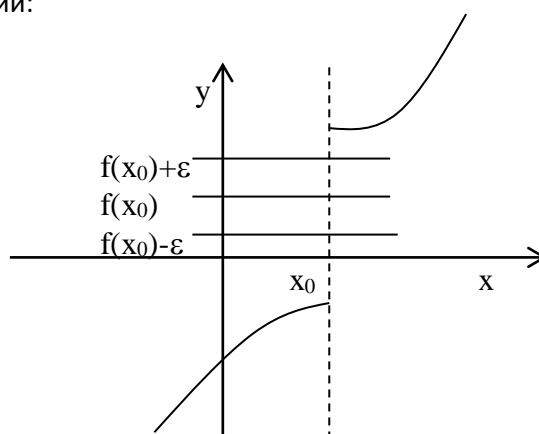
Тот же факт можно записать иначе:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} x)$

**Определение.** Если функция  $f(x)$  определена в некоторой окрестности точки  $x_0$ , но не является непрерывной в самой точке  $x_0$ , то она называется **разрывной** функцией, а точка  $x_0$  – точкой разрыва.

Пример непрерывной функции:



Пример разрывной функции:



**Определение.** Функция  $f(x)$  называется непрерывной в точке  $x_0$ , если для любого положительного числа  $\varepsilon > 0$  существует такое число  $\Delta > 0$ , что для любых  $x$ , удовлетворяющих условию

$$|x - x_0| < \Delta$$

верно неравенство

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

**Определение.** Функция  $f(x)$  называется **непрерывной** в точке  $x = x_0$ , если приращение функции в точке  $x_0$  является бесконечно малой величиной.

$$f(x) = f(x_0) + \alpha(x)$$

где  $\alpha(x)$  – бесконечно малая при  $x \rightarrow x_0$ .

## 9.2. Свойства непрерывных функций.

1) Сумма, разность и произведение непрерывных в точке  $x_0$  функций – есть функция, непрерывная в точке  $x_0$ .

2) Частное двух непрерывных функций  $\frac{f(x)}{g(x)}$  – есть непрерывная функция при условии, что  $g(x)$  не равна нулю в точке  $x_0$ .

3) Суперпозиция непрерывных функций – есть непрерывная функция.

Это свойство может быть записано следующим образом:

Если  $u = f(x)$ ,  $v = g(x)$  – непрерывные функции в точке  $x = x_0$ , то функция  $v = g(f(x))$  – тоже непрерывная функция в этой точке.

Справедливость приведенных выше свойств можно легко доказать, используя теоремы о пределах.

## 9.3. Непрерывность некоторых элементарных функций.

1) Функция  $f(x) = C$ ,  $C = \text{const}$  – непрерывная функция на всей области определения.

2) Рациональная функция  $f(x) = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m}$  непрерывна для всех значений  $x$ , кроме тех, при которых знаменатель обращается в ноль. Таким образом, функция этого вида непрерывна на всей области определения.

3) Тригонометрические функции непрерывны на своей области определения.

**Докажем свойство 3 для функции  $y = \sin x$ .**

Запишем приращение функции  $\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x$ , или после преобразования:

$$\Delta y = 2 \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin \frac{\Delta x}{2}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 2 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin \frac{\Delta x}{2} \right) = 0$$



Действительно, имеется предел произведения двух функций  $\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$  и  $\sin \frac{\Delta x}{2}$ . При этом

функция косинус – ограниченная функция при  $\Delta x \rightarrow 0$   $\left|\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\right| \leq 1$ , а т.к.

предел функции синус  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin \frac{\Delta x}{2} = 0$ , то она является бесконечно малой при  $\Delta x \rightarrow 0$ .

Таким образом, имеется произведение ограниченной функции на бесконечно малую, следовательно это произведение, т.е. функция  $\Delta y$  – бесконечно малая. В соответствии с рассмотренными выше определениями, функция  $y = \sin x$  – непрерывная функция для любого значения  $x = x_0$  из области определения, т.к. ее приращение в этой точке – бесконечно малая величина.

Аналогично можно доказать непрерывность остальных тригонометрических функций на всей области определения.

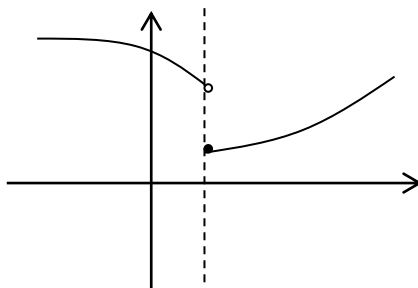
Вообще следует заметить, что все основные элементарные функции непрерывны на всей своей области определения.

#### 9.4. Точки разрыва и их классификация.

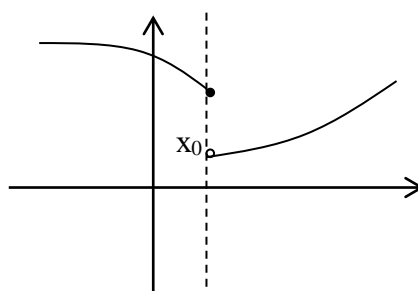
Рассмотрим некоторую функцию  $f(x)$ , непрерывную в окрестности точки  $x_0$ , за исключением может быть самой этой точки. Из определения точки разрыва функции следует, что  $x = x_0$  является точкой разрыва, если функция не определена в этой точке, или не является в ней непрерывной.

Следует отметить также, что непрерывность функции может быть односторонней. Поясним это следующим образом.

Если односторонний предел (см. выше)  $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = f(x_0)$ , то функция называется непрерывной справа.



Если односторонний предел (см. выше)  $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = f(x_0)$ , то функция называется непрерывной слева.



**Определение.** Точка  $x_0$  называется **точкой разрыва** функции  $f(x)$ , если  $f(x)$  не определена в точке  $x_0$  или не является непрерывной в этой точке.

**Определение.** Точка  $x_0$  называется **точкой разрыва 1-го рода**, если в этой точке функция  $f(x)$  имеет конечные, но не равные друг другу левый и правый пределы.

$$\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x)$$

Для выполнения условий этого определения не требуется, чтобы функция была определена в точке  $x = x_0$ , достаточно того, что она определена слева и справа от нее.

Из определения можно сделать вывод, что в точке разрыва 1-го рода функция может иметь только конечный скачок. В некоторых частных случаях точку разрыва 1-го рода еще иногда называют **устранимой** точкой разрыва, но подробнее об этом поговорим ниже.

**Определение.** Точка  $x_0$  называется **точкой разрыва 2-го рода**, если в этой точке функция  $f(x)$  не имеет хотя бы одного из односторонних пределов или хотя бы один из них бесконечен.

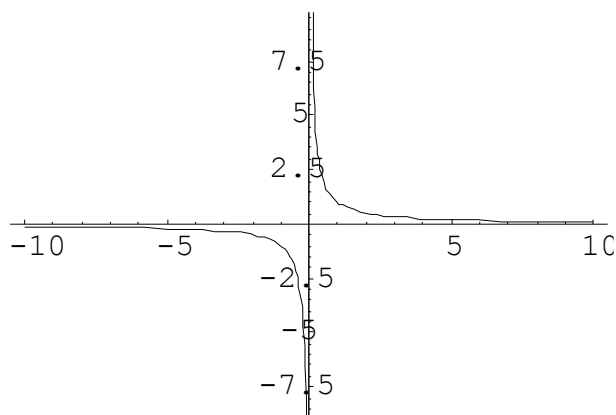
**Пример.** Функция Дирихле (Дирихле Петер Густав(1805-1859) – немецкий математик, член-корреспондент Петербургской АН 1837г)

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x - \text{рациональное число} \\ 0, & x - \text{иррациональное число} \end{cases}$$

не является непрерывной в любой точке  $x_0$ .

**Пример.** Функция  $f(x) = \frac{1}{x}$  имеет в точке  $x_0 = 0$  точку разрыва 2-го рода, т.к.

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) = -\infty.$$

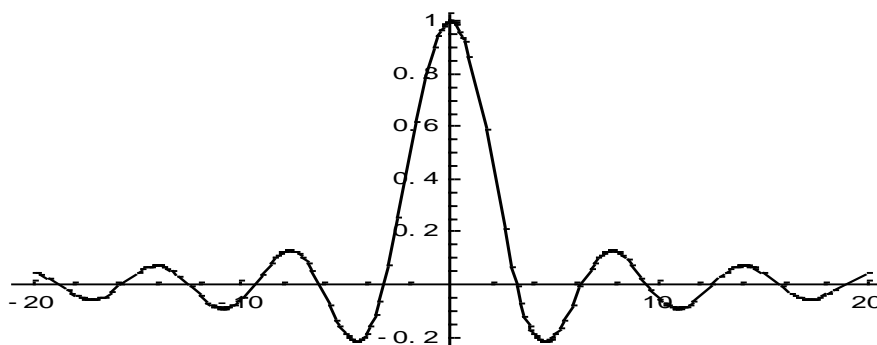


**Пример.**  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

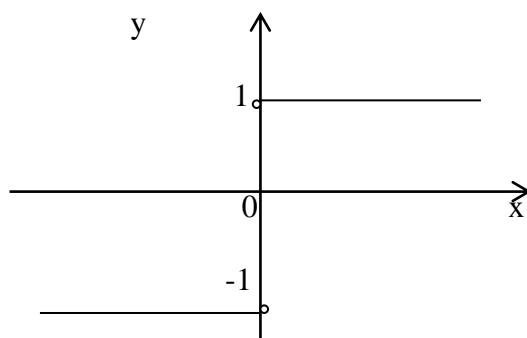
Функция не определена в точке  $x = 0$ , но имеет в ней конечный предел  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ , т.е. в точке  $x = 0$  функция имеет точку разрыва 1 – го рода. Это – устранимая точка разрыва, т.к. если доопределить функцию:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{при } x \neq 0 \\ 1, & \text{при } x = 0 \end{cases}$$

График этой функции:



**Пример.**  $f(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1, & \text{при } x > 0 \\ -1, & \text{при } x < 0 \end{cases}$



Эта функция также обозначается  $\text{sign}(x)$  – знак  $x$ . В точке  $x = 0$  функция не определена. Т.к. левый и правый пределы функции различны, то точка разрыва – 1 – го рода. Если доопределить функцию в точке  $x = 0$ , положив  $f(0) = 1$ , то функция будет непрерывна справа, если положить  $f(0) = -1$ , то функция будет непрерывной слева, если положить  $f(x)$  равное какому-либо числу, отличному от 1 или  $-1$ , то функция не будет непрерывна ни слева, ни справа, но во всех случаях тем не менее будет иметь в точке  $x = 0$  разрыв 1 – го рода. В этом примере точка разрыва 1 – го рода не является устранимой.

Таким образом, для того, чтобы точка разрыва 1 – го рода была устранимой, необходимо, чтобы односторонние пределы справа и слева были конечны и равны, а функция была бы в этой точке не определена.

#### 9.5. Непрерывность функции на интервале и на отрезке.

**Определение.** Функция  $f(x)$  называется **непрерывной на интервале (отрезке)**, если она непрерывна в любой точке интервала (отрезка).

При этом не требуется непрерывность функции на концах отрезка или интервала, необходима только односторонняя непрерывность на концах отрезка или интервала.

Свойства функций, непрерывных на отрезке.

**Свойство 1:** (Первая теорема Вейерштрасса (Вейерштрасс Карл (1815-1897)- немецкий математик)). Функция, непрерывная на отрезке, ограничена на этом отрезке, т.е. на отрезке  $[a, b]$  выполняется условие  $-M \leq f(x) \leq M$ .

Доказательство этого свойства основано на том, что функция, непрерывная в точке  $x_0$ , ограничена в некоторой ее окрестности, а если разбивать отрезок  $[a, b]$  на бесконечное количество отрезков, которые “стягиваются” к точке  $x_0$ , то образуется некоторая окрестность точки  $x_0$ .

**Свойство 2:** Функция, непрерывная на отрезке  $[a, b]$ , принимает на нем наибольшее и наименьшее значения.

Т.е. существуют такие значения  $x_1$  и  $x_2$ , что  $f(x_1) = m$ ,  $f(x_2) = M$ , причем

$$m \leq f(x) \leq M$$

Отметим эти наибольшие и наименьшие значения функция может принимать на отрезке и несколько раз (например –  $f(x) = \sin x$ ).

Разность между наибольшим и наименьшим значением функции на отрезке называется **колебанием** функции на отрезке.

**Свойство 3:** (Вторая теорема Больцано – Коши). Функция, непрерывная на отрезке  $[a, b]$ , принимает на этом отрезке все значения между двумя произвольными величинами.

**Свойство 4:** Если функция  $f(x)$  непрерывна в точке  $x = x_0$ , то существует некоторая окрестность точки  $x_0$ , в которой функция сохраняет знак.

**Свойство 5:** (Первая теорема Больцано (1781-1848) – Коши). Если функция  $f(x)$ - непрерывная на отрезке  $[a, b]$  и имеет на концах отрезка значения противоположных знаков, то существует такая точка внутри этого отрезка, где  $f(x) = 0$ .

Т.е. если  $\text{sign}(f(a)) \neq \text{sign}(f(b))$ , то  $\exists x_0: f(x_0) = 0$ .

**Определение.** Функция  $f(x)$  называется **равномерно непрерывной** на отрезке  $[a, b]$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\Delta > 0$  такое, что для любых точек  $x_1 \in [a, b]$  и  $x_2 \in [a, b]$  таких, что

$$|x_2 - x_1| < \Delta$$

верно неравенство

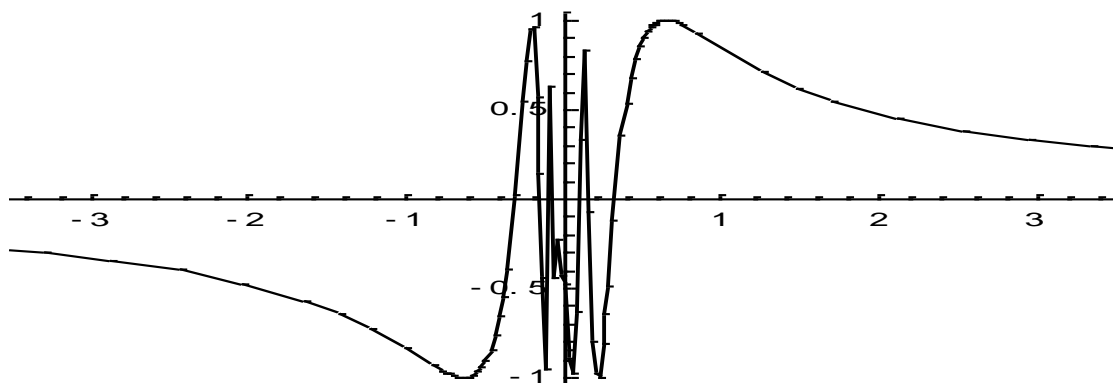
$$|f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon$$

Отличие равномерной непрерывности от “обычной” в том, что для любого  $\varepsilon$  существует свое  $\Delta$ , не зависящее от  $x$ , а при “обычной” непрерывности  $\Delta$  зависит от  $\varepsilon$  и  $x$ .

**Свойство 6:** Теорема Кантора (Кантор Георг (1845-1918)- немецкий математик). Функция, непрерывная на отрезке, равномерно непрерывна на нем.

(Это свойство справедливо только для отрезков, а не для интервалов и полуинтервалов.)

**Пример.**  $y = \sin \frac{1}{x}$



Функция  $y = \sin \frac{1}{x}$  непрерывна на интервале  $(0, a)$ , но не является на нем равномерно непрерывной, т.к. существует такое число  $\Delta > 0$  такое, что существуют значения  $x_1$  и  $x_2$  такие, что  $|f(x_1) - f(x_2)| > \varepsilon$ ,  $\varepsilon$  - любое число при условии, что  $x_1$  и  $x_2$  близки к нулю.

**Свойство 7:** Если функция  $f(x)$  определена, монотонна и непрерывна на некотором промежутке, то и обратная ей функция  $x = g(y)$  тоже однозначна, монотонна и непрерывна.

**Пример.** Исследовать на непрерывность функцию и определить тип точек разрыва, если они есть.

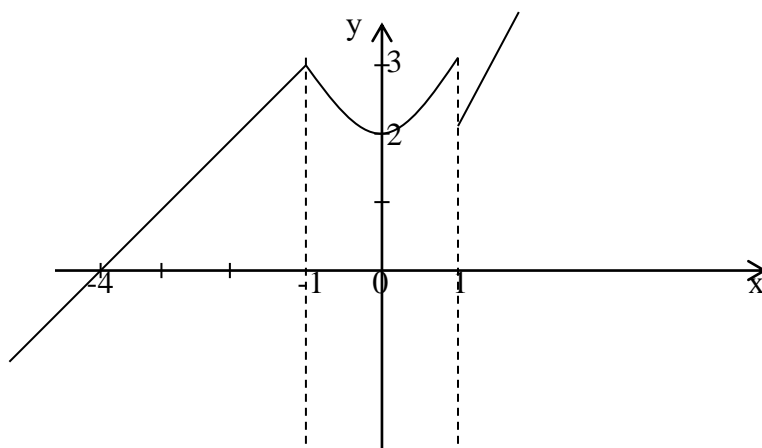
$$f(x) = \begin{cases} x + 4, & x < -1 \\ x^2 + 2, & -1 \leq x \leq 1 \\ 2x, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} f(x) = 3 \quad \lim_{x \rightarrow -1-0} f(x) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) = 3 \quad \lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) = 2$$

в точке  $x = -1$  функция непрерывна

в точке  $x = 1$  точка разрыва 1 – го рода



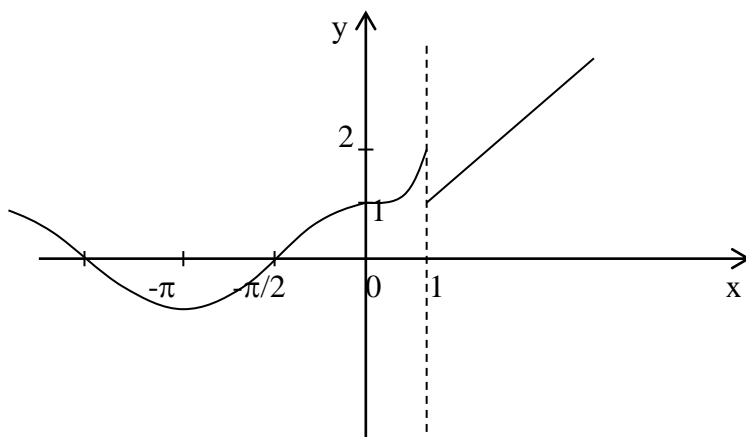
**Пример.** Исследовать на непрерывность функцию и определить тип точек разрыва, если они есть.

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \leq 0 \\ x^2 + 1, & 0 < x < 1 \\ x, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = 1$$

в точке  $x = 0$  функция непрерывна, в точке  $x = 1$  точка разрыва 1 – го рода



## ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Дайте определение непрерывности функции в точке.
2. Приведите примеры функций непрерывных в точке.
3. Дайте определение непрерывности функции на интервале.
4. Что такое точка разрыва? Точки разрыва первого и второго рода.
5. Приведите примеры точек разрыва первого и второго рода.
6. Сформулируйте основные свойства непрерывных функций.
7. Приведите примеры непрерывности элементарных функций.

## Практическая работа №2.

**Тема:** Определение непрерывности функции, точек разрыва функции.

**Цель:** Развивать и совершенствовать умение определять непрерывность функции, находить точки разрыва функции, закрепить навык вычисления пределов с помощью формул первого и второго замечательных пределов.

### Обеспечение практической работы:

Теоретический материал методической рекомендации к практической работе.

Учебник. Богомолов Н.В. «Математика». – М.: Дрофа, 2006.

Индивидуальные карточки с вариантом практической работы.

**Теоретический материал, примеры на определение непрерывности функции,**

### *Определение непрерывности функции*

**Определение** Пусть функция  $f(x)$  определена на некотором интервале  $(a; b)$ , для которого  $x_0$  -- внутренняя точка. Функция  $f(x)$  называется *непрерывной в точке  $x_0$* , если существует предел  $f(x)$  при  $x \rightarrow x_0$  и этот предел равен значению  $f(x_0)$ , то есть

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Пусть функция  $f(x)$  определена на некотором полуинтервале  $[x_0; b)$ , для которого  $x_0$  -- левый конец. Функция  $f(x)$  называется *непрерывной справа в точке  $x_0$* , если существует предел  $f(x)$  при  $x \rightarrow x_0+$  и этот предел равен значению  $f(x_0)$ , то есть

$$\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = f(x_0).$$

Пусть, наконец, функция  $f(x)$  определена на некотором полуинтервале  $(a; x_0]$ , для которого  $x_0$  -- правый конец. Функция  $f(x)$  называется *непрерывной слева в*



точке  $x_0$ , если существует предел  $f(x)$  при  $x \rightarrow x_0 -$  и этот предел равен значению  $f(x_0)$ , то есть

$$\lim_{x \rightarrow x_0 -} f(x) = f(x_0).$$

Из теоремы о связи двустороннего предела с односторонними (теорема 2.1) сразу следует, как уже отмечалось в главе 2, что имеет место следующее предложение.

**Предложение :** Функция  $f(x)$  тогда и только тогда непрерывна в точке  $x_0$ , когда она непрерывна в точке  $x_0$  справа и слева, то есть когда выполнены следующие условия:

1) функция  $f(x)$  определена в точке  $x_0$  и в некоторой окрестности этой точки;

2) существует предел значений функции слева:  $\lim_{x \rightarrow x_0 -} f(x) = f(x_0 -)$  ;

3) существует предел значений функции справа:  $\lim_{x \rightarrow x_0 +} f(x) = f(x_0 +)$  ;

4) эти два предела совпадают между собой и со значением функции в точке  $x_0$  :  $f(x_0 -) = f(x_0 +) = f(x_0)$  .

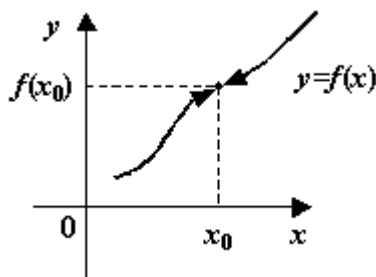


Рис. Функция непрерывна: пределы слева и справа совпадают с  $f(x_0)$

Точка  $x_0$ , в которой функция непрерывна, называется **точкой непрерывности** функции  $f(x)$ ; так же определяются точки непрерывности слева и справа.

**Пример 1** Пусть  $f(x) = \sqrt{|x|}$  и  $x_0 = 0$ . Тогда  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{|x|} = 0$  и  $f(0) = \sqrt{0} = 0$ . Эти значения совпадают, значит, функция  $f$  непрерывна в точке  $x_0 = 0$ .

(Функция  $f(x) = \sqrt{|x|} = (x^2)^{\frac{1}{4}}$  -- элементарная функция;  $x_0 = 0$  -- точка её области определения  $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ . Все элементарные функции непрерывны во всех внутренних точках своих областей определения, в том числе и эта. Так что в этом примере можно было бы заменить  $f(x)$  любой элементарной функцией, а  $x_0 = 0$  -- любой внутренней точкой области  $\mathcal{D}(f)$ , и вывод остался бы тем же.)

**Пример 2** Рассмотрим функцию  $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{при } x \neq 0; \\ 1, & \text{при } x = 0 \end{cases}$  и точку  $x_0 = 0$ . При  $x \neq 0$  функция задаётся формулой  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ , при этом имеем  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  (первый замечательный предел). Это значение совпадает с тем, которое задано при  $x = 0$ :  $f(0) = 1$ . Итак,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 1$ , что означает непрерывность функции  $f$  при  $x_0 = 0$ .

Тем, кто внимательно изучил данное в главе 2 общее понятие базы предела, можно предложить продумать и доказать следующее утверждение:

### **Определение точек разрыва**

Дадим теперь определение точек разрыва функции.

**Определение** Точка  $x_0$  называется *точкой разрыва* функции  $f(x)$ , если она определена в некоторой проколотой окрестности точки  $x_0$  (то есть определена на

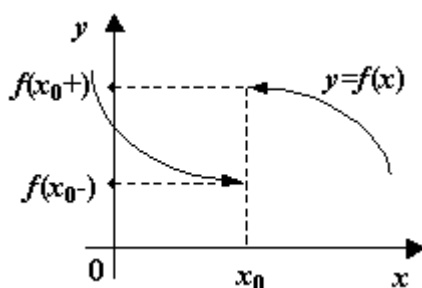
некотором интервале, для которого  $x_0$  служит внутренней точкой, но в самой точке  $x_0$ , возможно, не определена) и выполняется хотя бы одно из следующих условий:

- 1) не существует предела слева  $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x)$ ;
- 2) не существует предела справа  $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x)$ ;
- 3) пределы слева  $f(x_0-) = \lim_{x \rightarrow x_0-} f(x)$  и справа  $f(x_0+) = \lim_{x \rightarrow x_0+} f(x)$  существуют, но не равны друг другу:  $f(x_0-) \neq f(x_0+)$ ;
- 4) пределы слева  $f(x_0-) = \lim_{x \rightarrow x_0-} f(x)$  и справа  $f(x_0+) = \lim_{x \rightarrow x_0+} f(x)$  существуют и равны друг другу:  $f(x_0-) = f(x_0+)$ , но не совпадают со значением функции в точке  $x_0$ :  $f(x_0) \neq f(x_0-) = f(x_0+)$ , или функция  $f(x)$  не определена в точке  $x_0$ .

Если имеет место либо случай 3, либо случай 4, то точка разрыва  $x_0$  называется *точкой разрыва первого рода*, а поведение функции в окрестности точки  $x_0$  называется *разрывом первого рода* в точке  $x_0$ ; в случае 4 точка разрыва первого рода называется *устранимой точкой разрыва*, а разрыв функции в этой точке -- *устранимым разрывом*.

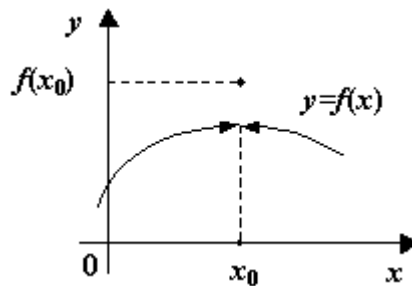
Если же имеет место либо случай 1, либо случай 2 (либо и тот и другой сразу), то точка разрыва  $x_0$  называется *точкой разрыва второго рода*, а поведение функции в окрестности этой точки -- *разрывом второго рода* в точке  $x_0$ .

Итак, если функция  $f(x)$  имеет разрыв первого рода в точке  $x_0$ , то существуют, как часто говорят, значения функции "на берегах разрыва":  $f(x_0-)$  и  $f(x_0+)$ , но точка  $x_0$  не является точкой непрерывности.



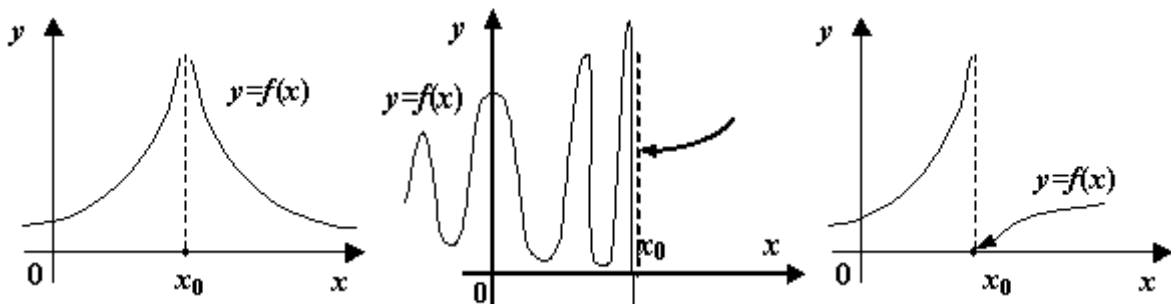
$x_0$  -- точка разрыва первого рода

Если значения на берегах разрыва разные, то значение функции в точке  $x_0$  может быть любым (или вообще отсутствовать), всё равно  $x_0$  будет давать разрыв первого рода. Если же значения на берегах разрыва совпадают, то для наличия разрыва нужно, чтобы либо эти совпадающие значения были отличны от значения функции в точке  $x_0$ , либо функция в этой точке была вовсе не определена. Если в этом случае переопределить (или доопределить) функцию  $f(x)$  в точке  $x_0$ , положив  $f(x_0) = f(x_0-) = f(x_0+)$ , то полученная изменённая функция будет уже непрерывна в точке  $x_0$  и разрыв в точке  $x_0$  исчезнет; отсюда и название такого разрыва -- устранимый.



$x_0$  -- точка устранимого разрыва

Наконец, к разрывам второго рода, как видно из определения, относятся все разрывы, которые не принадлежат к разрывам первого рода; некоторые из возможных способов поведения функции в окрестности точки  $x_0$ , где происходит разрыв второго рода, представлены на следующем рисунке.



$x_0$  -- точка разрыва второго рода. Некоторые возможные варианты

$$f(x) = \frac{|x^2 - x|}{x^2 - x}$$

**Пример 3** Рассмотрим функцию , для которой

$$\mathcal{D}(f) = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - x \neq 0\} = (-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty).$$

Функция имеет разрывы при  $x = 0$  и при  $x = 1$ . Нетрудно видеть, что при

$$x \neq 0, x \neq 1 \quad f(x) = \operatorname{sign}(x^2 - 1) = \begin{cases} 1, & \text{если } x < 0 \text{ или } x > 1; \\ -1, & \text{если } 0 < x < 1. \end{cases}$$

В точках  $x = 0$  и  $x = 1$

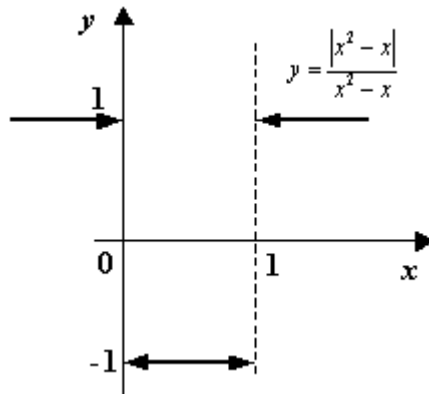
функция имеет неустранимые разрывы первого рода. В точке  $x = 0$  имеем:

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} 1 = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} (-1) = -1$$

(значения на краях разрыва существуют, но не совпадают); в точке  $x = 1$  --

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} (-1) = -1; \quad \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} 1 = 1$$

(снова пределы слева и справа существуют, но не совпадают).



$$y = \frac{|x^2 - x|}{x^2 - x}$$

График функции

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

**Пример 4** Функция имеет при  $x = 0$  разрыв второго рода, так как

$$f(x) \rightarrow +\infty \quad \text{при} \quad x \rightarrow 0+ \quad \text{и} \quad f(x) \rightarrow -\infty \quad \text{при} \quad x \rightarrow 0-.$$

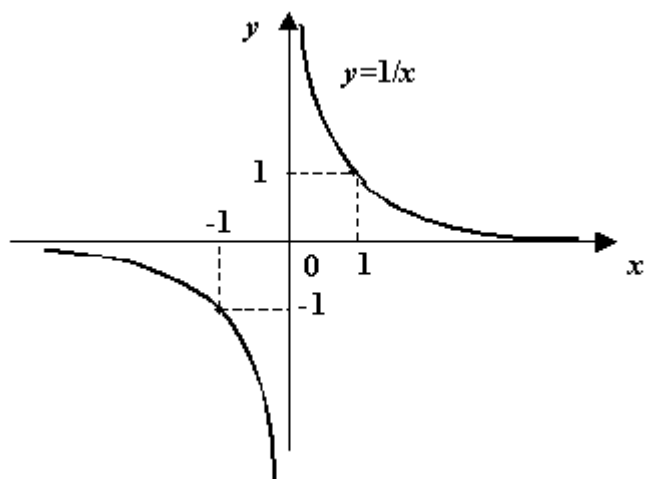


Рис.3.6.График функции  $f(x) = \frac{1}{x}$

**Пример 5** Функция  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  имеет при  $x = 0$  разрыв второго рода, так как  $f(x) \rightarrow +\infty$  при  $x \rightarrow 0+$  и при  $x \rightarrow 0-$ .

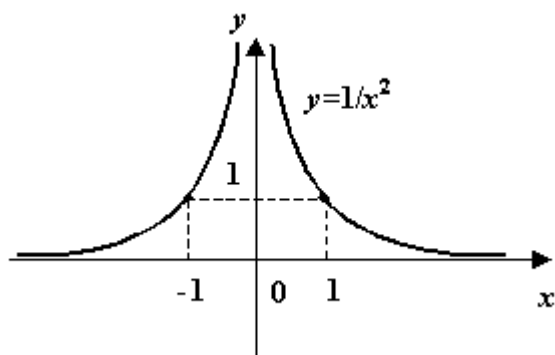


Рис. График функции  $f(x) = \frac{1}{x^2}$

*Первый замечательный предел равен 1 :*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

*Вторым замечательным пределом называется предел*

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Число  $e$ , заданное этим пределом, играет очень большую роль как в математическом анализе, так и в других разделах математики. Число  $e$  часто называют *основанием натуральных логарифмов*.

Второй замечательный предел существует. Его значение  $e$  -- число, лежащее между 2 и 3.

Более подробное изучение числа  $e$  показывает, что  $e$  -- иррациональное число, несколько первых десятичных знаков которого таковы:

$$e = 2,7182818285\dots$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+1}{x+3} \right)^{2x+1}$$

**Пример 6.** Найдём предел

Здесь основание степени имеет предел

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x+3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{3}{x}} = \frac{1+0}{1+0} = 1,$$

$$2x+1 \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \infty$$

а показатель степени  $2x+1$   $\xrightarrow{x \rightarrow \infty} \infty$ . Поэтому можно применять тот же приём сведения ко второму замечательному пределу, что в предыдущем примере. Для начала найдём, что следует взять за бесконечно малую величину  $\alpha$ . Поскольку основание степени стремится к 1, то оно равно  $1 + \alpha$ , где  $\alpha \rightarrow 0$  (см. [теорему 2.4](#)). Значит,

$$\alpha = \frac{x+1}{x+3} - 1 = \frac{x+1-x-3}{x+3} = \frac{-2}{x+3}.$$

Теперь преобразуем функцию, стоящую под знаком предела:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+1}{x+3} \right)^{2x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \left( 1 + \frac{-2}{x+3} \right)^{\frac{x+3}{-2}} \right]^{\frac{-2}{x+3} \cdot (2x+1)}.$$

$$(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$$

Выражение, стоящее в квадратных скобках, имеет вид  $(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$  и при  $\alpha \rightarrow 0$  стремится к числу  $e$  (это второй замечательный предел), а предел показателя степени мы найдём отдельно:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2(2x+1)}{x+3} = -2 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{3}{x}} = -2 \cdot \frac{2+0}{1+0} = -4.$$

Поэтому

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+1}{x+3} \right)^{2x+1} = e^{-4} = \frac{1}{e^4}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{3}{x}} = [1^\infty] = \lim_{x \rightarrow 0} \left( (1+x)^{\frac{1}{x}} \right)^3 = e^3.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{2}{x} \right)^x = [1^\infty] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \left( 1 + \frac{2}{x} \right)^{\frac{x}{2}} \right)^2 = e^2.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{4}{x} \right)^{\frac{x}{3}} = [1^\infty] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \left( 1 + \frac{4}{x} \right)^{\frac{x}{4}} \right)^{\frac{4}{3}} = e^{\frac{4}{3}}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (2x-3)^{\frac{1}{x-2}} = [1^\infty] = \lim_{x \rightarrow 2} (1+2x-4)^{\frac{1}{2x-4} \cdot \frac{2x-4}{x-2}} = \lim_{x \rightarrow 2} e^{\frac{2(x-2)}{x-2}} = e^2.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+3}{x-1} \right)^{x+3} = [1^\infty] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-1+4}{x-1} \right)^{x+3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{4}{x-1} \right)^{\frac{x-1}{4} \cdot \frac{4(x+3)}{x-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{4x+12}{x-1}} = e^4.$$



Методические рекомендации к практической работе №1  
«Вычисление пределов функций»



Практическая работа № 1.

Тема: Вычисление пределов функций.

Цель: Проверка усвоения знаний по вычислению пределов функций с помощью раскрытия неопределённостей. Повторить и систематизировать знания по данной теме.

Обеспечение практической работы:

Теоретический материал методической рекомендации к практической работе.

Учебник. Богомолов Н.В. «Математика». – М.: Дрофа, 2006.

Индивидуальные карточки с вариантом практической работы.

Теоретический материал, примеры вычисления пределов.

Определение предела. Число  $b$  – предел функции  $f(x)$  при  $x$  стремящемся к  $a$ , если для каждого положительного числа  $\varepsilon$  можно указать такое положительное число  $\delta$ , что для всех  $x$ , отличных от  $a$  и удовлетворяющих неравенству  $|x-a|<\delta$ , имеет место неравенство  $|f(x)-b|<\varepsilon$

Обозначение предела. Если  $b$  есть предел функции  $f(x)$  при  $x$  стремящемся к  $a$ , то записывают это так:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b.$$

Определение непрерывной функции. Функция  $f(x)$  непрерывна в точке  $a$ , если

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Вычисление пределов функций основано на применении следующих основных теорем:

ТЕОРЕМА 1. Предел суммы двух функций при  $x$  стремящемся к  $a$  равен сумме пределов этих функций, то есть

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

ТЕОРЕМА 2. Предел произведения двух функций при  $x$  стремящемся к  $a$  равен произведению пределов этих функций, то есть

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

ТЕОРЕМА 3. Предел частного двух функций при  $x$  стремящемся к  $a$  равен частному пределов, если предел знаменателя отличен от нуля, то есть

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}, \quad \text{если } \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$$

и равен плюс (минус) бесконечности, если предел знаменателя 0, а предел числителя конечен и отличен от нуля.

## ВЫЧИСЛЕНИЕ НЕСЛОЖНЫХ ПРЕДЕЛОВ

Пример 1.

$$\lim_{x \rightarrow 7} (x + 3) = \lim_{x \rightarrow 7} x + \lim_{x \rightarrow 7} 3 = 7 + 3 = 10.$$

*Комментарий.* Здесь была использована [теорема о пределе суммы](#).

Пример 2.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x+2}{2x-7} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (3x+2)}{\lim_{x \rightarrow 1} (2x-7)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (3x) + \lim_{x \rightarrow 1} 2}{\lim_{x \rightarrow 1} (2x) + \lim_{x \rightarrow 1} (-7)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} 3 \cdot \lim_{x \rightarrow 1} x + 2}{\lim_{x \rightarrow 1} 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 1} x - 7} =$$

$$= \frac{3 \cdot 1 + 2}{2 \cdot 1 - 7} = 5 / (-5) = -1.$$

*Комментарий.* На первом шаге была применена [теорема о пределе частного](#), так как предел знаменателя не равен нулю. На втором шаге использовалась [теорема о пределе суммы](#) для числителя и знаменателя дроби. После была применена [теорема о пределе произведения](#).

Пример 3. Найти предел

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}.$$

Знаменатель и числитель дроби при  $x$  стремящемся к 2 стремятся к нулю, поэтому [теорема о пределе частного](#) здесь неприменима. В таких случаях нужно попытаться упростить дробь. Имеем

$$\frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x+2.$$

Это преобразование справедливо при всех значениях  $x$ , отличных от 2, поэтому в соответствии с определением предела можем написать

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) = \lim_{x \rightarrow 2} x + \lim_{x \rightarrow 2} 2 =$$

$$= 2 + 2 = 4.$$

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ С ПОМОЩЬЮ ТЕОРЕМЫ О ПЕРВОМ ЗАМЕЧАТЕЛЬНОМ ПРЕДЕЛЕ

Пример 1.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin(x)}{x} \cdot \frac{1}{\cos(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos(x)} =$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x)} = 1 \cdot \frac{1}{1} = 1.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_k(n)}{Q_m(n)} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0}, & \text{если } k = m \\ 0, & \text{если } k < m \\ \infty \cdot \operatorname{sgn} \frac{a_0}{b_0}, & \text{если } k > m \end{cases}$$

*Пример..* Найти пределы:

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n + n^2 - 3n^3 + 2}{4n^3 + n + 5}, \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - 5n^2 + 4}{n^3 + 3},$$

$$в) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + n + 1}{n^2 - 2n^3 + 5}$$

Решение.

$$а) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n + n^2 - 3n^3 + 2}{4n^3 + n + 5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3n^3}{4n^3} = -\frac{3}{4},$$

$$б) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - 5n^2 + 4}{n^3 + 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-5n^2}{n^3} = 0,$$

$$в) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + n + 1}{n^2 - 2n^3 + 5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4}{-2n^3} = -\infty.$$

Следует отметить, что формулы (1.5) и (1.6) справедливы не только для многочленов целой степени, но и для многочленов дробной степени, так как  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^a} = 0$  для любого  $a > 0$ .

Пример. Найти пределы.

$$а) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{16n^6 + 1} - \sqrt[3]{8n^2 + 5} + \sqrt{n + 4}}{\sqrt[4]{n^5 + 2} - \sqrt{25n^3 + 7}},$$

$$б) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n + \sqrt{n^3 + 1}}}{\sqrt{n} - \sqrt[3]{n^2 + 5}},$$

$$в) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 \cdot 3^{n-1} - 7 \cdot 5^{n+1}}{8 \cdot 5^n + 3 \cdot 4^{n+2}},$$

Решение:

а) В числителе три слагаемых соответственно степени:  $\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ ,  $\frac{2}{3}$  и  $\frac{1}{2}$ . Следовательно, степень числителя равна  $\frac{3}{2}$ , а главный член в числителе равен  $(16n^6)^{\frac{1}{4}} = 2n^{\frac{3}{2}}$ . Аналогично,

главный член в знаменателе  $-(25n^3)^{\frac{1}{2}} = -5n^{\frac{3}{2}}$ . Имеем по формулам (1.5) и (1.6):

$$а) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{16n^6 + 1} - \sqrt[3]{8n^2 + 5} + \sqrt{n + 4}}{\sqrt[4]{n^5 + 2} - \sqrt{25n^3 + 7}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^{\frac{3}{2}}}{-5n^{\frac{3}{2}}} = -\frac{2}{5}$$

$$б) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n + \sqrt{n^3 + 1}}}{\sqrt{n} - \sqrt[3]{n^2 + 5}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\frac{3}{4}}}{-n^{\frac{2}{3}}} = -\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{12}} = -\infty,$$

$$в) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 \cdot 3^{n-1} - 7 \cdot 5^{n+1}}{8 \cdot 5^n + 3 \cdot 4^{n+2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n \left( \left( \frac{3}{5} \right)^{n-1} - 7 \cdot 5 \right)}{5^n \left( 8 + 3 \cdot 4^2 \cdot \left( \frac{4}{5} \right)^n \right)} = -\frac{35}{8},$$

$$\text{т.к. } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3}{5} \right)^{n-1} = 0 \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{4}{5} \right)^n = 0.$$

Здесь также можно было использовать идею, что главный член это старший член. Имеем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 \cdot 3^{n-1} - 7 \cdot 5^{n+1}}{8 \cdot 5^n + 3 \cdot 4^{n+2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-7 \cdot 5^{n+1}}{8 \cdot 5^n} = -\frac{35}{8},$$

Пример 1.4. (Неопределенности  $\infty - \infty$ )

а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[5]{n^5 + n^4 + 1} - \sqrt[5]{n^5 - n^4 + 1})$ , б)  $\lim_{n \rightarrow -\infty} n(\sqrt{n^2 + 1} + n)$

Решение. Для избавления от неопределенности  $\infty - \infty$  здесь следует избавиться от иррациональности в числителе, умножив и разделив данное выражение на соответствующее сопряженное выражение.

а) Используем формулу

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

Для данного примера

$$a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$$

Имеем:

$$\begin{aligned} \text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[5]{n^5 + n^4 + 1} - \sqrt[5]{n^5 - n^4 + 1}) &= \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt[5]{n^5 + n^4 + 1} - \sqrt[5]{n^5 - n^4 + 1})(\sqrt[5]{(n^5 + n^4 + 1)^4} + \sqrt[5]{(n^5 + n^4 + 1)^3(n^5 - n^4 + 1)} + \\ &+ \sqrt[5]{(n^5 + n^4 + 1)^2(n^5 - n^4 + 1)^2} + \\ &+ \sqrt[5]{(n^5 + n^4 + 1)(n^5 - n^4 + 1)^3} + \sqrt[5]{(n^5 - n^4 + 1)^4})}{\sqrt[5]{(n^5 + n^4 + 1)^4} + \sqrt[5]{(n^5 + n^4 + 1)^3(n^5 - n^4 + 1)} + \sqrt[5]{(n^5 + n^4 + 1)^2(n^5 - n^4 + 1)^2} + \\ &+ \sqrt[5]{(n^5 + n^4 + 1)(n^5 - n^4 + 1)^3} + \sqrt[5]{(n^5 - n^4 + 1)^4}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5 + n^4 + 1 - n^5 + n^4 - 1}{5 \cdot \sqrt[5]{(n^5)^4}} = \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

б) Напоминаем, что  $\sqrt{n^2} = |n|$  и при  $n \rightarrow -\infty$   $|n| = -n$ .

Имеем:

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} n(\sqrt{n^2 + 1} + n) = \lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{n(n^2 + 1 - n^2)}{\sqrt{n^2 + 1} - n} = \lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{n}{|n|\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} - n} =$$

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{n}{-n\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} - n} = \lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{n}{-n\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + 1\right)} = -\frac{1}{2}.$$



## Практическая работа № 8.

Тема: Вычисление неопределённых интегралов методом введения новой переменной.

Цель: Проверить на практике знание понятия неопределённого интеграла, умение вычислять табличные интегралы, умение вычислять неопределённый интеграл методом введения новой переменной.

Обеспечение практической работы:

Теоретический материал методической рекомендации к практической работе.

Учебник. Богомолов Н.В. «Математика». – М.: Дрофа, 2006.

Индивидуальные карточки с вариантом практической работы.

Теоретический материал и примеры вычисления неопределённого интеграла методом введения новой переменной.

### Неопределённый интеграл и таблица неопределённых интегралов

**Определение** Пусть  $f(x)$  -- функция, заданная на объединении интервалов вещественной оси. Набор всех первообразных для  $f(x)$  называется *неопределённым интегралом* от  $f(x)$  и обозначается  $\int f(x) dx$ . Операция нахождения неопределённого интеграла по заданной функции  $f(x)$  называется *интегрированием* этой функции; найти неопределённый интеграл означает *проинтегрировать* данную функцию. Функция  $f(x)$ , записанная после знака интеграла (или, как часто говорят, *под* знаком интеграла), называется *подынтегральной функцией*.

Согласно доказанным выше теоремам о виде первообразных, неопределённый интеграл от функции  $f(x)$  состоит из функций вида  $F(x) + C$ , где  $F(x)$  -- какая-либо фиксированная первообразная для  $f(x)$ , а  $C$  -- величина, постоянная на каждом из непересекающихся интервалов, на которых задана функция  $f(x)$ . Поэтому можно написать такую формулу:

$$\int f(x) dx = F(x) + C.$$

(Точнее было бы  $\int f(x) dx = \{F(x) + C\}$ , но фигурные скобки, обозначающие множество всех функций вида  $F(x) + C$ , писать в данной ситуации не принято.)

Итак, для того чтобы доказать равенство  $\int f(x) dx = F(x) + C$ , достаточно проверить, что  $F(x)$  -- первообразная для  $f(x)$ , то есть что  $F'(x) = f(x)$ .

1	$\int 0 \cdot dx = C$	1	$\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$
		1	



2	$\int 1 \cdot dx = x + C$	2	1 $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$
3	$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$	3	1 $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$
4	$\int \frac{1}{x} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln x  + C$	4	1 $\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$
5	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ ; $\int e^x dx = e^x + C$	5	1 $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left  \frac{x-a}{x+a} \right  + C$
6	$\int \sin x dx = -\cos x + C$	6	1 $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C = -\arccos \frac{x}{a} + C$
7	$\int \cos x dx = \sin x + C$	7	1 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln \left  x + \sqrt{x^2 + a^2} \right  + C$
8	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$	8	1 $\int \sqrt{x^2 + a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln \left  x + \sqrt{x^2 + a^2} \right  +$
9	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$	9	1 $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C$
10	$\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$	0	2 $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left  \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right  + C$ ; $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left  \operatorname{tg} \frac{x + \pi/2}{2} \right  + C$

### Замена переменной в неопределённом интеграле (интегрирование подстановкой).

Пусть  $\int f(x) dx = F(x) + C$ . Тогда  $\int f(t(x)) t'(x) dx = F(t(x)) + C$ . Здесь  $t(x)$  - дифференцируемая монотонная функция.

При решении задач замену переменной можно выполнить двумя способами.

1. Если в подынтегральной функции удастся сразу заметить оба сомножителя, и  $f(t(x))$ , и  $t'(x)$ , то замена переменной осуществляется подведением множителя  $t'(x)$  под знак дифференциала:  $t'(x) dx = dt$ , и задача

сводится к вычислению интеграла  $\int f(t)dt$ . Например,  $\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{-\sin x dx}{\cos x} = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = \int \frac{dt}{t}$ ,

где  $t = \cos x$ )  $= -\ln |\cos x| + C$  (аналогично находится интеграл от  $\operatorname{ctg} x$ );

$\int e^{\sin x} \cos x dx = \int e^{\sin x} d \sin x =$  (задача сведена к вычислению  $\int e^t dt$ , где  $t = \sin x$ )  $= e^{\sin x} + C$ . В более сложных задачах операция подведения под знак дифференциала может выполняться несколько раз:

$\int e^{\operatorname{arctg}^5 x^2} \operatorname{arctg}^4 x^2 \frac{x}{1+x^4} dx =$  (самое неприятное в подынтегральной функции - пятая степень арккотангенса под знаком экспоненты; если дальше не найдётся дифференциал этой функции, то интеграл, возможно, взять вообще не удастся; в то же время следующий множитель  $(\operatorname{arctg}^4 x^2)$  - производная (с точностью до постоянного множителя) степенной функции; затем следуют производные (опять с точностью до постоянных множителей) функций  $\operatorname{arctg} x^2$  и  $x^2$  по своим аргументам)

$$= \frac{1}{2} \int e^{\operatorname{arctg}^5 x^2} \operatorname{arctg}^4 x^2 \frac{1}{1+x^4} (2x dx) = \frac{1}{2} \int e^{\operatorname{arctg}^5 x^2} \operatorname{arctg}^4 x^2 \frac{1}{1+x^4} dx^2 =$$

$$= -\frac{1}{2} \int e^{\operatorname{arctg}^5 x^2} \operatorname{arctg}^4 x^2 \left( \frac{-dx^2}{1+x^4} \right) = -\frac{1}{2} \int e^{\operatorname{arctg}^5 x^2} \operatorname{arctg}^4 x^2 d \operatorname{arctg} x^2 =$$

$$= -\frac{1}{2 \cdot 5} \int e^{\operatorname{arctg}^5 x^2} (5 \operatorname{arctg}^4 x^2 d \operatorname{arctg} x^2) = -\frac{1}{10} \int e^{\operatorname{arctg}^5 x^2} (d \operatorname{arctg}^5 x^2) = -\frac{1}{10} e^{\operatorname{arctg}^5 x^2} + C$$

## 2. Замену переменной можно осуществлять формальным сведением

подынтегрального выражения к новой переменной. Так, в  $\int e^{\sin x} \cos x dx$  имеет смысл перейти к переменной (сделать подстановку)  $t = \sin x$ . Выражаем все множители подынтегрального выражения через переменную  $t$ :

$$x = \arcsin t, dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}; \cos x = \sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{1-t^2}$$

; в результате  $\int e^{\sin x} \cos x dx =$

$$= \int e^t \sqrt{1-t^2} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int e^t dt = e^t + C =$$

(возвращаемся к исходной переменной)  $= e^{\sin x} + C$ .

Другие примеры:

$\int \frac{dx}{\sqrt{x-5}(1+\sqrt[3]{x-5})}$ . Подынтегральная функция содержит два множителя, ни один из которых не является производной другого, поэтому подводить их под знак дифференциала бесполезно. Попытаемся ввести новую переменную, такую, чтобы

корни извлеклись:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x-5}(1+\sqrt[3]{x-5})} = \left| \begin{array}{l} x-5 = t^6; t = \sqrt[6]{x-5}; \\ x = t^6 + 5; dx = 6t^5 dt \end{array} \right| =$$

$$\int \frac{6t^5 dt}{t^3(1+t^2)} = 6 \int \frac{t^2 dt}{t^2+1} = 6 \int \frac{(t^2+1-1)dt}{t^2+1} =$$

$$= 6 \left( \int dt - \int \frac{dt}{t^2+1} \right) = 6(t - \operatorname{arctg} t) + C = 6(\sqrt[6]{x-5} - \operatorname{arctg} \sqrt[6]{x-5}) + C$$

Рассмотрим

$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$  (интеграл №19 из табл.). Здесь подынтегральная функция состоит из единственного множителя; можно опять попытаться сделать такую замену переменной, чтобы корень извлёкся. Структура подкоренного выражения подсказывает эту замену:  $x = a \sin t$  (или  $x = a \cos t$ ,  $a > 0$ ):

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \left| \begin{array}{l} x = a \sin t, dx = a \cos t dt, \\ \sqrt{a^2 - x^2} = a \sqrt{1 - \sin^2 t} = a \cos t \end{array} \right| = a^2 \int \cos^2 t \cdot dt$$

. Интеграл свёлся к интегралу

от квадрата косинуса. При интегрировании чётных степеней синуса и косинуса часто применяются формулы, выражающие  $\sin^2 t$  и  $\cos^2 t$  через косинус двойного

угла:  $\sin^2 t = \frac{1 - \cos 2t}{2}$ ;  $\cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2}$ . Поэтому

$$a^2 \int \cos^2 t \cdot dt = a^2 \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{a^2}{2} (\int dt + \int \cos 2t dt) = \frac{a^2}{2} \left( t + \frac{1}{2} \int \cos 2t \cdot d2t \right) =$$

$$= \frac{a^2}{2} \left( t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) + C = \frac{a^2}{2} \left( t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) + C = \frac{a^2}{2} (t + \sin t \cos t) + C = \left| \begin{array}{l} \sin t = \frac{x}{a}; \cos t = \\ \sqrt{1 - \sin^2 t} = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + C$$

Примеры: 1.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \left| \begin{array}{l} t = x + \sqrt{x^2 + a}; t - x = \sqrt{x^2 + a}; (t - x)^2 = x^2 + a; \\ t^2 - 2tx + x^2 = x^2 + a; x = \frac{t^2 - a}{2t}; \sqrt{x^2 + a} = t - \frac{t^2 - a}{2t} = \\ = \frac{t^2 + a}{2t}; dx = \frac{t^2 + a}{2t^2} dt \end{array} \right| = \ln |t| + C = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a} \right| + C$$

$$2. \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \int \frac{2a}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \int \frac{(x+a) - (x-a)}{(x+a)(x-a)} dx = \frac{1}{2a} \int \left( \frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2a} \left( \int \frac{d(x-a)}{x-a} - \int \frac{d(x+a)}{x+a} \right) = \frac{1}{2a} (\ln |x-a| - \ln |x+a|) + C = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$$

### Интегрирование по частям.

Интегрирование по частям - приём, который применяется почти так же часто, как и замена переменной. Пусть  $u(x)$  и  $v(x)$  - функции, имеющие непрерывные частные производные. Тогда по формуле дифференцирования произведения  $d(uv) = u \cdot dv + v \cdot du \Rightarrow u \cdot dv = d(uv) - v \cdot du$ . Находим неопределённые интегралы для обеих частей этого равенства (при этом  $\int d(uv) = uv + C$ ):

$$\int u \cdot dv = uv - \int v \cdot du$$

Эта формула и называется формулой интегрирования по частям. Часто ее записывают в производных ( $dv = v' \cdot dx$ ,  $du = u' \cdot dx$ ):

$$\int u \cdot v' dx = uv - \int v \cdot u' dx$$

Примеры:

$$\int x \sin x dx = \left| \begin{array}{l} u = x; dv = \sin x dx; \\ du = dx; v = \int \sin x dx = -\cos x \end{array} \right| = x(-\cos x) - \int (-\cos x) dx = -x \cos x + \sin x + C$$

$$\int \ln x dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x; dv = dx; \\ du = \frac{dx}{x}; v = x \end{array} \right| = x \ln x - \int x \frac{dx}{x} = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C$$

Формула интегрирования по частям может применяться неоднократно. При наличии небольшого опыта в простых интегралах нет необходимости выписывать промежуточные выкладки ( $u = \dots$ ,  $dv = \dots$ ), можно сразу применять формулу, представив интеграл в виде  $\int u \cdot dv$ :

$$\begin{aligned} \int e^x x^3 dx &= \int x^3 (e^x dx) = \int x^3 de^x = x^3 e^x - \int e^x dx^3 = x^3 e^x - \int e^x 3x^2 dx = x^3 e^x - 3 \int x^2 (e^x dx) = \\ &= x^3 e^x - 3 \int x^2 de^x = x^3 e^x - 3(x^2 e^x - \int e^x dx^2) = x^3 e^x - 3(x^2 e^x - \int e^x 2x dx) = \\ &= x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6 \int x de^x = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6(xe^x - \int e^x dx) = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6xe^x - 6 \int e^x dx = \\ &= x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6xe^x - 6e^x + C = e^x (x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + C \end{aligned}$$

Приведённые примеры показывают, для каких функций надо применять (или попытаться применить) формулу интегрирования по частям:

Интегралы вида  $\int P_n(x) \cdot \cos ax \cdot dx$ ,  $\int P_n(x) \cdot \sin ax \cdot dx$ ,  $\int P_n(x) \cdot a^x \cdot dx$ , где  $P_n(x)$  - многочлен  $n$ -ой степени. Так, для  $\int P_n(x) \cdot \cos ax \cdot dx$  имеем  $u = P_n(x)$ ,  $dv = \cos ax dx$ ,  $du = (P_n(x))' dx = P_{n-1}(x) dx$ ,  $v = (\sin ax) / a$ , и  $\int P_n(x) \cdot \cos ax \cdot dx = P_n(x) \cdot (\sin ax) / a - 1/a \int P_{n-1}(x) \cdot \sin ax \cdot dx$ . В результате мы получили интеграл того же типа с многочленом степени на единицу меньше. После  $n$ -кратного применения формулы степень многочлена уменьшится до нуля, т.е. многочлен превратится в постоянную, и интеграл сведётся к табличному.

Интегралы  $\int P_n(x) \cdot f(x) \cdot dx$ , где  $f(x)$  - трансцендентная функция, имеющая дробно-рациональную или дробно-иррациональную производную ( $\ln x$ ,  $\arctg x$ ,  $\operatorname{arcsctg} x$ ,  $\arcsin x$ ,  $\arccos x$ ). В этом случае имеет смысл взять  $u = f(x)$ ,  $dv = P_n(x)dx$ , для того, чтобы в интеграле  $\int v du$  участвовала не  $f(x)$ , а её производная. Пример:

$$\begin{aligned} \int x \cdot \arcsin x \cdot dx &= \left| \begin{array}{l} u = \arcsin x; dv = x dx; \\ du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}; v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2} \arcsin x - \int \frac{x^2 dx}{2\sqrt{1-x^2}} = \left| \begin{array}{l} x = \sin t; dx = \cos t dt \\ \sqrt{1-x^2} = \cos t \end{array} \right| = \\ &= \frac{x^2}{2} \arcsin x - \frac{1}{2} \int \sin^2 t dt = \frac{x^2}{2} \arcsin x - \frac{1}{4} \int (1 - \cos 2t) dt = \frac{x^2}{2} \arcsin x - \frac{1}{4} \left( t - \frac{\sin 2t}{2} \right) + C = \\ &= \frac{x^2}{2} \arcsin x - \frac{t}{4} + \frac{\sin t \cos t}{4} + C = \frac{x^2}{2} \arcsin x - \frac{\arcsin x}{4} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{4} + C. \end{aligned}$$

Для некоторых функций применяется приём “сведения интеграла к самому себе”. С помощью интегрирования по частям (возможно, неоднократного) интеграл выражается через такой же интеграл; в результате получается уравнение относительно этого интеграла, решая которое, находим значение интеграла.

Примеры:

Найти  $I = \int \sqrt{a^2 - x^2} dx$  (это интеграл №19 из табл. 10.3. неопределённых интегралов; в предыдущем параграфе мы вычислили этот интеграл с помощью тригонометрической подстановки  $x = a \sin t$ ).

$$\begin{aligned} I = \int \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \left| \begin{array}{l} u = \sqrt{a^2 - x^2}; dv = dx; \\ du = -\frac{x dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}; v = x \end{array} \right| = x\sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \frac{-x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \\ &= x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \frac{(a^2 - x^2) - a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \frac{a^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx + \int \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \\ &= x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \sqrt{a^2 - x^2} dx + a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = x\sqrt{a^2 - x^2} - I + a^2 \arcsin \frac{x}{a} \end{aligned}$$

В результате для искомого интеграла мы получили уравнение

$$I = x\sqrt{a^2 - x^2} - I + a^2 \arcsin \frac{x}{a}$$

решая которое, получаем  $2I = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a} + C$  (константа  $C$  появилась вследствие того, что интегралы  $I$  в правой и левой частях уравнения определены с точностью до произвольной постоянной) и

$$I = \frac{1}{2} x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C \quad \left( \text{константа } \frac{C}{2} \text{ переобозначена через } C \right).$$

Сведение интеграла к самому себе – самый простой способ нахождения

часто встречающихся интегралов вида  $\int e^{ax} \cos bx dx$  и  $\int e^{ax} \sin bx dx$  ( $a, b = \text{const}$ ). Например,

$$\begin{aligned} I &= \int e^{ax} \cos bx \cdot dx = \left| \begin{array}{l} u = \cos bx; dv = e^{ax} dx \\ du = -b \sin bx dx; v = e^{ax} / a \end{array} \right| = \frac{e^{ax}}{a} \cos bx + \frac{b}{a} \int e^{ax} \sin bx \cdot dx = \\ &= \left| \begin{array}{l} u = \sin bx; dv = e^{ax} dx \\ du = b \cos bx dx; v = e^{ax} / a \end{array} \right| = \frac{e^{ax}}{a} \cos bx + \frac{b}{a} \left( \frac{e^{ax}}{a} \sin bx - \frac{b}{a} \int e^{ax} \cos bx \cdot dx \right) = \\ &= \frac{e^{ax}}{a} \cos bx + \frac{be^{ax}}{a^2} \sin bx - \frac{b^2}{a^2} I \end{aligned}$$

Итак, после двукратного интегрирования по частям получено уравнение относительно  $I$ :

$$I = \frac{e^{ax}}{a} \cos bx + \frac{be^{ax}}{a^2} \sin bx - \frac{b^2}{a^2} I$$

решение которого

При нахождении этих интегралов не принципиально, положим ли мы  $u = \cos bx$ ,  $dv = e^{ax} dx$  или  $u = e^{ax}$ ,  $dv = \cos bx dx$ ; важно только при втором применении формулы интегрирования по частям загонять под знак дифференциала функцию того же типа, что и при первом (показательную или тригонометрическую).

Ещё один вид формул, которые обычно получаются с помощью интегрирования по частям, и используются для нахождения интегралов - **рекуррентные соотношения**. Если подынтегральная функция зависит от некоторого параметра  $n$ , и получено соотношение, которое выражает интеграл через аналогичный интеграл с меньшим значением  $n$ , то это соотношение и называется рекуррентным соотношением. Примеры:

$I_n = \int \cos^n x \cdot dx$ . Представим подынтегральную функцию в виде  $\cos^n x = \cos^{n-2} x \cdot \cos^2 x = \cos^{n-2} x \cdot (1 - \sin^2 x) = \cos^{n-2} x - \sin x \cos^{n-2} x \sin x$ ; интеграл от первого слагаемого аналогичен исходному с значением параметра  $n$  на две единицы меньше; к интегралу от второго слагаемого применим формулу интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} I_n &= \int \cos^n x \cdot dx = \int \cos^{n-2} x \cdot dx - \int \sin x \cos^{n-2} x \sin x dx = \left| \begin{array}{l} u = \sin x; dv = \cos^{n-2} x \sin x dx \\ du = \cos x dx; v = -\frac{\cos^{n-1} x}{n-1} \end{array} \right| = \\ &= I_{n-2} - \sin x \left( -\frac{\cos^{n-1} x}{n-1} \right) + \int \left( -\frac{\cos^{n-1} x}{n-1} \right) \cos x \cdot dx = I_{n-2} + \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n-1} - \frac{1}{n-1} \int \cos x^n \cdot dx = \\ &= I_{n-2} + \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n-1} - \frac{1}{n-1} I_n \Rightarrow \left( 1 + \frac{1}{n-1} \right) I_n = I_{n-2} + \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n-1} \Rightarrow I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} + \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n} \end{aligned}$$

Теперь,

зная

$$I_1 = \int \cos x \cdot dx = \sin x + C$$

$$I_2 = \int \cos^2 x \cdot dx = \int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \left( x + \frac{\sin 2x}{2} \right) + C, \quad \text{мы можем выписать}$$

$$I_3 = \int \cos^3 x \cdot dx = \frac{3-1}{3} I_1 + \frac{\sin x \cos^{3-1} x}{3} = \frac{2}{3} \sin x + \frac{\sin x \cos^2 x}{3} + C;$$

$$I_4 = \int \cos^4 x \cdot dx = \frac{4-1}{4} I_2 + \frac{\sin x \cos^{4-1} x}{4} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} (2x + \sin 2x) + \frac{\sin x \cos^3 x}{4} + C;$$

$$I_5 = \int \cos^5 x \cdot dx = \frac{5-1}{5} I_3 + \frac{\sin x \cos^{5-1} x}{5} = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{3} \left( 2 \sin x + \sin x \cos^2 x \right) + \frac{\sin x \cos^4 x}{5} + C \quad \text{и т.д.}$$

### Практическая работа № 16

#### Тема: Вычисление интегралов

##### Основная цель:

- **Формирование представлений** о понятии первообразной, неопределенного интеграла, определенного интеграла.
- **Овладение умением** применения первообразной функции при решении вычислительных задач.

##### **Изучение данной темы позволяет**

- Студентам овладеть конкретными математическими знаниями, необходимыми для применения в практической деятельности, для изучения смежных дисциплин, развития умственных способностей, умение извлекать учебную информацию на основе сопоставительного анализа графиков, самостоятельно выполнять различные творческие работы.
- Студенты демонстрируют теоретические и практические знания по теме «Первообразная и интеграл». Могут привести примеры, подобрать аргументы, сформулировать выводы. Умеют составлять текст научного стиля. Умеют формировать вопросы, задачи, создавать проблемную ситуацию
- Студенты свободно применяют знания и умения по теме «Первообразная и интеграл». Умеют передавать, информацию сжато, полно, выборочно. Умеют объяснить изученные положения на самостоятельно подобранных конкретных примерах. Умеют участвовать в диалоге, понимать точку зрения собеседника, признавать право на иное мнение.

**Тема "Первообразная и интеграл"** завершается комплексом Учебно-тренировочными тестовыми заданиями ЕГЭпо данной теме (см. Приложение 1).

##### Учебная цель:

- **Формирование представлений** о различных типах тестовых заданий, которые включаются в ЕГЭ по математике.
- **Овладение навыками и умениями** решения заданий разного уровня: тестовых заданий с выбором ответа и качественных тестовых заданий с числовым ответом.
- **Развить** творческие способности применения знаний и умений в решении вариантов ЕГЭ по математике.

## План:

### I. Методические указания к выполнению практической работы

- 1) Первообразная и неопределенный интеграл
- 2) Таблица интегралов
- 3) Некоторые свойства неопределенного интеграла
- 4) Интегрирование методом замены переменной или способом подстановки
- 5) Интегрирование по частям
- 6) Рациональные дроби. Простейшие рациональные дроби и их интегрирование
- 7) Интегрирование рациональных дробей
- 8) Интегралы от иррациональных функций

### II. Практическая работа

### III. Итог

## ХОД УРОКА

### I. Методические указания к выполнению практической работы

#### 1) Первообразная и неопределенный интеграл

Рассмотрим задачу: Дана функция  $f(x)$ ; требуется найти такую функцию  $F(x)$ , производная которой равна  $f(x)$ , т.е.  $F'(x) = f(x)$ .

**Определение:** 1. Функция  $F(x)$  называется первообразной от функции  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$ , если во всех точках этого отрезка выполняется равенство  $F'(x) = f(x)$ .

**Пример.** Найти первообразную от функции  $f(x) = x^2$ . Из определения первообразной следует, что функция  $F(x) = x^3/3$  является первообразной, так как  $(x^3/3)' = x^2$ .

Легко видеть, что если для данной функции  $f(x)$  существует первообразная, то эта первообразная не является единственной. Так, в предыдущем примере можно было взять в качестве первообразных следующие функции:



$F(x) = \frac{x^3}{3} + 1, F(x) = \frac{x^3}{3} - 7$ , или вообще  $F(x) = \frac{x^3}{3} + C$  (где  $C$ - произвольная постоянная),

так как  $(\frac{x^3}{3} + C)' = x^2$ . С другой стороны, можно доказать, что функциями вида

$\frac{x^3}{3} + C$  исчерпываются все первообразные от функции  $x^2$ . Это вытекает из следующей теоремы.

**Теорема.** Если  $F_1(x)$  и  $F_2(x)$ - две первообразные от функции  $f(x)$  на отрезке  $[a,b]$ , то разность между ними равна постоянному числу.

**Доказательство.** В силу определения первообразной имеем

$$F_1'(x) = f(x), F_2'(x) = f(x) \quad (1)$$

При любом значении  $x$  на отрезке  $[a,b]$ .

Обозначим

$$F_1(x) - F_2(x) = \varphi(x). \quad (2)$$

Тогда на основании равенств (1) будет  $F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$  или  $\varphi'(x) = [F_1'(x) - F_2'(x)]' = 0$  при любом значении  $x$  на отрезке  $[a,b]$ . Но из равенства  $\varphi'(x) = 0$  следует, что  $\varphi(x)$  есть постоянная. Действительно, применим теорему Лагранжа к функции  $\varphi(x)$ , которая, очевидно, непрерывна и дифференцируема на отрезке  $[a,b]$ . Какова бы ни была точка  $x$  на отрезке  $[a,b]$ , мы имеем в силу теоремы Лагранжа  $\varphi(x) - \varphi(a) = (x - a) \varphi'(z)$ , где  $a < z < x$ . Так как  $\varphi'(z) = 0$ , то  $\varphi(x) - \varphi(a) = 0$ , или  $\varphi(x) = \varphi(a)$ .  
(3)

Таким образом, функция  $\varphi(x)$  в любой точке  $x$  отрезка  $[a,b]$  сохраняет значение  $\varphi(a)$ , а это значит, что функция  $\varphi(x)$  является постоянной на отрезке  $[a,b]$ . Обозначая постоянную  $\varphi(a)$  через  $C$ , из равенств (2) и (3) получаем  $F_1(x) - F_2(x) = C$ .

Из доказанной теоремы следует, что если для данной функции  $f(x)$  найдена какая-нибудь одна первообразная  $F(x)$ , то любая другая первообразная для  $f(x)$  имеет вид  $F(x) + C$ , где  $C = \text{const}$ .

**Определение 2.** Если функция  $F(x)$  является первообразной для  $f(x)$ , то выражение  $F(x) + C$  называется неопределенным интегралом от функции  $f(x)$  и обозначается  $\int f(x)dx$ . Таким образом по определению,  $\int f(x)dx = F(x) + C$ , если  $F'(x) = f(x)$ . При этом функцию  $f(x)$  называют подынтегральной функцией,  $f(x)dx$ - подынтегральным выражением, знак  $\int$ - знаком интеграла.

Таким образом, неопределенный интеграл представляет собой семейство функций  $y = F(x) + C$ .

С геометрической точки зрения неопределенный интеграл представляет совокупность (семейство) кривых, каждая из которых получается путем сдвига одной из кривых параллельно самой себе вверх или вниз, т. е. вдоль оси Оу.

Естественно возникает вопрос: для всякой ли функции  $f(x)$  существуют первообразные (а значит, и неопределенный интеграл)? Оказывается, что не для всякой. Заметим, однако, без доказательства, что если функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , то для этой функции существует первообразная (а значит, и неопределенный интеграл).

Нахождение первообразной для данной функции  $f(x)$  называется интегрированием функции  $f(x)$ .

Заметим следующее: если производная от элементарной функции всегда является элементарной функцией, то первообразная от элементарной функции может оказаться и не представимой с помощью конечного числа элементарных функций. Из определения 2 следует:

1. Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, т.е. если  $F'(x) = f(x)$ , то и

$$(\int f(x)dx)' = (F(x) + C)' = f(x). \quad (4)$$

Последнее равенство нужно понимать в том смысле, что производная от любой первообразной равна подынтегральной функции.

2. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:

$$d(\int f(x)dx) = f(x)dx. \quad (5)$$

Это получается на основании формулы (4).

3. Неопределенного интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции плюс произвольная постоянная:

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

Справедливость последнего равенства легко проверить дифференцированием (дифференциалы от обеих частей равенства равны  $dF(x)$ ).

## 2) Таблица интегралов.

Прежде чем приступить к изложению методов интегрирования, приведем таблицу интегралов от простейших функций.

1.  $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$  ( $\alpha \neq -1$ ). (Здесь и в последующих формулах под  $C$  понимается произвольная постоянная.).

$$2. \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$$

$$3. \int \sin x \cdot dx = -\cos x + C$$

$$4. \int \cos x \cdot dx = \sin x + C$$

$$5. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$$

$$6. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$$

$$7. \int \operatorname{tg} x \cdot dx = -\ln|\cos x| + C.$$

$$8. \int \operatorname{ctg} x \cdot dx = \ln|\sin x| + C.$$

$$9. \int e^x \cdot dx = e^x + C.$$

$$10. \int a^x \cdot dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$11. \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C.$$

$$11'. \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$$

$$12. \int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C.$$

$$13. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$$

$$13' \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

$$14. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C.$$

Справедливость формул 7,8,11',12,13'и 14 легко устанавливается с помощью дифференцирования.

В случае формулы 7 имеем  $(-\ln|\cos x|)' = -\frac{-\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x,$

следовательно,  $\int \operatorname{tg} x \cdot dx = -\ln|\cos x| + C.$

В случае формулы 8

$$(\ln|\sin x|)' = \frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{ctg} x,$$

следовательно,  $\int \operatorname{ctg} x \cdot dx = \ln |\sin x| + C$ .

В случае формулы 12

$$\left(\frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| \right)' = \frac{1}{2a} [\ln |a+x| - \ln |a-x|]' = \frac{1}{2a} \left[ \frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x} \right] = \frac{1}{a^2 - x^2},$$

следовательно,  $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C$ .

В случае формулы 14

$$\left( \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| \right)' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 \pm a^2}} \left( 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}},$$

следовательно,  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$ .

### 3) Некоторые свойства неопределенного интеграла

**Теорема 1.** Неопределенный интеграл от алгебраической суммы двух или нескольких функций равен алгебраической сумме их интегралов:

$$\int [f_1(x) + f_2(x)] dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx. \quad (1)$$

Из доказательства найдем производные от левой и правой частей этого равенства. На основании равенства (4) пункта №1 находим

$$\left( \int [f_1(x) + f_2(x)] dx \right)' = f_1(x) + f_2(x),$$

$$\left( \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx \right)' = \left( \int f_1(x) dx \right)' + \left( \int f_2(x) dx \right)' = f_1(x) + f_2(x).$$

Таким образом, производные от левой и правой частей равенства (1) равны между собой, т. е. производная от любой первообразной, стоящая в левой части, равняется производной от любой функции, стоящей в правой части равенства. Следовательно по теореме из пункта №1 любая функция, стоящая в левой части равенства (1), отличается от любой функции, стоящей в правой части равенства (1), на постоянное слагаемое. В этом смысле и нужно понимать равенство (1).

**Теорема 2.** Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла, т. е. если  $a = \text{const}$ , то

$$\int a f(x) dx = a \int f(x) dx. \quad (2)$$

Для доказательства равенства (2) найдем производные от левой и правой его частей:

$$(\int af(x)dx)' = af'(x), (a \int f(x)dx)' = a(\int f(x)dx)' = af'(x).$$

Производные от правой и левой частей равны, следовательно, как и в равенстве (1), разность двух любых функций, стоящих слева и справа, есть постоянная. В этом смысле и следует понимать равенство (2).

При вычислении неопределенных интегралов бывает полезно иметь в виду следующие правила.

1). Если

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

то

$$\int f(ax)dx = \frac{1}{a}F(ax) + C. \quad (3)$$

Действительно, дифференцируя левую и правую части равенства (3) получим

$(\int f(ax)dx)' = f(ax), (\frac{1}{a}F(ax))' = \frac{1}{a}(F(ax))'_x = \frac{1}{a}F'(ax)a = F'(ax) = f(ax).$  Производные от правой и левой частей равны, что и требовалось доказать.

2). Если

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

то

$$\int f(x+b)dx = F(x+b) + C. \quad (4)$$

3. Если

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

то

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C. \quad (5)$$

Равенства (4) и (5) доказываются дифференцированием правой и левой частей равенств.

**Пример 1.**

$$\begin{aligned} \int (2x^3 - 3\sin x + 5\sqrt{x})dx &= \int 2x^3dx - \int 3\sin xdx + \int 5\sqrt{x}dx = 2\int x^3dx - 3\int \sin xdx + 5\int x^{1/2}dx = \\ &= 2 = \frac{x^{3+1}}{3+1} - 3(-\cos x) + 5\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{1}{2}x^4 + 3\cos x + \frac{10}{3}x\sqrt{x} + C. \end{aligned}$$

### Пример 2.

$$\int \left( \frac{3}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}} + x^4\sqrt{x} \right) dx = 3 \int x^{-1/3} dx + \frac{1}{2} \int x^{-1/2} dx + \int x^{5/4} dx = 3 \frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + \frac{1}{2} \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + \frac{x^{\frac{5}{4}+1}}{\frac{5}{4}+1} + C =$$
$$= \frac{9}{2} \sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x} + \frac{4}{9} x^2 \sqrt{x} + C.$$

### Пример 3.

$$\int \frac{dx}{x+3} = \ln |x+3| + C.$$

### Пример 4.

$$\int \cos 7x dx = \frac{1}{7} \sin 7x + C$$

Пример 5.

$$\int \sin(2x-6) dx = -\frac{1}{2} \cos(2x-6) + C.$$

## 4) Интегрирование методом замены переменной или способом подстановки

Пусть требуется найти интеграл  $\int f(x) dx$ , причем непосредственно подобрать первообразную для  $f(x)$  мы не сможем, но нам известно, что она существует.

Сделаем замену переменной в подынтегральном выражении, положив

$$x = \varphi(t), \quad (1)$$

где  $\varphi(t)$  — непрерывная функция с непрерывной производной, имеющая обратную функцию. Тогда  $dx = \varphi'(t) dt$ ; докажем, что в этом случае имеет место следующее равенство:

$$\int f(x) dx = \int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt. \quad (2)$$

Здесь подразумевается, что после интегрирования в правой части равенства вместо  $t$  будет подставлено его выражение через  $x$  на основании равенства (1).

Для того чтобы установить, что выражения, стоящие справа и слева, одинаковы в указанном выше смысле, нужно доказать, что их производные по  $x$  равны между собой. Находим производную от левой части:  $(\int f(x) dx)'_x = f(x)$ . Правую часть равенства (2) будем дифференцировать по  $x$  как сложную функцию, где  $t$  — промежуточный аргумент. Зависимость  $t$  от  $x$  выражается равенством (1), при этом

$$\frac{dx}{dt} = \varphi'(t) \text{ и по правилу дифференцирования обратной функции } \frac{dt}{dx} = \frac{1}{\varphi'(t)}.$$

Таким образом, имеем

$$\left(\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt\right)'_x = \left(\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt\right)'_t \frac{dt}{dx} = f[\varphi(t)]\varphi'(t) \frac{1}{\varphi'(t)} = f[\varphi(t)] = f(x).$$

Следовательно, производные от  $x$  от право и левой частей равенства (2) равны, что и требовалось доказать.

Функцию  $x = \varphi(t)$  следует выбирать так, чтобы можно было вычислить неопределенный интеграл, стоящий в правой части равенства (2).

**Замечание.** При интегрировании иногда целесообразнее подбирать замену переменной не в виде  $x = \varphi(t)$ , а в виде  $t = \psi(x)$ . Проиллюстрируем это на примере. Пусть нужно вычислить интеграл, имеющий вид

$$\int \frac{\psi'(x)dx}{\psi(x)}.$$

Здесь удобно положить

$$\psi(x) = t,$$

тогда  $\psi'(x)dx = dt$ ,

$$\int \frac{\psi'(x)dx}{\psi(x)} = \int \frac{dt}{t} \ln |t| + C = \ln |\psi(x)| + C.$$

Приведем несколько примеров на интегрирование с помощью замены переменных.

### **Пример 1.**

$\int \sqrt{\sin x} \cos x dx = ?$  Сделаем подстановку  $t = \sin x$ ; тогда  $dt = \cos x dx$  и, следовательно,

$$\int \sqrt{\sin x} \cos x dx = \int \sqrt{t} dt = \int t^{1/2} dt = \frac{2t^{3/2}}{3} + C = \frac{2}{3} \sin^{3/2} x + C$$

### **Пример 2.**

$\int \frac{x dx}{1+x^2} = ?$  Полагаем  $t = 1+x^2$ ; тогда  $dt = 2x dx$  и

$$\int \frac{x dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \ln t + C = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$$

### **Пример 3.**

$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{1+(x/a)^2}$ . Полагаем  $t = \frac{x}{a}$ ; тогда  $dx = a dt$ ,

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a^2} \int \frac{adt}{1+t^2} = \frac{1}{a} \int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{a} \arctg t + C = \frac{1}{a} \arctg \frac{x}{a} + C.$$

**Пример 4.**  $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x/a)^2}}$ . Полагаем  $t = \frac{x}{a}$ ; тогда  $dx = a dt$ ,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{a} \int \frac{adt}{\sqrt{1-t^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + C = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

(предполагается, что  $a > 0$ ).

В примерах 3 и 4 выделены формулы, приведенные в таблице интегралов под номерами 11' и 13' (см. выше, пункт №2).

**Пример 5.**  $\int (\ln x)^3 \frac{dx}{x} = ?$  Полагаем  $t = \ln x$ ; тогда  $dt = \frac{dx}{x}$ ,

$$\int (\ln x)^3 \frac{dx}{x} = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{1}{4} (\ln x)^4 + C.$$

**Пример 6.**  $\int \frac{x dx}{1+x^4} = ?$  Полагаем  $t = x^2$ ; тогда  $dt = 2x dx$ ,

$$\int \frac{x dx}{1+x^4} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2} \arctgt + C = \frac{1}{2} \arctg x^2 + C$$

Метод замены переменных является одним из основных методов вычисления неопределенных интегралов. Даже в тех случаях, когда мы интегрируем каким-либо другим методом, нам часто приходится в промежуточных вычислениях прибегать к замене переменных. Успех интегрирования зависит в значительной степени от того, сумеем ли мы подобрать такую удачную замену переменных, которая упростила бы данный интеграл. По существу говоря изучение методов интегрирования сводится к выяснению того, какую надо сделать замену переменной при том или ином виде подынтегрального выражения. Этому посвящены большая часть настоящего пункта.

## 5) Интегрирование по частям

Пусть  $u$  и  $v$  две дифференцируемые функции от  $x$ . Тогда, как известно, дифференциал произведения  $uv$  вычисляется по следующей формуле:  $d(uv) = u dv + v du$ . Отсюда, интегрируя, получаем  $uv = \int u dv + \int v du$  или

$$\int u dv = uv - \int v du. \quad (1)$$

Последняя формула называется формула интегрирования по частям. Эта формула чаще всего применяется к интегрированию выражений которые можно так представить в виде произведения двух сомножителей  $u$  и  $dv$ , чтобы отыскать функцию  $v$  по её дифференциалу  $dv$  и вычисления интеграла  $\int v du$  составляли в совокупности задачу более простую, чем непосредственное вычисление интеграла  $\int u dv$ . Умение разбивать разумным образом данное подынтегральное выражение на множители  $u$  и  $dv$  вырабатывается в процессе решения задачи, и мы покажем на ряде примеров, как это делается.

**Пример 1.**  $\int x \sin x dx = ?$  Положим  $u = x, dv = \sin x dx$ ; тогда  $du = dx, v = -\cos x$ . Следовательно,



$$\int x \sin x dx = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C.$$

**Замечание.** При определении функции  $v$  по дифференциалу  $dv$  мы можем брать любую произвольную постоянную, так как в конечный результат она не входит (что легко проверить, подставив в равенство(1) вместо  $v$  выражение  $v+C$ ). Поэтому удобно считать эту постоянную равной нулю.

Правило интегрирования по частям применяется во многих случаях. Так, например, интегралы вида

$$\int x^k \sin ax dx, \int x^k \cos ax dx, \int x^k e^{ax} dx, \int x^k \ln x dx,$$

некоторые интегралы, содержащие обратные тригонометрические функции, вычисляются с помощью интегрирования по частям.

**Пример 2.** Требуется вычислить  $\int \arctg x dx$ . Положим  $u = \arctg x$ ,  $dv = dx$ ; тогда

$$du = \frac{dx}{1+x^2}, v = x. \text{ Следовательно,}$$

$$\int \arctg x dx = x \arctg x - \int \frac{x dx}{1+x^2} = x \arctg x - \frac{1}{2} \ln |1+x^2| + C.$$

**Пример 3.** Требуется вычислить  $\int x^2 e^x dx$ . Положим  $u = x^2$ ,  $dv = e^x dx$ ; тогда

$$du = 2x dx, v = e^x,$$

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx.$$

Последний интеграл снова интегрируем по частям, полагая

$$u_1 = x, du_1 = dx, dv_1 = e^x dx, v_1 = e^x. \text{ Тогда}$$

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C. \text{ Окончательно будем иметь}$$

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2(x e^x - e^x) + C = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C = e^x (x^2 - 2x + 2) + C.$$

## 6) Рациональные дроби. Простейшие рациональные дроби и их интегрирование

Как мы увидим ниже, далеко не всякая элементарная функция имеет интеграл, выражающийся в элементарных функциях. Поэтому очень важно выделить такие классы функций, интегралы которых выражаются через элементарные функции. Простейшим из этих классов является класс рациональных функций.

Всякую рациональную функцию можно представить в виде рациональной дроби, т. е. в виде отношения двух многочленов:

$$\frac{Q(x)}{f(x)} = \frac{B_0 x^m + B_1 x^{m-1} + \dots + B_m}{A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_n}.$$

Не ограничивая общности рассуждения, будем предполагать, что эти многочлены не имеют общих корней.

Если степень числителя ниже степени знаменателя, то дробь называется правильной, в противном случае дробь называется неправильной.

Если дробь неправильная, то, разделив числитель на знаменатель (по правилу деления многочленов), можно представить данную дробь в виде суммы многочлена и некоторой правильной дроби:

$$\frac{Q(x)}{f(x)} = M(x) + \frac{F(x)}{f(x)};$$

здесь  $M(x)$ -многочлен, а  $\frac{F(x)}{f(x)}$  - правильная дробь.

**Пример.** Пусть дана неправильная рациональная дробь

$$\frac{x^4 - 3}{x^2 + 2x + 1}$$

Разделив числитель на знаменатель (по правилу деления многочленов), получим

$$\frac{x^4 - 3}{x^2 + 2x + 1} = x^2 - 2x + 3 - \frac{4x + 6}{x^2 + 2x + 1}.$$

Так как интегрирование многочленов не представляет затруднений, то основная трудность при интегрировании рациональных дробей заключается в интегрировании правильных рациональных дробей.

**Определение.** Правильные рациональные дроби вида

$$(1). \frac{A}{x-a}$$

$$(2). \frac{A}{(x-a)^k} \text{ (} k\text{-целое положительное число } \geq 2$$

$$(3) \frac{Ax+B}{x^2+px+q} \text{ (корни знаменателя комплексные, т.е. } \frac{p^2}{4} - q < 0).$$

$$(4) \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k} \text{ (} k\text{-целое положительное число } \geq 2 \text{ ; корни знаменателя комплексные), называются простейшими дробями (1),(2),(3) и (4) типов.}$$

Интегрирование простейших дробей типа (1),(2) и (3) не составляет большой трудности, поэтому мы приведем их интегрирование без каких-либо дополнительных пояснений:

$$(1) \int \frac{A}{x-a} dx = A \ln |x-a| + C$$

$$(2) \frac{A}{(x-a)^k} dx = A \int (x-a)^{-k} dx = A \frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C = \frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + C$$

$$\begin{aligned}
 (3) \int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx &= \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p) + (B - \frac{Ap}{2})}{x^2+px+q} dx = \frac{A}{2} \int \frac{2x+p}{x^2+px+q} dx + (B - \frac{Ap}{2}) \int \frac{dx}{x^2+px+q} = \\
 &= \frac{A}{2} \ln |x^2+px+q| + (B - \frac{Ap}{2}) \int \frac{dx}{(x+\frac{p}{2})^2 + (q - \frac{p^2}{4})} = \frac{A}{2} \ln |x^2+px+q| + \frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}} \operatorname{arctg} \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C
 \end{aligned}$$

Более сложных вычислений требует интегрирование простейших дробей (4) типа. Пусть нам дан интеграл такого типа:

$$(4) \int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k} dx$$

Произведем преобразования:

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k} dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p) + (B - \frac{Ap}{2})}{(x^2+px+q)^k} dx = \frac{A}{2} \int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k} dx + (B - \frac{Ap}{2}) \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k}$$

Первый интеграл берется подстановкой  $x^2+px+q=t, (2x+p)dx=dt$ :

$$\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k} dx = \int \frac{dt}{t^k} = \int t^{-k} dt = \frac{t^{-k+1}}{-k+1} + C = \frac{1}{(1-k)(x^2+px+q)^{k-1}} + C$$

Второй интеграл- обозначим его через  $I_k$ -запишем в виде

$$I_k = \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k} = \int \frac{dx}{[(x+\frac{p}{2})^2 + (q - \frac{p^2}{4})]^k} = \int \frac{dt}{(t^2+m^2)^k},$$

полагая

$$x + \frac{p}{2} = t, dx = dt, q - \frac{p^2}{4} = m^2$$

(по предположению корни знаменателя комплексные, а следовательно,  $q - \frac{p^2}{4} > 0$ ). Далее поступаем следующим образом:

$$I_k = \int \frac{dt}{(t^2+m^2)^k} = \frac{1}{m^2} \int \frac{(t^2+m^2)-t^2}{(t^2+m^2)^k} dt = \frac{1}{m^2} \int \frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}} - \frac{1}{m^2} \int \frac{t^2}{(t^2+m^2)^k} dt.$$

Преобразуем интеграл:

$$\int \frac{t^2 dt}{(t^2+m^2)^k} = \int \frac{t \cdot t dt}{(t^2+m^2)^k} = \frac{1}{2} \int t \frac{d(t^2+m^2)}{(t^2+m^2)^k} = -\frac{1}{2(k-1)} \int t d\left(\frac{1}{(t^2+m^2)^{k-1}}\right).$$

Интегрируя по частям, будем иметь

$$\int \frac{t^2 dt}{(t^2 + m^2)^k} = -\frac{1}{2(k-1)} \left[ t \frac{1}{(t^2 + m^2)^{k-1}} - \int \frac{dt}{(t^2 + m^2)^{k-1}} \right].$$

Подставляя это выражение в равенство (1), получим

$$\begin{aligned} I_k &= \int \frac{dt}{(t^2 + m^2)^k} = \\ &= \frac{1}{m^2} \int \frac{dt}{(t^2 + m^2)^{k-1}} + \frac{1}{m^2} \frac{1}{2(k-1)} \left[ \frac{t}{(t^2 + m^2)^{k-1}} - \int \frac{dt}{(t^2 + m^2)^{k-1}} \right] = \\ &= \frac{t}{2m^2(k-1)(t^2 + m^2)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2m^2(k-1)} \int \frac{dt}{(t^2 + m^2)^{k-1}}. \end{aligned}$$

В правой части содержится интеграл того же типа, что  $I_k$ , но показатель степени знаменателя подынтегральной функции на единицу ниже  $(k-1)$ ; таким образом, мы выразили  $I_k$  через  $I_{k-1}$ . Продолжая идти тем же путем, дойдем до известного интеграла:

$$I_1 = \int \frac{dt}{t^2 + m^2} = \frac{1}{m} \operatorname{arctg} \frac{t}{m} + C$$

Подставляя затем всюду вместо  $t$  и  $m$  их значения, получим выражение интеграла (4) через  $x$  и заданные числа  $A, B, p, q$ .

## 7) Интегрирование рациональных дробей

Пусть требуется вычислить интеграл от рациональной дроби  $\frac{Q(x)}{f(x)}$ , т.е. интеграл  $\int \frac{Q(x)}{f(x)} dx$ . Если данная дробь неправильная, то мы представляем ее в виде суммы многочлена  $M(x)$  и правильной рациональной дроби  $\frac{F(x)}{f(x)}$ . Последнюю же представляем по формуле в виде суммы простейших дробей. Таким образом, интегрирование всякой рациональной дроби сводится к интегрированию многочлена и нескольких простейших дробей.

Вид простейших дробей определяется корнями знаменателя  $f(x)$ . Здесь возможны следующие случаи.

1. Случай.

Корни знаменателя действительны и различны, т. е.

$$F(x) = (x-a)(x-b)\dots(x-d).$$

В этом случае дробь  $\frac{F(x)}{f(x)}$  разлагается на простейшие дроби 1 типа:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \dots + \frac{D}{x-d},$$

и тогда

$$\int \frac{F(x)}{f(x)} dx = \int \frac{A}{x-a} dx + \int \frac{B}{x-b} dx + \dots \int \frac{D}{x-d} dx = A \ln |x-a| + B \ln |x-b| + \dots + D \ln |x-d| + C$$

## 2. Случай.

Корни знаменателя действительные, причем некоторые из них кратные:

$$f(x) = (x-a)^\alpha (x-b)^\beta \dots (x-d)^\delta.$$

В этом случае дробь  $\frac{F(x)}{f(x)}$  разлагается на простейшие дроби 1 и 2 типов.

*Пример 1.*

$$\int \frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)} dx = -\int \frac{dx}{(x+1)^3} + \frac{1}{3} \int \frac{dx}{(x+1)^2} - \frac{2}{9} \int \frac{dx}{x+1} + \frac{2}{9} \int \frac{dx}{x-2} = \frac{1}{2} \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{3(x+1)} - \frac{2}{9} \ln |x+1| + \frac{2}{9} \ln |x-2| + C = -\frac{2x-1}{6(x+1)^2} + \frac{2}{9} \ln \left| \frac{x-2}{x+1} \right| + C$$

## 3. Случай.

Среди корней знаменателя есть комплексные неповторяющиеся (т.е. различные):

$$f(x) = (x^2 + px + q) \dots (x^2 + lx + s) (x-a)^\alpha \dots (x-d)^\delta.$$

В этом случае дробь  $\frac{F(x)}{f(x)}$  разлагается на простейшие дроби 1, 2 и 3 типов.

*Пример 2.* Требуется вычислить интеграл

$$\int \frac{x dx}{(x^2+1)(x-1)}.$$

Разложим подынтегральную дробь на простейшие:

$$\frac{x}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x-1}$$

Следовательно,

$$x = (Ax+B)(x-1) + C(x^2+1).$$

Полагая  $x=1$ , получим  $1=2C$ ,  $C=1/2$ ; полагая  $x=0$ , получим  $0=-B+C$ ,  $B=1/2$ .

Приравнявая коэффициенты при  $x^2$ , получим  $0=A+C$ , откуда  $A=-1/2$ . Таким образом,

$$\begin{aligned} \int \frac{x dx}{(x^2+1)(x-1)} &= -\frac{1}{2} \int \frac{x-1}{x^2+1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x-1} = -\frac{1}{2} \int \frac{x dx}{x^2+1} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+1} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x-1} = \\ &= -\frac{1}{4} \ln |x^2+1| + \frac{1}{2} \arctg x + \frac{1}{2} \ln |x-1| + C \end{aligned}$$

## 4. Случай.

Среди корней знаменателя есть комплексные кратные:

$$f(x) = (x^2 + px + q)^\mu \dots (x^2 + lx + s)^\nu (x-a)^\alpha \dots (x-d)^\delta.$$

В этом случае разложение дроби  $\frac{F(x)}{f(x)}$  будет содержать и простейшие дроби 4 типа.

**Пример 3.** Требуется вычислить интеграл

$$\int \frac{x^4 + 4x^3 + 11x^2 + 12x + 8}{(x^2 + 2x + 3)^2(x+1)} dx.$$

Решение. Разлагаем дробь на простейшие:

$$\frac{x^4 + 4x^3 + 11x^2 + 12x + 8}{(x^2 + 2x + 3)^2(x+1)} = \frac{Ax+B}{(x^2 + 2x + 3)^2} + \frac{Cx+D}{x^2 + 2x + 3} + \frac{E}{x+1},$$

откуда

$$x^4 + 4x^3 + 11x^2 + 12x + 8 = (Ax+B)(x+1) + (Cx+D)(x^2 + 2x + 3)(x+1) + E(x^2 + 2x + 3)^2.$$

Комбинируя указанные выше методы определения коэффициентов, находим  $A=1$ ,  $B=-1$ ,  $C=0$ ,  $D=0$ ,  $E=1$ .

Таким образом, получаем

$$\int \frac{x^4 + 4x^3 + 11x^2 + 12x + 8}{(x^2 + 2x + 3)^2(x+1)} dx = \int \frac{x-1}{(x^2 + 2x + 3)^2} dx + \int \frac{dx}{x+1} = -\frac{x+2}{2(x^2 + 2x + 3)} - \frac{\sqrt{2}}{4} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{2}} + \ln|x+1| + C$$

Из всего изложенного следует, что интеграл от любой рациональной функции может быть выражен через элементарные функции в конечном виде, а именно:

- 1) через логарифмы- в случаях простейших дробей 1 типа;
- 2) через рациональные функции- в случае простейших дробей 2 типа
- 3) через логарифмы и арктангенсы- в случае простейших дробей 3 типа
- 4) через рациональные функции и арктангенсы- в случае простейших дробей 4 типа.

## 5) Интегралы от иррациональных функций

Не от всякой иррациональной функции интеграл выражается через элементарные функции. Сейчас мы рассмотрим те иррациональные функции, интегралы от которых с помощью подстановок приводятся к интегралам от рациональных функций и, следовательно, до конца интегрируются.

1.Рассмотрим интеграл  $\int R(x, x^{m/n}, \dots, x^{r/s}) dx$ , где  $R$ -рациональная функция своих аргументов <sup>1)</sup>.

Пусть  $R$ -общий знаменатель дробей  $m/n, \dots, r/s$ . Сделаем подстановку  $x = t^k$ ,  $dx = kt^{k-1} dt$ . Тогда каждая дробная степень  $x$  выразится через целую степень  $t$  и, следовательно, подынтегральная функция преобразуется в рациональную функцию от  $t$ .

**Пример 1.** Требуется вычислить интеграл  $\int \frac{x^{1/2} dx}{x^{3/4} + 1}$ .

Решение. Общий знаменатель дробей  $1/2, 3/4$ , есть 4; поэтому делаем подстановку  $x = t^4, dx = 4t^3 dt$ ; тогда

$$\begin{aligned}\int \frac{x^{1/2} dx}{x^{3/4} + 1} &= 4 \int \frac{t^2}{t^3 + 1} t^3 dt = 4 \int \frac{t^5}{t^3 + 1} dt = 4 \int (t^2 - \frac{t^2}{t^3 + 1}) dt = \\ &= 4 \int t^2 dt - 4 \int \frac{t^2}{t^3 + 1} dt = 4 \frac{t^3}{3} - \frac{4}{3} \ln |t^3 + 1| + C = \frac{4}{3} [x^{3/4} - \ln |x^{3/4} + 1|] + C.\end{aligned}$$

2. Рассмотрим теперь интеграл вида

$$\int R[x, (\frac{ax+b}{cx+d})^{m/n}, \dots, (\frac{ax+b}{cx+d})^{r/s}] dx$$

Этот интеграл сводится к интегралу от рациональной функции с помощью подстановки

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^k,$$

где  $k$  - общий знаменатель дробей  $m/n, \dots, r/s$ .

**Пример 2.** Требуется вычислить интеграл

$$\int \frac{\sqrt{x+4}}{x} dx.$$

Решение. Делаем подстановку  $x+4 = t^2, x = t^2 - 4, dx = 2t dt$ ; тогда

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x+4}}{x} dx &= 2 \int \frac{t^2}{t^2 - 4} dt = 2 \int (1 + \frac{4}{t^2 - 4}) dt = 2 \int dt + 8 \int \frac{dt}{t^2 - 4} = \\ &= 2t + 2 \ln \left| \frac{t-2}{t+2} \right| + C = 2\sqrt{x+4} + 2 \ln \left| \frac{\sqrt{x+4} - 2}{\sqrt{x+4} + 2} \right| + C.\end{aligned}$$

## ПРИЛОЖЕНИЕ 1

### Учебно-тренировочные тестовые задания ЕГЭ

Тестовые задания базового уровня А.

#### А1. Первообразная алгебраических функций

**A1.1** Найдите  $f(-2)$ , если  $f'(x) = 6x^3 - 8x + 3$ ,  $f(2) = 0$ .

- A) 10    B) 12    C) -12    D) 18    E) -18

**A1.2** Найдите первообразную функции  $\sqrt{x} + x$

- A)  $\frac{2}{3}\sqrt{x^3} + \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + C$     B)  $\frac{3}{2}\sqrt{x^3} + \frac{3}{4}x^4 + C$     C)  $\frac{2}{3}\sqrt{x} + \frac{3}{4}\sqrt[3]{x} + C$     D)  $\frac{2}{3}\sqrt{x^3} + \frac{3}{4}\sqrt{x^4} + C$

**A1.3** Найдите все первообразные для функции  $f(x) = \frac{3}{4\sqrt{x}}$

- A)  $\frac{3\sqrt{x}}{2} + C$     B)  $3\sqrt{x} + C$     C)  $\frac{4}{3}\sqrt{x} + C$     D)  $-\frac{3}{2}\sqrt{x} + C$     E)  $6\sqrt{x} + C$

**A1.4** Найдите первообразную функцию для  $y = 2(2x+5)^4$

- A)  $Y = (2x+5)^5 + C$     B)  $Y = \frac{(2x+5)^3}{3} + C$     C)  $Y = \frac{(2x+5)^3}{4} + C$     D)  $Y = \frac{(2x+5)^3}{5} + C$     E)  $Y = 4(2x+5)^3 + C$

**A1.5** Найдите первообразную функции  $f(x) = 8x^3 - 5$ , график которой проходит через точку  $M(1; 4)$ .

- A)  $2x^4 - 5x + 7$     B)  $24x^2 + \frac{1}{6}$     C)  $2x^4 - 5x$     D)  $2x^4 - 5x + 1$     E)  $4x^4 - 5x + 7$

**A1.6** Найдите  $f(0)$ , если  $f'(x) = 6x^2 - 3x + 5$  и  $f(4) = 130$ .

- A) 6    B) 4    C) -4    D) -6    E) 8

**A1.7** Для функции  $f(x) = \frac{4}{(3-2x)^3}$ , найдите первообразную, график которой проходит через точку  $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{16}\right)$

- A)  $\frac{4}{3-2x} + \frac{9}{16}$     B)  $-\frac{4}{3-2x} + \frac{49}{16}$     C)  $-\frac{2}{3-2x} + \frac{17}{16}$     D)  $\frac{8}{3-2x} + \frac{33}{16}$     E)  $\frac{2}{3-2x} - \frac{7}{16}$

**A1.8** Найдите первообразную функции  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$ , график которой проходит через точку  $A(3; 5)$ .

- A)  $\sqrt{x-2} + 4$     B)  $2\sqrt{x-2} + 3$     C)  $\sqrt{x-2} + 3$     D)  $2\sqrt{x-2} + 4$     E)  $\frac{1}{\sqrt{x-2}} + 4$



## A2. Вычисление интегралов алгебраических функций

A2.1 Вычислите:  $\int_0^3 x^3 dx$

- A) 4   B) -4   C)  $\frac{16}{3}$    D) 2   E)  $\frac{8}{3}$

A2.2 Вычислите:  $\int_0^1 (3x-1)^3 dx$

- A) 3   B) 1   C)  $-\frac{1}{3}$    D)  $\frac{7}{9}$    E)  $2\frac{1}{3}$

A2.3 Вычислите:  $\int_{-1}^0 (2x+1)^3 dx$

- A)  $\frac{1}{6}$    B)  $\frac{2}{3}$    C) 1   D)  $\frac{1}{3}$    E) -1

A2.4 Вычислите:  $\int_{-1}^0 (1+3x)^3 dx$

- A) 1   B) -1   C)  $\frac{7}{9}$    D)  $-\frac{1}{3}$    E)  $\frac{2}{3}$

A2.5 Вычислите  $\int_1^9 \left( 3\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx$

- A) 45   B) 52   C) 54   D) 56   E) 60

A2.6 Вычислите  $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{5x-1}}$ .

- A) 1   B)  $\frac{1}{2}$    C)  $\frac{1}{4}$    D) 2   E)  $\frac{2}{5}$

A2.7 Вычислите  $\int_0^9 \sqrt[3]{x\sqrt{x}} dx$ .

- A) 18   B) 9   C) 27   D)  $6\sqrt{3}$    E)  $9\sqrt{3}$

A2.8 Вычислите  $\int_1^9 \left( \frac{2x}{5} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) dx$

- A) 7   B) 8   C) 10   D) 12   E) 15

### А3. Первообразная тригонометрических функций

**А3.1** Для какой из следующих функций, функция  $F(x) = 3\operatorname{tg}x + 5x + c$  является первообразной?

- А)  $y = -\frac{3}{\sin^2 x} + 5$  В)  $y = \frac{3}{\sin^2 x} + 5$  С)  $y = 3\operatorname{tg}x + c$  Д)  $y = -\frac{3}{\cos^2 x} + 5$  Е)  $y = \frac{3}{\cos^2 x} + 5$

**А3.2** Для какой из следующих функций функция  $F(x) = \operatorname{ctg}x - 2x + C$  является первообразной?

- А)  $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x} - 2$  В)  $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 2$  С)  $f(x) = -\frac{1}{\cos^2 x} - 2$  Д)  $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x} + 2$  Е)  $f(x) = -\frac{1}{\sin^2 x} - 2$

**А3.3** Укажите первообразную функции  $f(x) = \frac{1}{x^2} - \cos x$

- А)  $-\frac{1}{x} - \sin x + C$  В)  $-\frac{1}{x^2} - \sin x + C$  С)  $\frac{1}{x^2} - \sin x + C$  Д)  $\frac{1}{x} + \sin x + C$  Е)  $-\frac{1}{x^2} + \sin x + C$

**А3.4** Найдите первообразную функции:  $f(x) = x + \operatorname{ctg}^2 x$

- А)  $\frac{x^2}{2} + \frac{1}{3}\operatorname{ctg}3x + C$  В)  $\frac{x^2}{2} - \frac{1}{3}\operatorname{ctg}3x + C$  С)  $\frac{x^2}{2} - x - \operatorname{ctg}x + C$  Д)  $\frac{x^2}{2} - x + \operatorname{ctg}x + C$  Е)  $\frac{x^2}{2} + x - \operatorname{ctg}x + C$

**А3.5** Найдите первообразную для функции  $f(x) = -\frac{4\cos(2x)}{\sin^2(2x)}$ .

- А)  $\operatorname{tg}x + \operatorname{ctg}x + C$  В)  $\operatorname{tg}x - \operatorname{ctg}x + C$  С)  $\operatorname{ctg}x - \operatorname{tg}x + C$  Д)  $\frac{\operatorname{tg}x}{\operatorname{ctg}x} + C$  Е)  $\frac{\operatorname{ctg}x}{\operatorname{tg}x} + C$

**А3.6** Укажите первообразную функции  $y = \frac{1}{\sin 2(3x+1)}$

- А)  $-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}(3x+1) + C$  В)  $\frac{1}{3}\operatorname{ctg}(3x+1) + C$  С)  $\frac{1}{3}\operatorname{tg}(3x+1) + C$  Д)  $-\frac{1}{3}\operatorname{tg}(3x+1) + C$  Е)  $-3\operatorname{ctg}(3x+1) + C$

**А3.7** Укажите первообразную функции:  $y = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{3}+1\right)}$

- А)  $\frac{1}{3}\operatorname{tg}\left(\frac{x}{3}+1\right) + C$  В)  $3\operatorname{tg}\left(\frac{x}{3}+1\right) + C$  С)  $-\frac{1}{3}\operatorname{tg}\left(\frac{x}{3}+1\right) + C$  Д)  $-3\operatorname{tg}\left(\frac{x}{3}+1\right) + C$  Е)  $\operatorname{tg}\frac{x}{3} + C$

**A3.8** Найдите первообразную функцию для функции  $f(x) = \frac{\cos 2x}{\sin x - \cos x}$ .

A)  $\sin x - \cos x + C$  B)  $\operatorname{ctg} 2x + C$  C)  $\cos 2x - \sin x + C$  D)  $\sin 2x - \cos x + C$  E)  $-\sin x + \cos x + C$

## 15. Несобственные интегралы. Несобственные интегралы первого

Выше  
рода

был определён интеграл для ограниченных и заданных на ограниченном отрезке функций. Распространим понятие интеграла на случаи, когда одно или оба этих условия нарушаются.

**Определение.** Пусть  $f(x)$  задана на бесконечном промежутке  $[a, \infty)$  и для всякого

$A \geq a$  существует интеграл  $\int_a^A f(x) dx$ . Предел  $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x) dx$  называется несобственным интегралом первого рода (интегралом по неограниченному промежутку) и

обозначается  $\int_a^{\infty} f(x) dx$ . Если  $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x) dx$  существует и конечен, то несобственный интеграл первого рода называется сходящимся, если же он не существует или равен Бесконечности, то несобственный интеграл первого рода называется расходящимся.

**Примеры.**

1. Рассмотрим  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ . Пусть  $\alpha = 1$ . Тогда  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_1^A \frac{dx}{x} = \lim_{A \rightarrow \infty} (\ln x|_1^A) = \lim_{A \rightarrow \infty} (\ln A - \ln 1) = \infty$ . Таким образом, рассмотренный интеграл при  $\alpha = 1$  расходится. Пусть теперь  $\alpha \neq 1$ . Тогда

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_1^A \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{A \rightarrow \infty} \left. \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right|_1^A = \begin{cases} \infty & \text{при } \alpha < 1, \\ \frac{1}{\alpha-1} & \text{при } \alpha > 1, \end{cases}$$

И мы окончательно получили, что рассматриваемый интеграл при  $\alpha \leq 1$  расходится и при  $\alpha > 1$  сходится. Этот интеграл часто используется в признаке сравнения в качестве эталонного.

2. Выясним сходимость интеграла  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 2x + 2}$ .

Имеем  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 2x + 2} = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_1^A \frac{dx}{x^2 - 2x + 2} = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_1^A \frac{dx}{(x-1)^2 + 1} =$

$= \lim_{A \rightarrow \infty} (\operatorname{arctg}(x-1)) \Big|_1^A = \lim_{A \rightarrow \infty} (\operatorname{arctg}(A-1) - \operatorname{arctg} 0) = \frac{\pi}{2}$ . Следовательно, интеграл сходится и его значение равно  $\frac{\pi}{2}$ .

3. Выяснить сходимость интеграла  $\int_1^{\infty} x e^{-x^2} dx = \int_1^{\infty} x \exp(-x^2) dx$ . По определению получаем

$\int_1^{\infty} x e^{-x^2} dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_1^A x e^{-x^2} dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2}\right) \Big|_1^A e^{-x^2} d(-x^2) = \lim_{A \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2} e^{-x^2} \Big|_1^A\right) = \frac{1}{2e} - \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{2} e^{-A^2} = \frac{1}{2e}$ .

Следовательно, интеграл сходится и его значение равно  $0,5e^{-1}$ .

4. Для интеграла  $\int_e^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$  имеем

$\int_e^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_e^A \frac{d \ln x}{\sqrt{\ln x}} = \lim_{A \rightarrow \infty} 2\sqrt{\ln x} \Big|_e^A = \lim_{A \rightarrow \infty} (2\sqrt{\ln A} - 2) = \infty$ .

Следовательно, интеграл расходится.

5. Для интеграла  $\int_e^{\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x}$  по определению имеем

$\int_e^{\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x} = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_e^A \frac{d \ln x}{\ln^2 x} = \lim_{A \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{\ln x}\right) \Big|_e^A = \lim_{A \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{\ln A} + 1\right) = 1$ .

Следовательно, интеграл сходится и его значение равно 1.

6. Выяснить сходимость интеграла  $\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} dx$ ,  $\alpha > 0$ .

По определению

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A e^{-\alpha x} dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \left( -\frac{1}{\alpha} \right) \int_0^A e^{-\alpha x} d(-\alpha x) = = \lim_{A \rightarrow \infty} \left( -\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha x} \Big|_0^A \right) = \frac{1}{\alpha} - \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha} e^{-A} = \frac{1}{\alpha}.$$

Следовательно, интеграл сходится и его значение равно  $\frac{1}{\alpha}$ .

#### Задание 2.4

Вычислить несобственные интегралы первого рода или доказать их расходимость.

$$1. \int_0^{\infty} \frac{dx}{x \ln^3 x}; 2. \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^3 \sqrt{\ln x}}; 3. \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 10}; 4. \int_0^{\infty} \frac{(x+1)dx}{x^2 + 2x + 10};$$

$$5. \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+2}}; 6. \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^3}}.$$

Ответы: **1.**  $0,5$ ; **2.** расходится; **3.**  $\frac{\pi}{6} - \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{1}{3}$ ; **4.** расходится; **5.** расходится; **6.**  $2$ .

Нам в дальнейшем понадобится следующий важный результат.

**Теорема 2.8.** (Критерий Коши). Несобственный интеграл первого рода сходится тогда и только тогда, когда для всякого  $\varepsilon > 0$  существует  $A \geq a$  Такое, что для всех

$$A_1, A_2 \geq A \text{ выполнено неравенство } \left| \int_{A_1}^{A_2} f(x) dx \right| < \varepsilon.$$

Доказательство этого результата опустим.

**Определение.** Несобственный интеграл первого рода  $\int_a^{\infty} f(x) dx$  называется **абсолютно сходящимся**, если сходится интеграл  $\int_a^{\infty} |f(x)| dx$

Отметим, что если несобственный интеграл первого рода сходится абсолютно, то он

сходится. Действительно, тогда для интеграла  $\int_a^{\infty} |f(x)| dx$  выполнен критерий Коши, а в

силу справедливости неравенства  $\left| \int_{A_1}^{A_2} f(x) dx \right| \leq \left| \int_{A_1}^{A_2} |f(x)| dx \right|$ , критерий Коши выполнен и для

интеграла  $\int_a^{\infty} f(x) dx$

Обратное утверждение неверно.

Сходимость несобственного интеграла  $\int_{-\infty}^a f(x) dx$  определяется аналогично. Предлагается проделать это самостоятельно.

Для несобственного интеграла  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$  можем записать  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{\infty} f(x) dx$  и назвать этот интеграл сходящимся, если сходятся оба слагаемых. Если хотя бы один из этих интегралов расходится, то будем считать интеграл  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$  расходящимся. В качестве точки  $a$  выбирают обычно 0.

**Пример.** Рассмотрим интеграл  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dx}{1+x^2}$ . По определению сходимости этого интеграла получаем

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dx}{1+x^2} &= \lim_{A_1 \rightarrow -\infty} \int_{A_1}^0 \frac{x dx}{1+x^2} + \lim_{A_2 \rightarrow +\infty} \int_0^{A_2} \frac{x dx}{1+x^2} = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{A_1 \rightarrow -\infty} \ln(x^2 + 1) \Big|_{A_1}^0 + \frac{1}{2} \lim_{A_2 \rightarrow +\infty} \ln(x^2 + 1) \Big|_0^{A_2}. \end{aligned}$$

Так как оба слагаемых расходятся, то исходный интеграл расходится. Получаемая при этом неопределённость  $\infty - \infty$  при разных скоростях стремления  $A_1$  к  $-\infty$  и  $A_2$  к  $+\infty$  даёт разные результаты. В частности, если  $A_1 = -\sqrt{n^2 - 1}$ ,  $A_2 = \sqrt{n^2 - 1}$ , то

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \lim_{A_1 \rightarrow -\infty} \ln(x^2 + 1) \Big|_{A_1}^0 + \frac{1}{2} \lim_{A_2 \rightarrow +\infty} \ln(x^2 + 1) \Big|_0^{A_2} &= \\ = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} (\ln n - 2 \ln n) &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = -\infty. \end{aligned}$$

Если  $A_1 = -\sqrt{n^2 - 1}$ ,  $A_2 = \sqrt{n^2 - 1}$ , то абсолютно аналогично показывается, что этот предел равен  $+\infty$ . Подобрав скорости стремления  $A_1$  к  $-\infty$  и  $A_2$  к  $+\infty$  можно получить в пределе любое заранее заданное число от  $-\infty$  до  $+\infty$ .

С другой стороны, при согласованном стремлении верхнего и нижнего пределов к  $\infty$  можем записать

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dx}{1+x^2} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A \frac{x dx}{1+x^2} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) \Big|_{-A}^A =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{A \rightarrow +\infty} (\ln(A^2 + 1) - \ln(A^2 + 1)) = 0.$$

Это дает возможность ввести новое понятие.

**Определение.** Говорят, что несобственный интеграл первого рода  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$  сходится в смысле главного значения Коши, если существует и конечен предел

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A f(x) dx.$$

Рассмотренный выше пример показывает, что несобственный интеграл первого рода

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$  может сходиться в смысле главного значения Коши и расходиться в обычном смысле.

Отметим несколько свойств несобственных интегралов первого рода  $\int_a^{\infty} f(x) dx$ .

1. Если интеграл  $\int_a^{\infty} f(x) dx$  сходится, то для всякого  $b \geq a$  интеграл  $\int_b^{\infty} f(x) dx$  сходится и

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^{\infty} f(x) dx$$

2. Если интеграл  $\int_a^{\infty} f(x) dx$  сходится, то сходится интеграл  $\int_a^{\infty} \alpha f(x) dx$  и имеет место равенство

$$\int_a^{\infty} \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^{\infty} f(x) dx.$$

3. Если интегралы  $\int_a^{\infty} f(x) dx$  и  $\int_a^{\infty} g(x) dx$  сходятся, то сходятся интегралы  $\int_a^{\infty} (f(x) \pm g(x)) dx$  и имеет место равенство

$$\int_a^{\infty} (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^{\infty} f(x) dx \pm \int_a^{\infty} g(x) dx.$$

Обратное утверждение неверно, то есть, если интеграл от алгебраической суммы функций сходится, то интегралы от слагаемых сходиться не обязаны. Например,

интегралы  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$  и  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x+1}$  расходятся, а интеграл  $\int_1^{\infty} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x(x+1)}$ , как будет показано позднее, сходится.

Для других типов несобственных интегралов первого рода свойства аналогичны.

Сходимость не всех несобственных интегралов первого рода просто выяснить по определению. Поэтому часто используют так называемые признаки сравнения в неопределенной и предельной формах.

**Теорема 2.9.** Пусть для всякого  $x \geq A$  ( $A \geq a$ ) выполнено неравенство  $|f(x)| \leq |g(x)|$ . Тогда, если интеграл  $\int_a^{\infty} g(x) dx$  абсолютно сходится, то интеграл  $\int_a^{\infty} f(x) dx$  абсолютно сходится, а если интеграл  $\int_a^{\infty} f(x) dx$  абсолютно расходится, то интеграл  $\int_a^{\infty} g(x) dx$  абсолютно расходится.

**Доказательство.** Действительно, в условиях теоремы для всех  $A \geq a$  имеем

$\int_a^A |f(x)| dx \leq \int_a^A |g(x)| dx$ . Тогда, если интеграл  $\int_a^{\infty} |g(x)| dx$  сходится, то  $\int_a^A |f(x)| dx$  есть монотонно возрастающая ограниченная сверху функция от  $A$  и поэтому имеет предел при  $A \rightarrow \infty$ . Если интеграл  $\int_a^{\infty} |f(x)| dx$  расходится, то  $\lim_{A \rightarrow \infty} \int_a^A |f(x)| dx = \infty$  и поэтому  $\lim_{A \rightarrow \infty} \int_a^A |g(x)| dx = \infty$ .

**Теорема 2.10.** Если  $f(x)$  и  $g(x)$  - бесконечно малые в  $+\infty$  одного порядка малости, то есть  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K \neq 0, \infty$ , то интегралы  $\int_a^{\infty} f(x) dx$  и  $\int_a^{\infty} g(x) dx$  либо оба абсолютно сходятся, либо оба абсолютно расходятся.

**Доказательство.** Так как  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K$ , то  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = |K|$ . Возьмем  $0 < \varepsilon < |K|$ . По определению предела существует  $M > 0$  такое, что для всех  $x > M$  выполнено

неравенство  $|K| - \varepsilon < \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < |K| + \varepsilon$ , а, следовательно, и неравенство  $|g(x)|(|K| - \varepsilon) < |f(x)| < (|K| + \varepsilon)|g(x)|$ . Из последнего неравенства и теоремы 2.9 получаем утверждение теоремы.

**Замечание.** После изучения теоремы 2.10 может сложиться впечатление, что для



сходимости несобственного интеграла первого рода, в том числе и абсолютной, необходимо, чтобы подынтегральная функция была бесконечно малой при  $x \rightarrow \infty$ . То, что это не так, показывает следующий пример [15].

Возьмем функцию, график которой состоит из отрезков прямых, соединяющих

точки  $\left(n - \frac{1}{2^n}, 0\right)$ ,  $(n, 1)$ ,  $\left(n + \frac{1}{2^n}, 0\right)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Ее аналитическое выражение имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 2^n x + 1 - n 2^n, & x \in \left[n - \frac{1}{2^n}, n\right], \\ -2^n x + 1 + n 2^n, & x \in \left[n, n + \frac{1}{2^n}\right], \\ 0, & x \notin \left[n - \frac{1}{2^n}, n + \frac{1}{2^n}\right] \end{cases}$$

Площадь, заключенная между графиком этой функции и осью  $OX$ , равна сумме

площадей треугольников с вершинами в точках  $\left(n - \frac{1}{2^n}, 0\right)$ ,  $(n, 1)$ ,  $\left(n + \frac{1}{2^n}, 0\right)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ .

Так как площадь каждого такого треугольника равна  $\frac{1}{2^n}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , то

$\int_1^{\infty} f(x) dx = \frac{1}{4} + \frac{0,25}{1-0,5} = \frac{3}{4}$ . Заметим, что условие ограниченности функции  $f(x)$

несущественно, так как вершины треугольников можно взять, например, в точках

$\left(n - \frac{1}{n 2^n}, 0\right)$ ,  $(n, n)$ ,  $\left(n + \frac{1}{n 2^n}, 0\right)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ .

## Примеры

1. Выяснить сходимость интеграла  $\int_1^{\infty} \frac{2 + \sin x}{x^2} dx$

Так как  $\left| \frac{2 + \sin x}{x^2} \right| \leq \frac{3}{x^2}$  для всех  $x \geq 1$ , а интеграл  $\int_1^{\infty} \frac{3}{x^2} dx$  сходится, то и исходный интеграл тоже сходится.

2. Выяснить сходимость интеграла  $\int_1^{\infty} \frac{1}{x(x+1)} dx$ .

Находя порядок малости подынтегральной функции относительно функции  $\frac{1}{x}$ , получаем

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^\alpha}{x(x+1)} = \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha < 2; \\ 1, & \text{если } \alpha = 2; \\ \infty, & \text{если } \alpha > 2. \end{cases}$$

Таким образом, порядок малости подынтегральной функции относительно  $\frac{1}{x}$  равен 2

и так как  $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$  сходится, то исходный интеграл сходится.

3. Выяснить сходимость интеграла  $\int_1^\infty \frac{1}{(x+1)\sqrt{x+2}} dx$

Находя порядок малости подынтегральной функции относительно функции  $\frac{1}{x}$ , получаем

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^\alpha}{(x+1)\sqrt{x+2}} = \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha < 1,5; \\ 1, & \text{если } \alpha = 1,5; \\ \infty, & \text{если } \alpha > 1,5. \end{cases}$$

Таким образом, порядок малости подынтегральной функции относительно  $\frac{1}{x}$  равен

1,5 и так как  $\int_1^\infty \frac{dx}{x^{1,5}}$  сходится, то исходный интеграл сходится.

4. Выяснить сходимость интеграла  $\int_1^\infty \frac{1}{(x+2)^3 \sqrt{x+5}} dx$

Находя порядок малости подынтегральной функции относительно функции  $\frac{1}{x}$ , получаем

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^\alpha}{(x+2)^3 \sqrt{x+5}} = \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha < \frac{4}{3}; \\ 1, & \text{если } \alpha = \frac{4}{3}; \\ \infty, & \text{если } \alpha > \frac{4}{3}. \end{cases}$$

Таким образом, порядок малости подынтегральной функции относительно  $\frac{1}{x}$  равен  $\frac{4}{3}$  И, следовательно, интеграл сходится.

5. Выяснить сходимость интеграла  $\int_1^\infty \frac{\sqrt{x+2}}{x^2+4} dx$

Находя порядок малости подынтегральной функции относительно функции  $\frac{1}{x}$ ,

получаем

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+2} x^\alpha}{x^2 + 4} = \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha < 1,5; \\ 1, & \text{если } \alpha = 1,5; \\ \infty, & \text{если } \alpha > 1,5. \end{cases}$$

Таким образом, порядок малости подынтегральной функции относительно  $\frac{1}{x}$  равен 1,5 и, следовательно, интеграл сходится.

6. Выяснить сходимость интеграла  $\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x^3+2}}{x^2+5} dx$

Находя порядок малости подынтегральной функции относительно функции  $\frac{1}{x}$ , получаем

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^\alpha \sqrt{x^3+2}}{x^2+5} = \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha < 0,5; \\ 1, & \text{если } \alpha = 0,5; \\ \infty, & \text{если } \alpha > 0,5. \end{cases}$$

Таким образом, порядок малости подынтегральной функции относительно  $\frac{1}{x}$  равен 0,5 и, следовательно, интеграл расходится.

7. Интеграл  $\int_1^{\infty} e^{-x^2} dx$  сходится, так как имеет место оценка  $e^{-x^2} \leq x e^{-x^2}$  для всех  $x \geq 1$ , а интеграл  $\int_1^{\infty} x e^{-x^2} dx$ , как было показано ранее, сходящийся.

8. Интеграл  $\int_e^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{\ln x}}$  расходится, так как имеет место оценка  $\frac{1}{\sqrt{\ln x}} \geq \frac{1}{x \sqrt{\ln x}}$  для всех  $x \geq e$ , а интеграл  $\int_e^{\infty} \frac{dx}{x \sqrt{\ln x}}$ , как было показано ранее, расходится.

### Задание 2.5

Используя признак сравнения выяснить сходимость несобственных интегралов. В ответе указана сходимость и порядок малости подынтегральной функции относительно  $\frac{1}{x}$ .

1.  $\int_1^{\infty} \frac{x+3}{(x^2+1)\sqrt{x+2}} dx$ ; 2.  $\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x-1}}{x^2+4\sqrt{x}-1} dx$ ; 3.  $\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x^3+5}} dx$ ; 4.  $\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x^4+8}} dx$ ; 5.  $\int_1^{\infty} \frac{\arctg x}{2+x^2 \cdot \sqrt[3]{x+2}} dx$ ; 6.

$$\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x+2}}{(7x+8)(\sqrt[3]{x^2+1})} dx$$

Ответы: 1. сходится,  $\alpha = 1,5$ ; 2. сходится,  $\alpha = 1,5$ ;

3. расходится,  $\alpha = 1$ ; 4. сходится,  $\alpha = 1,5$ ; 5. сходится,  $\alpha = \frac{4}{3}$ ;

6. сходится,  $\alpha = \frac{7}{6}$ ;

## 16. Несобственные интегралы второго рода



Если  $f(x)$  неограничена на  $(a, b)$ , то особенность может быть в точках  $a$ ,  $b$  или внутренней точке этого отрезка. Мы рассмотрим случай с особенностью в точке  $b$ .

**Определение.** Пусть  $f(x)$  задана на полуинтервале  $[a, b)$  и  $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \infty$ . Пусть далее для всякого  $0 < \delta < b - a$  существует интеграл  $\int_a^{b-\delta} f(x) dx$ . Предел  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_a^{b-\delta} f(x) dx$  называется несобственным интегралом второго рода (интегралом от неограниченной функции) и обозначается  $\int_a^b f(x) dx$ . Если  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_a^{b-\delta} f(x) dx$  существует и конечен, то несобственный интеграл второго рода называется сходящимся, если же он не существует или равен бесконечности, то несобственный интеграл второго рода называется расходящимся.

Аналогично определяются несобственные интегралы второго рода в случаях, когда подынтегральная функция бесконечно большая на нижнем пределе, во внутренней точке отрезка  $[a, b]$ , на верхнем и нижнем пределах одновременно. Для удобства изложения мы рассматриваем случай особенности на верхнем пределе. Для остальных вариантов предлагается сделать это самостоятельно.

### Примеры.

1. Рассмотрим  $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ . Пусть  $\alpha = 1$ . Тогда  $\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\ln 1 - \ln \varepsilon) = \infty$ . Таким образом, рассмотренный интеграл при  $\alpha = 1$  расходится. Пусть теперь  $\alpha \neq 1$ . Тогда

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_\varepsilon^1 = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & \text{при } \alpha < 1, \\ \infty & \text{при } \alpha > 1, \end{cases}$$

И мы окончательно получили, что рассматриваемый интеграл при  $\alpha < 1$  сходится и при  $\alpha \geq 1$  расходится. Аналогичные выводы можно сделать про

несобственные интегралы  $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$ ,  $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$ .

Интегралы  $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ ,  $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$ ,  $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$  используются в признаке сравнения в качестве эталонных.

2. В интеграле  $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$  подынтегральная функция имеет особенность в точке  $x = 1$ , поэтому  $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{1+\delta}^e \frac{d \ln x}{\sqrt{\ln x}} =$   
 $= \lim_{\delta \rightarrow 0} 2\sqrt{\ln x} \Big|_{1+\delta}^e = \lim_{\delta \rightarrow 0} (2\sqrt{\ln e} - 2\sqrt{\ln(1+\delta)}) = 2$ .

Следовательно, интеграл сходится и его значение равно 2.

3. В интеграле  $\int_0^1 \frac{dx}{x\sqrt{-\ln x}}$  подынтегральная функция имеет особенность в точках  $x = 0$  и  $x = 1$ , поэтому интеграл разбиваем на сумму двух, например,  
 $\int_0^1 \frac{dx}{x\sqrt{-\ln x}} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x\sqrt{-\ln x}} + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{x\sqrt{-\ln x}}$ . Для первого из них  
 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x\sqrt{-\ln x}} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_\delta^{\frac{1}{2}} \frac{d \ln x}{\sqrt{-\ln x}} = - \lim_{\delta \rightarrow 0} 2\sqrt{-\ln x} \Big|_\delta^{\frac{1}{2}} =$   
 $= \lim_{\delta \rightarrow 0} (-2\sqrt{-\ln 0,5} + 2\sqrt{-\ln \delta}) = -\infty$ . Следовательно, интеграл расходится и поэтому исходный интеграл также расходится.

4. В интеграле  $\int_0^{1/e} \frac{dx}{x \ln^2 x}$  подынтегральная функция имеет особенность в точке  $x = 0$ , поэтому

$\int_0^{1/e} \frac{dx}{x \ln^2 x} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_\delta^{1/e} \frac{d \ln x}{\ln^2 x} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left( -\frac{1}{\ln x} \right) \Big|_\delta^{1/e} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left( -\frac{1}{\ln \frac{1}{e}} + \frac{1}{\ln \delta} \right) = 1$  Следовательно, интеграл сходится и его значение

равно 1.

5. Выясним сходимость интеграла  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ . Подынтегральная функция имеет особенность в точке  $x=1$ . Поэтому

$$= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_0^{1-\delta} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \arcsin x \Big|_0^{1-\delta} = \lim_{\delta \rightarrow 0} (\arcsin(1-\delta) - \arcsin 0) = \frac{\pi}{2}$$

Следовательно, интеграл сходится и его значение равно  $\frac{\pi}{2}$ .

6. Выяснить сходимость интеграла  $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$ .

Подынтегральная функция имеет особенность в точке  $x=1$ . По определению имеем

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{1+\delta}^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}} = \lim_{\delta \rightarrow 0} (2\sqrt{x-1}) \Big|_{1+\delta}^2 = 2.$$

7. Выяснить сходимость интеграла  $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{2-x}}$ .

Подынтегральная функция имеет особенность в точке  $x=2$ . По определению имеем

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{2-x}} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_1^{2-\delta} \frac{dx}{\sqrt{2-x}} = - \lim_{\delta \rightarrow 0} (2\sqrt{2-x}) \Big|_1^{2-\delta} = 2.$$

8. Выяснить сходимость интеграла  $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{2-x}}$ .

Подынтегральная функция имеет особенность в точке  $x=2$ . Поэтому разбиваем интеграл на сумму двух

$$\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{2-x}} = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{2-x}} + \int_2^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{2-x}}. \text{ Для первого из них имеем}$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{2-x}} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_1^{2-\delta} \frac{dx}{\sqrt[3]{2-x}} = - \lim_{\delta \rightarrow 0} \left( \frac{3}{2} \sqrt[3]{(2-x)^2} \right) \Big|_1^{2-\delta} = \frac{3}{2}.$$

Аналогично доказывается сходимость второго слагаемого. Следовательно исходный интеграл сходится.

### Задание 2.6

Используя определение выяснить сходимость несобственных интегралов второго рода.

$$1. \int_1^e \frac{dx}{x^4 \sqrt{\ln x}}; 2. \int_0^1 \frac{dx}{x^5 \sqrt{\ln x}}; 3. \int_{0,5}^1 \frac{dx}{x^5 \sqrt{\ln x}}; 4. \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{3-x}}; 5. \int_2^5 \frac{dx}{\sqrt[4]{x-2}}; 6. \int_1^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-3}}; 7. \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{(2-x)^3}}; 8. \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{(3-x)^4}}; 9. \int_1^4 \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-3)^6}}.$$

Ответы: 1.  $\frac{4}{3}$ ; 2. расходится; 3.  $\sqrt[5]{(\ln 0,5)^4}$ ; 4.  $-\frac{3}{2}\sqrt[3]{9}$ ; 5.  $\frac{4}{3}\sqrt[4]{27}$ ; 6.  $\frac{3}{2}(1-\sqrt[3]{4})$ ; 7. расходится; 8. расходится; 9. расходится.

Аналогично случаю несобственных интегралов первого рода формулируются и доказываются критерий Коши и признаки сравнения для несобственных интегралов второго рода.

**Теорема 2.11.** (Критерий Коши). Несобственный интеграл второго рода сходится тогда и только тогда, когда для всякого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$  Такое,

что для всех  $\delta_1, \delta_2 \leq \delta$  выполняется неравенство  $\left| \int_{\delta_1}^{\delta_2} f(x) dx \right| < \varepsilon$

Доказательство этого результата опустим.

**Теорема 2.12.** Пусть для всякого  $b - \delta \leq x < b$  Выполнено неравенство  $0 \leq f(x) \leq g(x)$ . Тогда, если интеграл  $\int_a^b g(x) dx$  сходится, то интеграл  $\int_a^b f(x) dx$  сходится, а если интеграл  $\int_a^b f(x) dx$  расходится, то интеграл  $\int_a^b g(x) dx$  расходится.

Доказательство аналогично случаю несобственного интеграла первого рода.

**Теорема 2.13.** Если  $f(x)$  и  $g(x)$  - бесконечно большие одного порядка роста, то есть  $\lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = K \neq 0, \infty$ , то интегралы  $\int_a^b f(x) dx$  и  $\int_a^b g(x) dx$  либо оба сходятся, либо оба расходятся.

Доказательство аналогично случаю несобственного интеграла первого рода.

## Примеры

1. Для интеграла  $\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{x-2} \cdot \sqrt[3]{3-x^2}}$  подынтегральная функция имеет особенность в точках  $x=2$  и  $x=\pm\sqrt{3}$ . Точки  $x=\pm\sqrt{3}$  в промежуток интегрирования не входят.

Поэтому, находя порядок роста этой функции относительно  $\frac{1}{x-2}$ , имеем

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^\alpha}{\sqrt{x-2} \cdot \sqrt[3]{3-x^2}} = \begin{cases} \infty, & \text{если } \alpha < 0,5, \\ -1, & \text{если } \alpha = 0,5, \\ 0, & \text{если } \alpha > 0,5. \end{cases}$$

Таким образом, порядок роста равен 0,5 и интеграл сходится.

2. В интеграле  $\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{x-1} \cdot \sqrt[3]{9-x^2}}$  подынтегральная функция имеет особенность в точках  $x=1$  и  $x=\pm 3$ . Точки  $x=1$  и  $x=-3$  в промежуток интегрирования не входят.

Поэтому, находя порядок роста этой функции относительно  $\frac{1}{3-x}$ , имеем

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(3-x)^\alpha}{\sqrt{x-1} \cdot \sqrt[3]{9-x^2}} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(3-x)^\alpha}{\sqrt{x-1} \cdot \sqrt[3]{3-x} \cdot \sqrt[3]{3+x}} = \begin{cases} \infty, & \text{если } \alpha < \frac{1}{3}; \\ \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{6}}, & \text{если } \alpha = \frac{1}{3}; \\ 0, & \text{если } \alpha > \frac{1}{3}. \end{cases} \end{aligned}$$

Таким образом, порядок роста равен  $\frac{1}{3}$  и интеграл сходится.

3. Выясним сходимость интеграла  $\int_0^1 \frac{\sqrt{\sin x}}{x^2} dx$ .

Подынтегральная функция имеет особенность в точке  $x=0$ . Находя порядок роста этой функции относительно  $\frac{1}{x}$ , имеем

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\sin x} \cdot x^\alpha}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\sin x} \cdot x^\alpha}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{x^3}} = \begin{cases} \infty, & \text{если } \alpha < 1,5; \\ 1, & \text{если } \alpha = 1,5; \\ 0, & \text{если } \alpha > 1,5. \end{cases}$$

Таким образом, порядок роста равен 1,5 и интеграл расходится.



4. В интеграле  $\int_0^1 \frac{\sqrt[3]{\sin x}}{x} dx$  подынтегральная функция имеет особенность в точке  $x=0$ . Находя порядок роста этой функции относительно  $\frac{1}{x}$ , имеем

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\sin x} \cdot x^\alpha}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\sin x} \cdot x^\alpha}{\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{x^2}} = \begin{cases} \infty, & \text{если } \alpha < \frac{2}{3}; \\ 1, & \text{если } \alpha = \frac{2}{3}; \\ 0, & \text{если } \alpha > \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Таким образом, порядок роста равен  $\frac{2}{3}$ . И интеграл сходится.

5. Выясним сходимость интеграла  $\int_0^1 \frac{\ln(1+\sqrt[5]{x})}{x} dx$ .

Подынтегральная функция имеет особенность в точке  $x=0$ . Находя порядок роста этой функции относительно  $\frac{1}{x}$ , имеем

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\sqrt[5]{x}) \cdot x^\alpha}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\sqrt[5]{x}) \cdot x^\alpha}{\sqrt[5]{x} \cdot \sqrt[5]{x^4}} = \begin{cases} \infty, & \text{если } \alpha < 0,8; \\ 1, & \text{если } \alpha = 0,8; \\ 0, & \text{если } \alpha > 0,8. \end{cases}$$

Таким образом, порядок роста равен  $0,8$ . И интеграл сходится.

6. В интеграле  $\int_0^1 \frac{e^{\sqrt{x}} - 1}{x} dx$  подынтегральная функция имеет особенность в точке  $x=0$ . Находя порядок роста этой функции относительно  $\frac{1}{x}$ , имеем

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{\sqrt{x}} - 1) \cdot x^\alpha}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{\sqrt{x}} - 1) \cdot x^\alpha}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}} = \begin{cases} \infty, & \text{если } \alpha < 0,5; \\ 1, & \text{если } \alpha = 0,5; \\ 0, & \text{если } \alpha > 0,5. \end{cases}$$

Таким образом, порядок роста равен  $0,5$ . И интеграл сходится.

7. Выяснить сходимость интеграла  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(x-1)}$ .

Подынтегральная функция имеет особенность в точках  $x=0$  и  $x=1$ . Обе входят в промежуток интегрирования. Разбиваем интеграл на два

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(x-1)} = \int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{x}(x-1)} + \int_{0,5}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(x-1)}.$$

Первый из этих интегралов сходится, так как порядок роста подынтегральной функции при  $x \rightarrow 0$  относительно  $\frac{1}{x}$  равен  $\frac{1}{2}$ , а второй расходится, так как порядок роста подынтегральной функции при  $x \rightarrow 1$  относительно  $\frac{1}{1-x}$  равен 1. Поэтому интеграл расходится.

### Задание 2.7

Используя теорему сравнения выяснить сходимость несобственных интегралов. В ответе указаны: точка, в которой функция бесконечно большая; порядок роста подынтегральной функции относительно пробной функции; сходимость.

$$\begin{aligned}
 & 1. \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2} \cdot \sqrt[3]{x-1}}; \quad 2. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt[5]{\sin^2 x}}{x} dx; \quad 3. \int_0^{\pi} \frac{\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{\pi-x}}{\sin x} dx; \\
 & 4. \int_0^1 \frac{\ln(1+\sqrt[7]{x})}{\sqrt{x}} dx; \quad 5. \int_0^2 \frac{e^{\sqrt[4]{x}} - 1}{\sqrt{x^5}} dx; \quad 6. \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[5]{8-x^3}}; \quad 7. \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[4]{16-x^4}}; \\
 & 8. \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[7]{32-x^5}}; \quad 9. \int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{x-2} \cdot \sqrt[4]{9-x^2}}; \quad 10. \int_2^4 \frac{dx}{\sqrt{x+2} \cdot \sqrt[5]{9-x^2}}.
 \end{aligned}$$

Ответы: 1.  $x=1$ ,  $\alpha=\frac{1}{3}$ ,  $x=2$ ,  $\alpha=\frac{1}{2}$ , сходится; 2.  $x=0$ ,  $\alpha=\frac{3}{5}$ , сходится; 3.  $x=0$ ,  $\alpha=\frac{1}{2}$ ,  $x=\pi$ ,  $\alpha=\frac{2}{3}$ , сходится; 4.  $x=0$ ,  $\alpha=\frac{5}{14}$ , сходится; 5.  $x=0$ ,  $\alpha=1$ , расходится; 6.  $x=2$ ,  $\alpha=\frac{1}{5}$ , сходится; 7.  $x=2$ ,  $\alpha=\frac{1}{3}$ , сходится; 8.  $x=2$ ,  $\alpha=\frac{1}{7}$ , сходится; 9.  $x=2$ ,  $\alpha=\frac{1}{2}$ ,  $x=3$ ,  $\alpha=\frac{1}{4}$ , сходится; 10.  $x=3$ ,  $\alpha=\frac{1}{5}$ , сходится;

## **Тема: Дифференциальные уравнения.**

**Дифференциальным уравнением первого порядка** называется уравнение, связывающее независимую переменную  $x$ , искомую функцию  $y(x)$  и ее производную  $y'$ , т.е. уравнение вида

$$(1) \quad F(x, y, y') = 0 \text{ или } y' = f(x, y),$$

где  $f$  – функция двух переменных, а  $F$  – функционал от трех переменных.

**Общим решением дифференциального уравнения** называется такая функция,  $y = y(x)$ , которая обращает уравнение (1) в тождество, т.е.

$$F(x, y(x), y'(x)) \equiv 0 \text{ или } y'(x) \equiv f(x, y(x)).$$

Чтобы решить дифференциальное уравнение его необходимо проинтегрировать, но прежде его необходимо идентифицировать (определить его вид) и преобразовать.

Дифференциальные уравнения 1-го порядка, определенные выше, удобно записывать в следующей форме:

$$(2) \quad \boxed{M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0}$$

### ***Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.***

Пусть  $M(x, y) = u_1(x)g_1(y)$ , а  $N(x, y) = u_2(x)g_2(y)$ , тогда уравнение (2) называется дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными и примет вид:

$$\boxed{u_1(x)g_1(y)dx = u_2(x)g_2(y)dy}$$

Путем деления на произведение  $u_2(x)g_1(y)$  оно приводится к следующему виду:

$$\frac{u_1(x)}{u_2(x)}dx = \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy.$$

Общий интеграл этого уравнения имеет вид:

$$\int \frac{g_2(y)}{g_1(y)} dy = \int \frac{u_1(x)}{u_2(x)} dx + C$$

# **1. Решить дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными:**

**Цель:** Научиться находить общее решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными, используя в своей работе методы дифференциального и интегрального исчисления.

1)  $(1+x)y' + y = 0$

Решение: приведем уравнение к виду (1) (учитывая, что  $y' = \frac{dy}{dx}$ ):

$$(1+x)\frac{dy}{dx} + y = 0$$

$$ydx + (1+x)dy = 0$$

В данном уравнении  $u_1(x)=1$ ,  $g_1(y)=y$ ,  $u_2(x)=1+x$ ,  $g_2(y)=1$

Разделяя переменные, получим:

$$\frac{dx}{1+x} = \frac{dy}{y}.$$

Интегрируя, найдем общий интеграл:

$$\int \frac{dx}{1+x} = \int \frac{dy}{y};$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{d(1+x)}{1+x} + C;$$

$$\ln|y| = \ln|1+x| + \ln C;$$

$$\ln|y| = \ln|C \cdot (1+x)|;$$

$$y = C(1+x) - \text{общее решение диф. уравнения}$$

2)  $* xy' + \frac{1}{y} = 0;$

6)  $y' \operatorname{tg} y - x = 1;$

3)  $* y' = \frac{x+2}{y};$

7)  $y' \sin^2 x = y;$

4)  $* y' = 1-x;$

8)  $y' = \frac{y^2}{x};$

5)  $5yy' = 1-2x;$

## **2. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющего начальным условиям, и его интегральную кривую.**

**Цель:** Научиться находить частное решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными, используя в своей работе методы

дифференциального и интегрального исчисления и строить интегральную кривую этого решения.

.

1)  $y' = x + 2$ ;  $y(0) = 1$ .

Решение: Приведем уравнение к виду (1) и разделим переменные:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= x + 2 \\ dy &= (x + 2)dx.\end{aligned}$$

Интегрируя, найдем общий интеграл:

$$\begin{aligned}\int dy &= \int (x + 2)dx; \\ \int dy &= \int xdx + \int 2dx; \\ y &= \frac{x^2}{2} + 2x + C - \text{общее решение диф. уравнения.}\end{aligned}$$

Т.к.  $y(0) = 1$ , то подставляя это начальное условие в общее решение диф. уравнения, найдем значение  $C$ :

$$y(0) = \frac{0^2}{2} + 2 \cdot 0 + C = 1 \Rightarrow C = 1.$$

Значит частное решение данного диф. уравнения имеет вид:

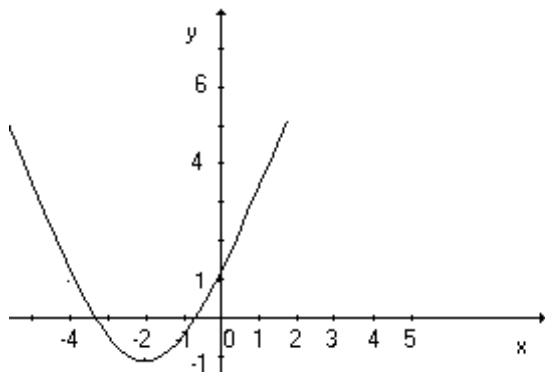
$$y = \frac{x^2}{2} + 2x + 1.$$

Чтобы найти интегральную кривую данного диф. уравнения нужно построить график его частного решения, в нашем случае это  $y = \frac{x^2}{2} + 2x + 1$  (график – парабола).

Найдем координаты вершины параболы:

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2 \cdot \frac{1}{2}} = -2, \quad y_0 = \frac{(-2)^2}{2} + 2 \cdot (-2) + 1 = 2 - 4 + 1 = -1.$$

График имеет следующий вид:



- 2) \*  $y' = 2x \{y(2) = 6\}$ ;
- 3) \*  $y' = 2x + 4 \{y(0) = 1\}$ ;
- 4)  $y' = 3x^2 \{y(1) = 2\}$ .

### **Линейные дифференциальные уравнения 1-го порядка.**

Линейным дифференциальным уравнением 1-го порядка называется уравнение

$$\boxed{y' + p(x)y = f(x)} \quad \text{где } p(x), f(x) - \text{известные функции.}$$

Линейное дифференциальное уравнение называется однородным, если  $f(x) = 0$ , в противном случае оно неоднородное.

### **3. Найти общее решение линейного дифференциального уравнения 1-го порядка:**

***Цель:** Научиться находить общее решение линейных дифференциальных уравнений, используя в своей работе методы дифференциального и интегрального исчисления.*

1)  $y' - 2xy = e^{x^2}$

***Решение:** Общее решение неоднородного уравнения можно найти методом вариации постоянной.*

- Рассмотрим однородное уравнение

$y' - 2xy = 0$ , соответствующее данному неоднородному уравнению. Это уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{dy}{dx} = 2xy$$

$$\frac{dy}{y} = 2x dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int 2x dx$$

$$\ln|y| = 2 \frac{x^2}{2} + \ln C$$

$$\ln|y| - \ln C = x^2$$

$$\ln \left| \frac{y}{C} \right| = x^2 \Rightarrow \frac{y}{C} = e^{x^2} \Rightarrow y = Ce^{x^2}.$$

- Общее решение неоднородного уравнения ищем в виде  $y = C(x)e^{x^2}$  (\*), где  $C(x)$  – неизвестная функция от  $x$ . Производная  $y' = C'(x)e^{x^2} + C(x)(e^{x^2})' = C'(x)e^{x^2} + C(x)2xe^{x^2}$ . Подставляя  $y$  и  $y'$  в  $y' - 2xy = e^{x^2}$  найдем  $C(x)$ :

$$C'(x)e^{x^2} + C(x)2xe^{x^2} - 2xC(x)e^{x^2} = e^{x^2}.$$

$$C'(x)e^{x^2} + C(x)(2xe^{x^2} - 2xe^{x^2}) = e^{x^2}.$$

$$C'(x)e^{x^2} = e^{x^2}$$

$$C'(x) = 1 \Rightarrow C(x) = \int C(x)dx = \int 1 \cdot dx = x + C$$

Т.к.  $C(x) = x + C$ , то подставляя его в (\*) общее решение неоднородного уравнения будет  $y = (x + C)e^{x^2}$ , где  $C$  – постоянная интегрирования.

$$2) * y' + 2xy = 2xe^{-x^2};$$

$$4) * y' + \frac{y}{3-x} = (3-x)^2.$$

$$3) y' - 3x^2y = xe^{x^3};$$

#### **4. Определить вид дифференциального уравнения, найти его общее решение, а где указано частное решение.**

**Цель:** Научиться определять вид дифференциального уравнения, находить его общее и частное решение.

$$1) * y' + 2y = e^{-x};$$

$$2) * xy' = 1 - x^2;$$

$$3) * x + xy = y' \quad \{y(1) = 0\};$$

$$4) xy' + 4 = y^2;$$

$$5) y' - 2y = 4x;$$

$$6) y' + y \cos x = \cos x \quad \{y(0) = 1\};$$

$$7) * y' = \frac{y}{x+2} \quad \{y(0) = 4\}, \text{ построить интегральную кривую};$$

$$8) * (2-3x)y' = y;$$

$$9) e^y(1+x^2)dy - 2x(1+e^y)dx = 0;$$

$$10) * y' - ye^x = 2xe^{e^x};$$

$$11) * y' = 3^{x-y};$$

$$12) * y' - \frac{y}{1+x} = (1+x)^2.$$

### **Дифференциальные уравнения в медицине и биологии.**

- 1) Дифференциальные уравнения, выражают соотношения между изменениями основных переменных. Примером описания течения процессов в сердечно –

сосудистой системе может служить независимая модель эластичного резервуара – линейное дифференциальное уравнение типа:

$$\boxed{\frac{1}{k} \cdot \frac{dP}{dt} = \frac{P}{R} + W(t)}$$
,

где переменная **P** – мгновенное значение АД, коэффициент **R** – общее сопротивление кровеносного русла току крови, коэффициент **k** – коэффициент упругости аорты, **W(t)** – объемная мгновенная скорость выброса крови из сердца.

2) Дифференциальным уравнением описывается разложение бактерий, радиоактивный распад.



### Домашнее задание:

Определить вид дифференциального уравнения, найти его общее решение, а где указано частное решение:

1)  $(1 + y^2)dx + xydy = 0;$

2)  $* y' + y = e^{-x} \cos x;$

3)  $* xy' + y - e^x = 0 \quad \{y(a) = b\};$

4)  $* y' = 10^{x+y};$

5)  $* y' = \frac{y+1}{x} \quad \{y(1) = 1\},$  построить интегральную кривую.

6)  $y' = e^{2x-e^x} - e^x y;$

7)  $* x(y' - y) = (1 + x^2)e^x;$

8)  $y' + y \cos x = \sin x \cos x.$

9)  $* yy' = \frac{1-2x}{y};$

## Проверочная работа

### Тема: Дифференциальные уравнения.

#### 1 вариант.

Определить вид дифференциального уравнения, найти его общее решение, а где указано частное решение:

6)  $y' = x - 2$ ;

7)  $(3x - 4)y' = y$ ;

8)  $y' = \frac{1 - 2x}{y}$ ;

9)  $y' - 2xy = xe^{x^2}$ ;

10)  $y' = \frac{y}{x}$   $\{y(1) = 2\}$ , построить интегральную кривую.

#### 2 вариант.

Определить вид дифференциального уравнения, найти его общее решение, а где указано частное решение:

6)  $y' - 4y = 8xe^{4x}$ ;

7)  $y' = 2x - 3$ ;

8)  $y' = \frac{y}{5x - 2}$ ;

9)  $yy' = 8x - 3$ ;

10)  $y' = \frac{y+1}{x}$   $\{y(1) = 0\}$ , построить интегральную кривую.

#### Дополнительное задание

Определить вид дифференциального уравнения, найти его общее решение:

1)  $2x\sqrt{1 - y^2} = y'(1 + x^2)$ ;

2)  $y' + xe^x y = e^{(1-x)e^x}$ ;

1)  $e^{-y}(1 + y') = 1$

2)  $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$ ;



## Лекция № 7. Комплексные числа.

Знакомство с курсом мы начнем с некоторых исторических событий, которые послужили причиной появления нового, пока неизвестного для Вас класса чисел - комплексных.

В X веке в Италии были распространены математические турниры, на которых участники в присутствии публики излагали решения задач, предложенных ранее каждому его противником. Как известно, в то время это был не единственный из видов турниров - в те времена сохранялись еще военные турниры, на одном из таких турниров в 1547 году был смертельно ранен французский король Генрих Валуа. Итак, 12 февраля 1535 года в Италии состоялось математическое соревнование между математиками Фиоре и Тартальей. Фиоре был учеником профессора болонского университета, Сципиона дель Ферро (1456 - 1526), Никколо Тарталья (1500 - 1557) - преподаватель математики. Тарталья (заика) - его прозвище (настоящая фамилия - Фонтана), которое он получил из-за того, что после военного ранения в горло он не мог свободно разговаривать. Тарталье было предложено решить около 30 алгебраических уравнений третьей степени вида  $x^3+ax=b$ ;  $a>0$ ;  $b>0$ . В те времена не были известны общие формулы решения уравнений третьей степени, поэтому задачи, предложенные Тарталье, оказались весьма серьезными. Однако, как узнал Тарталья, профессор дель Ферро *умел* решать некоторые уравнения указанного вида. А поскольку эти решения были средством конкурентной борьбы, профессор не стал публиковать полученные результаты, но сообщил их своим ученикам, в числе которых находился Фиоре. За неделю до соревнований Тарталье удалось найти общий вид решения этих уравнений и с блеском победить на турнире. Так что же предложил Тарталья? Если допустить (предположить), что существует некоторая мнимая единица (обозначим ее  $i$ ), квадрат которой равен минус 1, т.е.  $i^2$ , то можно говорить о числе решений уравнения  $x^2 + 1 = 0$ , их будет два  $\pm i$ . Таким образом, класс действительных чисел был расширен введением в него одного элемента - мнимой единицы, в результате чего получили новый класс чисел - комплексных, которые обозначают латинской буквой  $C$ . Сегодня, когда во многих разделах математики и ее приложений невозможно ограничиться рассмотрением лишь действительных чисел, комплексные числа позволяют решать многие серьезные задачи.

Одному из создателей дифференциального и интегрального исчисления, немецкому математику Г. Лейбницу (1546 - 1715) принадлежат такие слова: «Комплексное число - это тонкое и поразительное средство божественного духа, почти амфибия между бытием и небытием». Сейчас от всей этой мистики не осталась ничего, кроме, пожалуй, названия

«мнимые числа». Уже во времена К. Гаусса (1777 - 1855) было дано геометрическое истолкование комплексных чисел как точек плоскости. Труды выдающихся математиков XIX века О. Коши, В. Римана, К. Вейерштрасса на базе комплексных чисел было построена одна из самых красивых математических дисциплин - теория функций комплексной переменной.

Рассмотрим основные определения этого класса чисел и выясним, как выполняются действия над комплексными числами.

**Определение.** Комплексным числом называется выражение  $z = a + ib$ , где  $a$  и  $b$  – действительные числа,  $i$  – мнимая единица, которая определяется соотношением:

$$i^2 = -1; \quad i = \sqrt{-1}.$$

При этом число  $a$  называется **действительной частью** числа  $z$  ( $a = \operatorname{Re} z$ ), а  $b$  – **мнимой частью** ( $b = \operatorname{Im} z$ ).

Если  $a = \operatorname{Re} z = 0$ , то число  $z$  будет чисто мнимым, если  $b = \operatorname{Im} z = 0$ , то число  $z$  будет действительным.

**Определение.** Числа  $z = a + ib$  и  $\bar{z} = a - ib$  называются **комплексно сопряженными**.

**Определение.** Два комплексных числа  $z_1 = a_1 + ib_1$  и  $z_2 = a_2 + ib_2$  называются равными, если соответственно равны их действительные и мнимые части:

$$a_1 = a_2; \quad b_1 = b_2;$$

**Определение.** Комплексное число равно нулю, если соответственно равны нулю действительная и мнимая части.

$$a = b = 0.$$

### 7.1. Действия над комплексными числами в алгебраической форме.

Основные действия с комплексными числами вытекают из действий с многочленами.

#### Сложение и вычитание

Рассмотрим два комплексных числа, заданных в общем виде

$$z_1 = a_1 + ib_1; \quad z_2 = a_2 + ib_2$$

тогда

$$z = z_1 \pm z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = (a_1 \pm a_2) + i(b_1 \pm b_2) = a \pm ib$$

Можно сформулировать правило сложения и вычитания комплексных чисел: при сложении (вычитании) комплексных чисел соответственно складываются (вычитаются) их действительные и мнимые части.

### Умножение

$$z = z_1 z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1 a_2 + ia_1 b_2 + ib_1 a_2 + i^2 b_1 b_2 = a + ib$$

$$z = z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + b_1 a_2)$$

(т.е. можно говорить, что перемножаются комплексные числа как многочлены, учитывая, что  $i^2 = -1$ ). Значит, чтобы перемножить два комплексных числа необходимо перемножить их как многочлены, учитывая, что  $i^2 = -1$ .

### Деление

При выполнении деления комплексных чисел пользуются искусственным приёмом: числитель и знаменатель дроби умножают на число, комплексно - сопряженное знаменателю дроби, и поступают далее так, как и при умножении комплексных чисел.

### Пример.

$$z_1 = 5 - i;$$

$$z_2 = -2 + 3i;$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{5 - i}{-2 + 3i} = \frac{(5 - i) * (-2 - 3i)}{(-2 + 3i) * (-2 - 3i)} = \frac{-10 + 2i - 15i + 3i^2}{4 - 9i^2} = \frac{-13 - 13i}{13} = -1 - i$$

Введенные нами операции сложения и умножения комплексных чисел обладают свойствами:

1) Переместительное свойство:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1;$$

$$z_1 * z_2 = z_2 * z_1;$$

2) Сочетательное свойство:

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$$

$$(z_1 * z_2) * z_3 = z_1 * (z_2 * z_3)$$

3) Распределительное свойство:

$$z_1 * (z_2 + z_3) = z_1 * z_2 + z_1 * z_3$$

4) Для любого комплексного числа существует число ему противоположное, такое, что  $z + (-z) = 0$ .

### Возведение в степень

Согласно определению степени числа, необходимо это число умножить на себя столько раз, каков показатель степени числа. Эти правила вам известны из курса средней школы. Они же остаются справедливыми и для комплексных чисел. С одной лишь разницей в том, что основанием степени здесь выступает не одночлен, а двучлен. Для показателей степени 2 и 3 существуют формулы, известные вам как формулы сокращённого умножения: квадрат суммы (разности); куб суммы (разности); разность

(сумма) кубов. Убедимся, как можно возводить комплексное число в степень, пользуясь формулами сокращенного умножения.

Найти куб разности комплексного числа:

$$(3-2i)^3 = 3^3 - 3 \cdot 3^2 \cdot 2i + 3 \cdot 3 \cdot (2i)^2 - i^3 = 27 - 54i + 36i^2 - i^3 = -9 - 54i + i = -9 - 54i + i = -9 - 53i$$

При выполнении этого действия мы учли, что

$$i^2 = -1;$$

$$i^3 = i \cdot i^2 = i \cdot (-1) = -i$$

Если же нам необходимо, например, найти  $(2+5i)^{21}$ , то согласно определению степени мы должны эту скобку умножить саму на себя 21 раз, что очень трудоёмко. Поэтому прибегают к другой форме записи числа – тригонометрической и в ней выполняют это действие. Но об этом мы поговорим немного позже.

### Извлечение корня из комплексного числа

Т. к. комплексное число в алгебраической форме имеет вид  $z=a+ib$ ; то извлекать из него корень какой-либо степени мы не можем, т.к. нельзя извлечь корень из суммы.

Таким образом, подводя итог действиям над комплексными числами в алгебраической форме, заключаем, что извлекать корень *любой* степени из комплексных чисел в алгебраической форме нельзя; возводить в любую степень можно, но если показатель степени больше 3, то рациональнее перевести число в тригонометрическую форму и возводить в степень число в этой форме. Все остальные действия выполняются по ранее отмеченным правилам.

Беседуя о комплексных числах, необходимо отметить такое важное понятие, как цикличность мнимой единицы. Заключается оно в следующем:

$$i^2 = -1 \text{ (определение);}$$

$$i^3 = i \cdot i^2 = i \cdot (-1) = -i;$$

$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1;$$

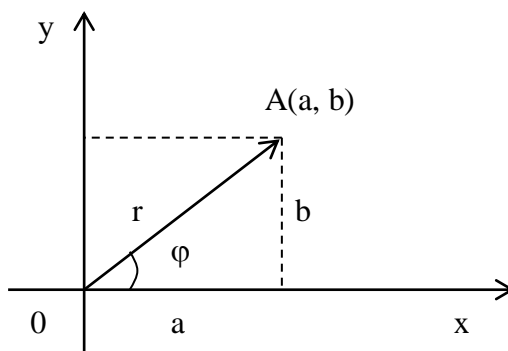
$$i^5 = i \cdot i^4 = i \cdot 1 = i.$$

## 7.2. Геометрическое изображение комплексных чисел.

Понятие комплексного числа имеет геометрическое истолкование. Множество комплексных чисел является расширением множества действительных чисел за счет включения множества мнимых чисел. Комплексные числа включают в себя все множества чисел, которые изучались ранее. Так натуральные, целые, рациональные, иррациональные, действительные числа являются, вообще говоря, частными случаями комплексных чисел.

Если любое действительное число может быть геометрически представлено в виде точки на числовой прямой, то комплексное число представляется точкой на плоскости, координатами

которой будут соответственно действительная и мнимая части комплексного числа. При этом горизонтальная ось будет являться действительной числовой осью, а вертикальная - мнимой осью.



Таким образом, на оси OX располагаются действительные числа, а на оси OY – чисто мнимые.

С помощью подобного геометрического представления можно представлять числа в так называемой тригонометрической форме.

### 7.3. Тригонометрическая форма числа.

Из геометрических соображений видно, что  $a = r \cos \varphi$ ;  $b = r \sin \varphi$ . Тогда комплексное число можно представить в виде:

$$z = a + ib = r \cos \varphi + ir \sin \varphi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

Такая форма записи называется **тригонометрической формой записи комплексного числа**.

При этом величина  $r$  называется **модулем** комплексного числа, а угол наклона  $\varphi$  - **аргументом** комплексного числа.

$$r = |z|; \quad \varphi = \operatorname{Arg} z.$$

Из геометрических соображений видно:

$$r = |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}; \quad \varphi = \operatorname{Arg} z = \operatorname{arctg} \frac{b}{a};$$

Очевидно, что комплексно – сопряженные числа имеют одинаковые модули и противоположные аргументы.

$$|z| = |\bar{z}|; \quad \operatorname{Arg} z = -\operatorname{Arg} \bar{z}.$$

### 7.4. Действия с комплексными числами в тригонометрической форме.



$$z_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), \quad z_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2).$$

### Умножение

$$z = z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

В случае комплексно – сопряженных чисел:

$$z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 = |z|^2 = |\bar{z}|^2.$$

### Деление

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

### Возведение в степень

Из операции умножения комплексных чисел следует, что

$$z^2 = zz = r^2 (\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi)$$

В общем случае получим:

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi),$$

где  $n$  – целое положительное число.

Это выражение называется **формулой Муавра**. (Абрахам де Муавр (1667 – 1754) – английский математик).

Формулу Муавра можно использовать для нахождения тригонометрических функций двойного, тройного и т.д. углов.

**Пример.** Найти формулы  $\sin 2\varphi$  и  $\cos 2\varphi$ .

Рассмотрим некоторое комплексное число  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ .

Тогда с одной стороны  $z^2 = r^2 (\cos^2 \varphi + 2i \cos \varphi \sin \varphi - \sin^2 \varphi)$ .

По формуле Муавра:  $z^2 = r^2 (\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi)$ .

Приравнявая, получим  $\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi + 2i \cos \varphi \sin \varphi$ .

Т.к. два комплексных числа равны, если равны их действительные и мнимые части, то

$$\cos 2\varphi = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi$$

$$\sin 2\varphi = 2 \sin \varphi \cos \varphi$$

Получили известные формулы двойного угла.

### Извлечение корня из комплексного числа

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} (\cos \varphi + i \sin \varphi) = \rho (\cos \psi + i \sin \psi)$$

Возводя в степень, получим:

$$\rho^n (\cos n\psi + i \sin n\psi) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

Отсюда:  $\rho = \sqrt[n]{r}$ ;  $n\psi = \varphi + 2\pi k$ ;  $k \in Z$ .

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right)$$

Таким образом, корень  $n$ -ой степени из комплексного числа имеет  $n$  различных значений.

#### 7.5. Показательная форма комплексного числа.

Рассмотрим показательную функцию  $w = e^z$ ;  $z = x + iy$ .

Можно показать, что функция  $w$  может быть записана в виде:

$$w = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

Данное равенство называется **уравнением Эйлера**.

Для комплексных чисел будут справедливы следующие свойства:

- 1)  $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$ ;
- 2)  $e^{z_1-z_2} = \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}}$ ;
- 3)  $(e^z)^m = e^{mz}$ ; где  $m$  – целое число.

Если в уравнении Эйлера показатель степени принять за чисто мнимое число ( $x=0$ ), то получаем:

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y$$

Для комплексно – сопряженного числа получаем:

$$e^{-iy} = \cos y - i \sin y$$

Из этих двух уравнений получаем:

$$\begin{cases} \cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} \\ \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} \end{cases}$$

Этими формулами пользуются для нахождения значений степеней тригонометрических функций через функции кратных углов.

Если представить комплексное число в тригонометрической форме:

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

и воспользуемся формулой Эйлера:  $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$

$$z = re^{i\varphi}$$

Полученное равенство и есть **показательная форма комплексного числа**.

Рассмотрим несколько примеров действий с комплексными числами.

**Пример.** Даны два комплексных числа  $z_1 = 1 - \frac{7}{2}i$ ;  $z_2 = -7 - 2i$ . Требуется а) найти

значение выражения  $\left( \frac{1 - \frac{7}{2}i}{-7 - 2i} \right)^{-4}$  в алгебраической форме, б) для числа  $z = 2 - 2\sqrt{3}i$  найти

тригонометрическую форму, найти  $z^{20}$ , найти корни уравнения  $w^3 + z = 0$ .

а) Очевидно, справедливо следующее преобразование:

$$\left( \frac{1 - \frac{7}{2}i}{-7 - 2i} \right)^{-4} = \left( \frac{2 - 7i}{-14 - 4i} \right)^{-4} = \left( \frac{-14 - 4i}{2 - 7i} \right)^4 = 16 \left( \frac{-7 - 2i}{2 - 7i} \right)^4$$

Далее производим деление двух комплексных чисел:

$$\frac{-7 - 2i}{2 - 7i} = \frac{(-7 - 2i)(2 + 7i)}{(2 - 7i)(2 + 7i)} = \frac{-14 - 49i - 4i + 14}{4 + 49} = \frac{-53i}{53} = -i.$$

Получаем значение заданного выражения:  $16(-i)^4 = 16i^4 = 16$ .

б) Число  $z = 2 - 2\sqrt{3}i$  представим в виде  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ , где

$$r = |z| = \sqrt{4 + 12} = 4; \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{b}{a} = \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = -60^\circ$$

Тогда  $z = 4(\cos 60^\circ - i \sin 60^\circ)$ .

Для нахождения  $z^{20}$  воспользуемся формулой Муавра.

$$\begin{aligned} z^{20} &= 4^{20}(\cos 1200^\circ - i \sin 1200^\circ) = 4^{20}(\cos(3 \cdot 2\pi + 120^\circ) - i \sin(3 \cdot 2\pi + 120^\circ)) = \\ &= 4^{20}(\cos 120^\circ - i \sin 120^\circ) = -4^{20} \left( \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right). \end{aligned}$$

Если  $w^3 + z = 0$ , то  $w = \sqrt[3]{z}$

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{r} \left( \cos \frac{\varphi + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{3} \right) = \sqrt[3]{4} \left( \cos \frac{-60^\circ + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{-60^\circ + 2\pi k}{3} \right); \quad k \in \mathbb{Z}.$$

## ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Дайте определение комплексного числа.
2. Какие числа комплексно-сопряженными?
3. Какие комплексные числа называются равными?
4. Как геометрически изображаются комплексные числа?
5. Какие действия над комплексными числами выполняются в алгебраической форме?
6. Дайте определение тригонометрической формы комплексного числа.
7. Какие действия над комплексными числами выполняются в тригонометрической форме?
8. Как осуществляется переход от записи комплексного числа, заданного в алгебраической форме, к его тригонометрической форме?
9. Как записать комплексное число в показательной форме?
10. Что называется тождеством Эйлера?

## УПРАЖНЕНИЯ

1. Построить на комплексной плоскости векторы, соответствующие комплексным числам:
  - 1.1.  $z = 3 + 4i$ ;
  - 1.2.  $z = 3$ ;
  - 1.3.  $z = -3$ ;
  - 1.4.  $z = -4i$ ;
  - 1.5.  $z = 4i$ ;
  - 1.6.  $z = -3 - 4i$ ;
  - 1.7.  $z = 3 - 4i$ ;
  - 1.8.  $z = -3 + 4i$ .
2. Найти действительные числа  $x$  и  $y$  из условия равенства двух комплексных чисел:
  - 2.1.  $-2 + 5i - 3iy = 9i + 2x - 4y$ ;
  - 2.2.  $9 + 2ix + 4iy = 10i + 5x - 6y$ ;
  - 2.3.  $17 + 2ix + 3iy = 18i + 3x + 2y$ ;
  - 2.4.  $5x - 2y + ix + iy = 4 + 5i$ .
3. Найти модуль, главное значение аргумента и все значения аргумента комплексных чисел:
  - 3.1.  $z = 3 + 4i$ ;
  - 3.2.  $z = 3$ ;
  - 3.3.  $z = -3$ ;
  - 3.4.  $z = -4i$ ;
  - 3.5.  $z = 4i$ ;
  - 3.6.  $z = -3 - 4i$ ;
  - 3.7.  $z = 3 - 4i$ ;
  - 3.8.  $z = -3 + 4i$ .
4. Для заданных чисел назовите числа, сопряжённые и противоположные данным:
  - 4.1.  $z = -2 + 5i$ ;
  - 4.2.  $z = -2$ ;
  - 4.3.  $z = 8$ ;
  - 4.4.  $z = -8i$ .
5. Дана точка, изображающая число  $3 - 2i$ . Какие числа изображают точки, симметричные данной относительно действительной оси? мнимой оси; начала координат?
6. Чему равен аргумент: 1) чисто мнимого числа; 2) любого отрицательного числа; 3) любого положительного числа; 4) нуля?
7. Вычислить:
  - 7.1.  $i^{16}$ ;
  - 7.2.  $i^{25}$ ;
  - 7.3.  $(-i)^8$
  - 7.4.  $(-i)^7$
8. Выполнить действия:
  - 8.1.  $(-2 + 5i) + (-2 - 5i)$ ;
  - 8.2.  $(6 + 8i) - (3 - 5i)$ ;
  - 8.3.  $-2i \cdot 5i$ ;
  - 8.4.  $(-2 + 5i)(-2 - 5i)$ ;
  - 8.5.  $(6 + 8i)(3 - 5i)$ ;
  - 8.6.  $\frac{3}{2i}$ ;
  - 8.7.  $\frac{4+i}{4-i}$ ;
  - 8.8.  $\frac{2+3i}{4-5i}$ .
9. Представить в тригонометрической форме числа:
  - 9.1.  $2$ ;
  - 9.2.  $6i$ ;
  - 9.3.  $-2 + 2\sqrt{3}i$ ;
  - 9.4.  $2 - 2i$ .

10. Представить в алгебраической форме числа:

10.1.  $2(\cos(2\pi) + i \cdot \sin(2\pi));$

10.2.  $2(\cos(0) + i \cdot \sin(0));$

10.3.  $5(\cos(\frac{\pi}{2}) + i \cdot \sin(\frac{\pi}{2}));$

10.4.  $4(\cos(-\frac{\pi}{3}) + i \cdot \sin(-\frac{\pi}{3})).$

11. Выполните действия:

11.1.  $2(\cos(\frac{3\pi}{4}) + i \cdot \sin(\frac{3\pi}{4})) \cdot 3(\cos(\frac{\pi}{12}) + i \cdot \sin(\frac{\pi}{12}));$

11.2.  $3(\cos(\frac{\pi}{8}) + i \cdot \sin(\frac{\pi}{8})) \cdot (\cos(\frac{\pi}{24}) + i \cdot \sin(\frac{\pi}{24}));$

11.3.  $\frac{2(\cos(\frac{3\pi}{4}) + i \cdot \sin(\frac{3\pi}{4}))}{6(\cos(\frac{\pi}{4}) + i \cdot \sin(\frac{\pi}{4}))};$

11.4.  $\frac{9(\cos(-\frac{\pi}{3}) + i \cdot \sin(-\frac{\pi}{3}))}{2(\cos(-\frac{\pi}{6}) + i \cdot \sin(-\frac{\pi}{6}))};$

11.5.  $(\cos(2\pi) + i \cdot \sin(2\pi))^3;$

11.6.  $(\cos(\frac{3\pi}{4}) + i \cdot \sin(\frac{3\pi}{4}))^4;$

11.7.  $(2 - 2i)^5;$

11.8.  $(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)^{10};$

11.9.  $\sqrt[3]{-1};$

11.10.  $\sqrt[6]{1};$

11.11.  $\sqrt[3]{i};$

11.12.  $\sqrt[4]{-2 + 2i}.$

12. Представив числа  $z_1 = 2i$  и  $z_2 = -3 + 4i$  в показательной форме, вычислите:

12.1.  $z_1 z_2;$

12.2.  $\frac{z_1}{z_2};$

12.3.  $\sqrt[3]{z_1};$

12.4.  $\sqrt[3]{z_2};$

12.5.  $(z_1)^4;$

12.6.  $(z_2)^4.$

13. Решите уравнения:

13.1.  $x^2 + 16 = 0;$

13.2.  $x^3 - 8 = 0;$

13.3.  $x^5 + 32 = 0;$

13.4.  $x^2 + x + 1 = 0;$

13.5.  $x^4 + x^2 + 1 = 0;$

13.6.  $x^6 - 28x^3 + 27 = 0.$

14. Изобразить на комплексной плоскости множества точек, удовлетворяющих следующим условиям:

14.1.  $|z| = 2$ ;

14.2.  $\arg z = \frac{\pi}{3}$ ;

14.3.  $0 \leq \operatorname{Im} z < 1,5$ ;

14.4.  $\operatorname{Re} z > 1$ ;

14.5.  $\begin{cases} |z|, \\ \frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{3\pi}{4} \end{cases}$

### КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

#### Вариант 1

1. Вычислите  $i^{160} + i^{183}$ .
2. Для числа  $z = \frac{8+2i}{5-3i}$ :
  - a. постройте точки на координатной плоскости  $z, -z, \bar{z}$ ;
  - b. найдите  $\operatorname{Re} z; \operatorname{Im} z$ ;
  - c. найдите модуль и аргумент числа  $z$ ;
  - d. запишите число в тригонометрической и показательной формах.
3. Выполните действия:  $\frac{5+2i}{2-5i} - \frac{3-4i}{4+3i}$ .
4. Для числа  $z = -1 + \sqrt{3}i$  найдите  $z^9$  в тригонометрической и показательной формах.
5. Решить уравнение на множестве комплексных чисел:  $z^3 - 27 = 0$ .
6. Найдите действительные числа  $x$  и  $y$  так, чтобы выполнялось равенство:  $3x - 2y + ix - iy = 4 + 5i$ .
7. Изобразить на координатной плоскости множество всех точек  $z$ , удовлетворяющих условию:  $|z| = 9, \operatorname{Im} z \geq 2$ .

#### Вариант 2

1. Вычислите  $i^{261} + i^{18}$ .
2. Для числа  $z = \frac{5+i}{2+3i}$ :
  - a. постройте точки на координатной плоскости  $z, -z, \bar{z}$ ;
  - b. найдите  $\operatorname{Re} z; \operatorname{Im} z$ ;
  - c. найдите модуль и аргумент числа  $z$ ;
  - d. запишите число в тригонометрической и показательной формах.
3. Выполните действия:  $\frac{4+3i}{3-4i} - \frac{5-4i}{4+5i}$ .

4. Для числа  $z = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$  найдите  $z^9$  в тригонометрической и показательной формах.
5. Решить уравнение на множестве комплексных чисел:  $z^3 - 1 = 0$ .
6. Найдите действительные числа  $x$  и  $y$  так, чтобы выполнялось равенство:  $3x - 2y + ix + iy = 4 - 5i$ .
7. Изобразить на координатной плоскости множество всех точек  $z$ , удовлетворяющих условию:  $|z| = 16$ ;  $\operatorname{Re} z \geq 2$ .

### Вариант 3

1. Вычислите  $i^{35} + i^{36}$ .
2. Для числа  $z = (3 - 4i) + (-2 + 5i)$ :
  - a. постройте точки на координатной плоскости  $z, -z, \bar{z}$ ;
  - b. найдите  $\operatorname{Re} z$ ;  $\operatorname{Im} z$ ;
  - c. найдите модуль и аргумент числа  $z$ ;
  - d. запишите число в тригонометрической и показательной формах.
3. Выполните действия:  $(3 - 4i) \cdot (3 + 4i)$ .
4. Для числа  $z = -1$  найдите  $z^3$  в тригонометрической и показательной формах.
5. Решить уравнение на множестве комплексных чисел:  $z^2 - 4 = 0$ .
6. Найдите действительные числа  $x$  и  $y$  так, чтобы выполнялось равенство:  $(x + y) + (x - y)i = 1 + i$
7. Изобразить на координатной плоскости множество всех точек  $z$ , удовлетворяющих условию:  $|z| = 1$ .

### Вариант 4

1. Вычислите  $i^{15} + i^{16}$ .
2. Для числа  $z = (3 - 4i) - (2 - 5i)$ :
  - a. постройте точки на координатной плоскости  $z, -z, \bar{z}$ ;
  - b. найдите  $\operatorname{Re} z$ ;  $\operatorname{Im} z$ ;
  - c. найдите модуль и аргумент числа  $z$ ;
  - d. запишите число в тригонометрической и показательной формах.
3. Выполните действия:  $(2 - 4i) \cdot (2 + 4i)$ .
4. Для числа  $z = 1$  найдите  $z^3$  в тригонометрической и показательной формах.
5. Решить уравнение на множестве комплексных чисел:  $z^2 - 1 = 0$ .



6. Найдите действительные числа  $x$  и  $y$  так, чтобы выполнялось равенство:

$$(x + 2y) + (x - 2y)i = 3 - i.$$

7. Изобразить на координатной плоскости множество всех точек  $z$ , удовлетворяющих условию:  $|z| = 36$ .

Задания для самостоятельного решения.

**Найти общее решение дифференциальных уравнений, а где указано частное решение:**

1.  $\frac{yy'}{x} + e^y = 0, \quad y(1) = 0;$
2.  $(1 + e^{2x})y^2 dy = e^x dx, \quad y(0) = 0;$
3.  $\frac{y}{y'} = \ln y, \quad y(2) = 1;$
4.  $x\sqrt{1+y^2} dx + y\sqrt{1+x^2} dy = 0;$
5.  $\frac{x dy}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{y dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0;$
6.  $y' = e^{x+y} + e^{x-y}, \quad y(0) = 0;$
7.  $\frac{dx}{x(y-1)} + \frac{dy}{y(x+2)} = 0, \quad y(1) = 1;$
8.  $y' \cos^2 x + y = \operatorname{tg} x, \quad y(0) = 0;$
9.  $y' + \frac{xy}{1-x^2} = \arcsin x + x;$
10.  $xy' - y = x^2 \cos x;$
11.  $y' \cos x + y = 1 - \sin x;$
12.  $(1+x^2)y' + y = \operatorname{arctg} x.$

Контрольные вопросы:

1. Что называется дифференциальным уравнением первого порядка?
2. Что нужно сделать, чтобы решить дифференциальное уравнение.

3. Какой вид имеет дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными.
4. Какое уравнение называется дифференциальным уравнением 1-го порядка?
5. Что такое общее и частное решение дифференциального уравнения.

Лекция 1. Числовой ряд. Основные понятия, свойства сходящихся рядов. Знакоположительные ряды. Интегральный признак Коши

### 1.1. Некоторые сведения о последовательностях

Пусть каждому значению  $n \in \mathbb{N}$  поставлено в соответствие (по определённым правилам) определённое действительное число  $a \in \mathbb{R}$ ; тогда множество упорядоченных действительных чисел  $a_1, a_2, a_3, \dots$  называется числовой последовательностью и обозначается  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ , где  $a_n$  – общий член последовательности. Например, последовательность  $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \dots$  имеет общий член  $a_n = \frac{1}{n}$ , где  $n \in \mathbb{N}$ .

**Определение 1.** Последовательность  $\{a_n\}$  называется *убывающей*, если  $a_n > a_{n+1}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , и *возрастающей*, если  $a_n < a_{n+1}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

**Определение 2.** Последовательность  $\{a_n\}$  называется *ограниченной сверху*, если существует такое число  $M$ ,  $M \in \mathbb{R}$ , что  $a_n < M$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , и *ограниченной снизу*, если существует такое число  $M$ ,  $M \in \mathbb{R}$ , что  $a_n \geq M$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

**Определение 3.** Последовательность  $\{a_n\}$  называется *ограниченной*, если она ограничена как снизу, так и сверху, т.е. существует такое число  $M > 0$  ( $M \in \mathbb{R}$ ), что  $\forall n: |a_n| \leq M$ .

**Определение 4.** Число  $a$  называется *пределом* последовательности  $\{a_n\}$ , если для любого сколь угодно малого положительного числа  $\varepsilon$  найдётся такой номер  $n_0 \in \mathbb{N}$ , зависящий от  $\varepsilon$ , что для всех натуральных чисел  $n \geq n_0$  выполняется неравенство  $|a_n - a| < \varepsilon$ . Тогда  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  означает,

что  $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  такое, что для всех  $n \geq n_0, n \in \mathbb{N}$ :  $|a_n - a| < \varepsilon$ . При

этом говорят, что последовательность  $\{a_n\}$  сходится к числу  $a$ .

Приведём некоторые свойства сходящихся последовательностей.

–Если последовательность имеет предел, то он единственен.

–Если последовательность имеет конечный предел, то эта последовательность ограничена.

–Если последовательность возрастает (убывает) и ограничена сверху (снизу), то она имеет конечный предел.

–Если последовательность возрастает (убывает) и не ограничена сверху (снизу), то она имеет бесконечный предел  $+\infty$  ( $-\infty$ ).

## 1.2. Числовой ряд. Основные понятия теории числовых рядов: сходимость, расходимость, сумма ряда. Примеры

Пусть задана бесконечная последовательность чисел  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, a_n \in \mathbb{R}$ .

**Определение 5.** Бесконечным числовым рядом называется выражение вида

$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$ , обозначаемое как  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ . Числа  $a_1, a_2, a_3, \dots$

называются *членами (элементами) числового ряда*.

**Определение 6.** Сумма первых  $n$  членов ряда называется  *$n$ -й частичной суммой* ряда:  $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ . Тогда  $S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \dots$  и т.д.

Получаем последовательность частичных сумм  $S_1, S_2, S_3, \dots: \{S_n\}$ .

Таким образом, каждому числовому ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  можно поставить в

соответствие последовательность частичных сумм  $\{S_n\}$ :  $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ .

**Определение 7.** Если существует конечный или бесконечный предел  $S$

последовательности частичных сумм  $\{S_n\}$ , то он называется *суммой ряда*  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ,

т.е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .

Если  $S$  конечно ( $S < \infty$ ), то ряд называется *сходящимся*; если  $S = \infty$  или  $S$  не существует, то ряд называется *расходящимся* и суммы рядне имеет.

Итак, если дан ряд, то всегда можно поставить вопрос, сходится ли он (иными словами, существует ли конечный предел  $\{S_n\}$ ) или расходится?

Приведём примеры исследования ряда на сходимость и нахождения его суммы.

**Пример 1.** Исследовать на сходимость ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \dots$  и найти его сумму.

**Решение.** Обозначим  $\frac{1}{n(n+1)} = a_n$  – общий член ряда. Тогда частичная сумма

ряда  $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$ . Так как  $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ , то

$S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$ . Тогда

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 < \infty$ , т.е. ряд сходится и его сумма  $S = 1$ .

**Пример 2.** Исследовать на сходимость ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{4n^2 + 4n - 3} = \frac{4}{5} + \frac{4}{21} + \frac{4}{45} + \dots$  и найти его сумму.

*Решение.* Обозначим  $\frac{4}{4n^2 + 4n - 3} = a_n$  – общий член ряда. Тогда,

частичная сумма ряда  $S_n = \frac{4}{5} + \frac{4}{21} + \dots + \frac{4}{4n^2 + 4n - 3}$ . Так как

$$\frac{4}{4n^2 + 4n - 3} = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+3}, \quad \text{то}$$

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9}\right) \dots + \left(\frac{1}{2n-3} - \frac{1}{2n+1}\right) + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+3}\right) =$$

$$= 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} = \frac{4}{3} - \frac{4n+4}{(2n+1)(2n+3)}, \quad \text{тогда}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{4}{3} - \frac{4n+4}{(2n+1)(2n+3)} \right) = \frac{4}{3}, \quad \text{т.е. ряд сходится и его сумма } S = \frac{4}{3}.$$

**Пример 3.** Исследовать на сходимость ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + \dots + n + \dots$ .

*Решение.* Обозначим общий член ряда  $n = a_n$ . Тогда, частичная сумма ряда

$$S_n = 1 + 2 + \dots + n = \frac{(n+1)n}{2}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)n}{2} = +\infty, \quad \text{т.е. сумма ряда}$$

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} n = +\infty \quad \text{и ряд расходится.}$$

**Пример 4.** Исследовать на сходимость ряд, составленный из членов геометрической прогрессии.

*Решение.* Пусть дана геометрическая прогрессия  $b, bq, bq^2, bq^3, \dots, bq^{n-1}, \dots$ , где  $q$  –

знаменатель прогрессии. Ряд  $b + bq + bq^2 + bq^3 + \dots + bq^{n-1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} bq^{n-1}$

называется *рядом геометрической прогрессии*. Обозначим  $bq^{n-1} = a_n$  – общий член ряда. При  $q \neq 1$   $n$ -частичная сумма этого ряда равна

$$S_n = \frac{b(1-q^n)}{1-q} = \frac{b}{1-q} - \frac{bq^n}{1-q}.$$

Рассмотрим частные случаи.

–Если  $|q| < 1$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{b}{1-q}$ , т.е. ряд сходится.

–Если  $|q| > 1$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  не существует, т.е. последовательность  $\{S_n\}$

расходится, а значит расходится и исследуемый ряд геометрической прогрессии.

–При  $q = 1$  ряд имеет вид  $b + b + \dots + b + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} b$ . Тогда  $S_n = nb$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$

, т.е. ряд расходится.

–При  $b = 1$ ,  $q = -1$  ряд имеет вид  $b - b + b - b + \dots$ , тогда  $S_1 = 1$ ,  $S_2 = 0$ ,

$S_3 = 1$ ,  $S_4 = 0$ , ...,  $S_{2n-1} = 1$ ,  $S_{2n} = 0$ , т.е. предела последовательности

$\{S_n\} = 1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots$  не существует, а значит, искомым ряд расходится.

Таким образом, ряд геометрической прогрессии сходится тогда и только тогда, когда  $|q| < 1$ , в остальных случаях ряд расходится.

### 1.3. Основные свойства сходящихся рядов, необходимый признак сходимости

Пусть дан числовой ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ . Сформулируем его основные свойства.

**Свойство 1.** Если сходится ряд, полученный из данного ряда отбрасыванием или присоединением конечного числа членов, то сходится и сам данный ряд, и наоборот. Иными словами, отбрасывание или присоединение конечного числа членов ряда не влияет на сходимость ряда.

*Доказательство.* Пусть  $S_n$  – частичная сумма ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ,  $C_k$  – сумма  $k$

отброшенных членов и  $\sigma_{n-k}$  – сумма членов ряда, входящих в сумму  $S_n$  и не входящих в сумму  $C_k$ . При достаточно большом  $n$  все отброшенные члены будут содержаться в сумме  $S_n$ , т.е.  $S_n = C_k + \sigma_{n-k}$  ( $k$  – фиксированное число,  $C_k = \text{const}$ ). Тогда, если существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{n-k}$ , то существует и

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (C_k + \sigma_{n-k})$ , т.е. исходный ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится. И наоборот, если

существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ , то существует и  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{n-k}$ , т.е. сходится составленный ряд.

Аналогично доказывается сходимость при добавлении к ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  конечного числа членов.

**Свойство 2.** Если сходится ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$ , то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} C \cdot a_n$  ( $C$  – константа)

также сходится, причём его сумма равна  $C \cdot S$ .

*Доказательство.* Пусть  $S_n$  – частичная сумма ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ,  $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ ,

и  $\overline{S}_n$  – частичная сумма ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} C \cdot a_n$ ,  $\overline{S}_n = Ca_1 + Ca_2 + \dots + Ca_n$ . Тогда

$$\overline{S}_n = C(a_1 + a_2 + \dots + a_n) = C \cdot S_n.$$

Отсюда, если существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$  (ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$  сходится), то существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S_n} = C \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = C \cdot S, \text{ т.е. ряд } \sum_{n=1}^{\infty} C \cdot a_n \text{ также сходится.}$$

**Свойство 3.** Если ряды  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  сходятся и их суммы равны  $A$  и

Всоответственно, то их можно почленно складывать (или вычитать), причём

$$\text{ряды } \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) \text{ также сходятся и их суммы равны } S = A \pm B.$$

*Доказательство.* Пусть  $A_n$ ,  $B_n$  и  $S_n$  – частичные суммы этих рядов, тогда

$$S_n = (a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + \dots + (a_n \pm b_n) = (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \pm (b_1 + b_2 + \dots + b_n) =$$

$$= A_n \pm B_n. \text{ Переходя к пределу при } n \rightarrow \infty, \text{ получим}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (A_n \pm B_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} B_n = A \pm B.$$

**Теорема 1 (необходимый признак сходимости рядов).** Пусть ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

сходится, тогда его общий член  $a_n$  стремится к 0 (при  $n \rightarrow \infty$ )  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

(обратное не всегда верно).

*Доказательство.* Так как ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится и его сумма равна  $S$ , то для его

частичных сумм  $S_n$ ,  $S_{n-1}$  имеют место равенства  $a_n = S_n - S_{n-1}$ ;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S - S = 0. \quad \text{Что и требовалось доказать.}$$

Условие сходимости, сформулированное в теореме 1, является *необходимым*, но не *достаточным*, т.е. при выполнении условия  $a_n \rightarrow 0$  ряд



может расходиться. Рассмотрим пример такого ряда:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ , где  $\frac{1}{\sqrt{n}} = a_n$  –

общий член ряда. Тогда  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ . Частичная сумма ряда имеет вид

$S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$ . Очевидно, каждый член этой суммы  $\geq \frac{1}{\sqrt{n}}$ , тогда

оценка  $S_n$  даёт неравенство:  $S_n \geq \left( \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \rightarrow \infty$ ,

следовательно,  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = \infty$ , т.е. исходный ряд расходится, хотя

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0.$$

*Следствие из теоремы 1.* Если общий член ряда  $a_n$  (при  $n \rightarrow \infty$ ) не стремится к

0, то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  расходится (*достаточный признак расходимости ряда*).

**Пример 5.** Исследовать на сходимость ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2n} = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \dots$

*Решение.* Обозначим общий член ряда  $\frac{2n-1}{2n} = a_n$ . Так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{2n} \right) = 1 \neq 0, \text{ то из следствия теоремы 1}$$

следует, что ряд расходится.

**Пример 6.** Исследовать на сходимость ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$

*Решение.* Общий член ряда имеет вид  $a_n = \frac{1}{n}$ . Данный ряд называется

гармоническим, так как каждый его член равен среднему гармоническому двух

соседних:  $\frac{1}{a_n} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n+1}} \right)$ . Очевидно неравенство:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n}}_n = n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}. \text{ Члены гармонического}$$

ряда, начиная с третьего, объединим в группы по 2, 4, 8, 16, ...,  $2^{k-1}$  членов в каждой группе. Очевидно, сумма каждой группы можно оценить

следующим образом:  $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{2}$ ;  $\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{1}{2}$ ;  $\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{16} > \frac{1}{2}$  ..., т.е.

каждая из этих сумм в отдельности больше  $\frac{1}{2}$ . Таким образом, для частичных

сумм с номерами  $n = 2^k$ ,  $k = 2, 3, \dots$  выполняются неравенства:

$$S_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + 2 \cdot \frac{1}{2},$$

$$S_8 = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{> \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{> \frac{1}{2}} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + 3 \cdot \frac{1}{2}, \dots,$$

$S_{2^k} > 1 + k \cdot \frac{1}{2} = \frac{2+k}{2}$ , т.е. частичные суммы гармонического ряда неограниченно

растут с увеличением  $n = 2^k \rightarrow \infty$  при  $k \rightarrow \infty$ , значит,  $\lim_{k \rightarrow \infty} S_{2^k} = \infty$ . Получаем,

что гармонический ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  расходится.

#### 1.4. Знакопостоянные ряды, ряды с положительными членами

Установление сходимости или расходимости числового ряда –

основной вопрос теории рядов; нахождение суммы ряда в случае его

сходимости – второстепенная задача. Вопрос сходимости проще всего

решается для знакопостоянных рядов, когда все члены ряда одного знака. Для

определённости будем рассматривать ряды с положительными ( $a_n > 0$ ) или неотрицательными членами ( $a_n \geq 0$ ). Характерным свойством таких рядов является монотонное возрастание (не убывание) последовательности частичных сумм:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n > 0, \quad S_n = S_{n-1} + a_n > S_{n-1}; \quad S_1 < S_2 < S_3 < \dots < S_n < \dots$$

Ряд с положительными членами всегда имеет сумму; если эта сумма конечна, то ряд сходится.

Выяснение сходимости рядов с положительными членами опирается на признаки сходимости, которые являются либо необходимыми, либо достаточными, либо необходимыми и достаточными. В частности, к таким рядам применим приведенный выше необходимый признак сходимости рядов (теорема 1). Существует признак, являющийся необходимым и достаточным, который устанавливается следующей теоремой.

**Теорема 2.** Для сходимости ряда с положительными членами *необходимо и достаточно*, чтобы последовательность его частичных сумм была ограничена сверху.

*Доказательство (необходимость).* Пусть ряд сходится, тогда последовательность его частичных сумм сходится, а значит, она ограничена сверху.

*Доказательство (достаточность).* Так как последовательность частичных сумм монотонно возрастает и ограничена сверху, то она имеет предел, т.е. соответствующий ряд сходится (теорема Вейерштрасса для числовых последовательностей). Теорема доказана.

Следует отметить, что на практике этот признак трудно применим, хотя и представляет собой большой теоретический интерес.

Далее рассматриваются некоторые признаки сходимости рядов с положительными членами, удобные для практического применения, которые являются только достаточными признаками (интегральный и радикальный признаки Коши, признаки сравнения, признак Даламбера).

### 1.5. Интегральный признак Коши сходимости ряда с положительными членами

**Теорема 3 (интегральный признак Коши).** Пусть дан ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , члены

которого удовлетворяют трём условиям:

- а)  $a_n > 0$ ,  $n \geq 1$ , т.е. исходный ряд с положительными членами;
- б) члены ряда монотонно убывают, т.е.  $a_1 > a_2 > \dots > a_{n-1} > a_n > \dots > 0$ ;
- в) общий член ряда стремится к нулю:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

Пусть существует непрерывная, монотонно убывающая, определённая при  $x \geq 1$  функция  $f(x)$ , такая что  $f(1) = a_1$ ,  $f(2) = a_2$ , ...;  $f(n) = a_n$ , ..., т.е.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ . Тогда, если несобственный интеграл  $\int_1^{+\infty} f(x) dx$  сходится, то ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  тоже сходится; если указанный интеграл расходится, то этот ряд

расходится.

**Доказательство.** Из условий теоремы  $f(n) = a_n > 0$  следует  $f(x) > 0$  при  $x \geq 1$ .

Рассмотрим криволинейную трапецию, ограниченную линиями  $y = f(x)$ ,  $x = 1$ ,

$x = n + 1$  и осью  $Ox$  (рис.1). Разобьём отрезок  $[1; n + 1]$

точками  $x = k$  ( $k = 1, 2, \dots, n + 1$ ) и рассмотрим  $n$  криволинейных трапеций.

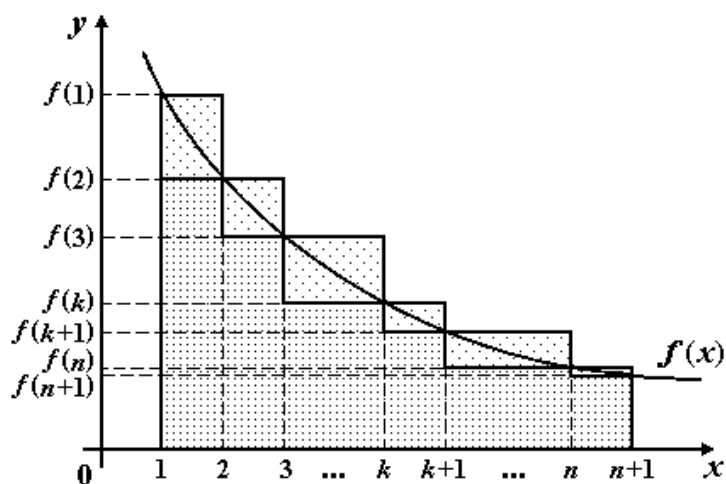


Рис. 1. Площадь криволинейной трапеции

Из геометрического смысла интеграла площадь криволинейной

трапеции  $S_{\text{тр}} = \int_1^{n+1} f(x)dx$ . Заменяем эту площадь суммой площадей  $n$

прямоугольников с единичными основаниями:

$$S' = f(1) + f(2) + \dots + f(n), \quad S'' = f(2) + f(3) + \dots + f(n+1),$$

причём  $S' = \sum_{k=1}^n f(k) = \sum_{k=1}^n a_k = S_n$ , а  $S'' = \sum_{k=2}^{n+1} f(k) = \sum_{k=2}^{n+1} a_k = \sum_{k=1}^{n+1} a_k - a_1 = S_{n+1} - a_1$ .

Из графика (рис. 1) следует:  $S'' < S_{\text{тр}} < S'$ , т.е.

$$S_n > \int_1^{n+1} f(x)dx > S_{n+1} - a_1, \quad \forall n = 1, 2, \dots$$

Рассмотрим два случая.

1) Пусть  $\int_1^{+\infty} f(x)dx$  сходится, т.е. имеет конечный предел

$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^{n+1} f(x)dx = \int_1^{\infty} f(x)dx = A$ . Так как  $\int_1^{n+1} f(x)dx \leq \int_1^{\infty} f(x)dx = A$ , то

$$(S_{n+1} - a_1) \leq \int_1^{\infty} f(x)dx = A \quad \text{и} \quad S_{n+1} \leq \int_1^{\infty} f(x)dx + a_1 = A + a_1.$$

Итак, частичные суммы ряда ограничены  $\forall n \in \mathbb{N}$ , тогда по теореме 2

(необходимый и достаточный признак сходимости ряда с положительными

членами) ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится, значит, существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n+1} = S < \infty$ .

2) Пусть интеграл  $\int_1^{+\infty} f(x)dx$  расходится, т.е.  $\int_1^{n+1} f(x)dx$  неограниченно возрастает

при  $n \rightarrow \infty$ . Тогда из неравенства  $S_n > \int_1^{n+1} f(x)dx$  следует, что

последовательность  $\{S_n\}$  неограниченно возрастает:  $S_n \rightarrow \infty$ , т.е. ряд расходится. Теорема доказана.

*Замечание 1.* Теорема остаётся верной и тогда, когда её условия выполняются не для всех членов ряда, а лишь начиная с  $k$ -го ( $n \geq k$ ), в таком случае

рассматривается интеграл  $\int_k^{+\infty} f(x)dx$ .

*Замечание 2.* Интегральный признак Коши существенно облегчает исследование сходимости ряда, так как позволяет свести этот вопрос к выяснению сходимости интеграла от удачно подобранной соответствующей функции  $f(x)$ , что легко выполняется, применяя методы интегрального исчисления.

Лекция 2. Признаки сходимости рядов с положительными членами:  
признаки сравнения, признак Даламбера, радикальный признак Коши

### 2.1. Ряды Дирихле и их сходимость, гармонический ряд

**Определение 1.** Числовой ряд вида  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  называется *рядом Дирихле* с

показателем  $p$ ,  $p \in \mathbb{R}$ . Заметим, что при  $p = 1$  получаем ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ , который называется *гармоническим*.

**Пример 1.** Исследовать ряд Дирихле  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  на сходимость в зависимости от  $p$ .

**Решение.** 1) В случае, если  $p \leq 0$ , члены ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  образуют неубывающую последовательность, а сам ряд расходится по необходимому признаку сходимости ( $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ ).

2) В случае  $p > 0$  для исследования сходимости ряда используем

интегральный признак Коши. Введём функцию  $f(x) = \frac{1}{x^p}$ ,  $x \geq 1$ , которая

удовлетворяет всем условиям теоремы Коши (теорема 3, лекция 1, разд. 1.5):

при  $p > 0$  она непрерывна, положительна и монотонно убывает,

$f(n) = \frac{1}{n^p} = a_n$ ,  $n \geq 1$ . Вычислим несобственный интеграл  $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$  в двух случаях

а)  $0 < p < 1$ , б)  $p > 1$ , т.е. когда  $p \neq 1$ :

$$\int_1^{\infty} x^{-p} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n x^{-p} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left. \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right|_1^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^{-p+1}}{-p+1} - \frac{1}{1-p} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^{1-p}}{1-p} + \frac{1}{p-1} \right)$$

—Если  $0 < p < 1$ ,  $1 - p > 0$ , то  $n^{1-p} \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ , тогда

$$\int_1^{\infty} x^{-p} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^{1-p}}{1-p} + \frac{1}{p-1} \right) = \infty, \text{ следовательно, несобственный интеграл}$$

расходится и расходится исходный ряд.

—Если  $p > 1$ ,  $1 - p < 0$ , то  $n^{1-p} \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , тогда

$$\int_1^{\infty} x^{-p} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^{p-1}(1-p)} + \frac{1}{p-1} \right) = \frac{1}{p-1} < \infty, \text{ следовательно, несобственный}$$

интеграл сходится и сходится исходный ряд.

3) В случае  $p = 1$  имеем гармонический ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ , для которого

также применим интегральный признак Коши, т.е. рассмотрим интеграл

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{dx}{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \ln |x|_1^n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\ln n - \ln 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln n = \infty, \text{ следовательно,}$$

несобственный интеграл расходится, а значит, гармонический ряд расходится.

**Вывод:** ряд Дирихле  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  сходится, если  $p > 1$ , и расходится, если  $p \leq 1$ .

## 2.2. Признаки сравнения рядов с положительными членами

Рассмотрим некоторые признаки, устанавливающие сходимость или расходимость рядов с положительными членами путём сравнения их с рядами, сходимость или расходимость которых известна.

**Теорема 1 (I признак сравнения рядов с положительными членами).** Пусть

даны 2 ряда с положительными членами  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ .

Если, начиная с некоторого номера  $N$ , для всех  $n \geq N$  выполняется неравенство

$a_n \leq b_n$ , тогда



1) из сходимости ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  следует сходимость ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ,

2) из расходимости ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  следует расходимость ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ .

*Доказательство.* На основании того, что отбрасывание конечного числа членов (свойство 1, лекция 1, разд. 1.3) не влияет на сходимость или расходимость ряда, можно считать, не нарушая общности, что условие  $a_n \leq b_n$

выполнено для всех  $n \geq 1$ . Пусть  $A_n$  – частичная сумма ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ , а  $B_n$  –

частичная сумма ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ . По условию

$$A_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq b_1 + b_2 + \dots + b_n = B_n.$$

1) Если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  сходится, то последовательность  $\{B_n\}$  ограничена

сверху, а значит, ограничена сверху и последовательность  $\{A_n\}$ .

Следовательно, по теореме 2 (лекция 1, разд. 1.4) о необходимом и

достаточном условии сходимости ряда с положительными членами ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

сходится, так как существует конечный предел последовательности  $\{A_n\}$ .

2) Если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  расходится, то последовательность  $\{A_n\}$  не ограничена,

а значит, не ограничена и последовательность  $\{B_n\}$ . Тогда по теореме 2

(лекция 1, разд. 1.4) ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  расходится. Теорема доказана.

**Пример 2.** Исследовать на сходимость ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots$ .

*Решение.* Обозначим  $\frac{1}{\sqrt{n}} = b_n$ . Сравним ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  с гармоническим рядом

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ . При  $n \geq 2$   $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n} = a_n$ , а так как гармонический ряд

расходится, то расходится и ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ .

*Ответ:* ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$  расходится.

**Пример 3.** Исследовать на сходимость ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot 2^k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{64} + \dots$

*Решение.* Обозначим  $\frac{1}{k \cdot 2^k} = a_k$ . Сравним данный ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  с рядом

геометрической прогрессии  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2} + 1} = 1$ , который

сходится, так как знаменатель прогрессии  $q = \frac{1}{2}$ , то первые члены ряда равны, а

при  $k \geq 2$ ,  $a_k < b_k$ , значит, ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot 2^k}$  сходится по I признаку сравнения.

*Ответ:* ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot 2^k}$  сходится.

**Теорема 2 (предельный признак сравнения рядов с положительными членами).**

Даны 2 ряда с положительными членами  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  и пусть существует

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = C$ ,  $C \neq 0$ ,  $C \neq \infty$ , тогда эти два ряда либо сходятся, либо расходятся

одновременно.

*Доказательство.* Так как по условию  $a_n > 0$ ,  $b_n > 0$ ,  $\forall n = 1, 2, 3, \dots$  и  $C = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ ,

то согласно свойству предела  $C \geq 0$ . По условию  $C \neq 0$ , значит,  $C > 0$ . По

определению предела для всех  $\varepsilon > 0$  существует окрестность  $(C - \varepsilon, C + \varepsilon)$

точки  $C$  такая, что  $C - \varepsilon > 0$  и существует такое натуральное число  $N$ ,

зависящее от  $\varepsilon$ , что для всех  $n \geq N$  выполняется неравенство  $C - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < C + \varepsilon$ ,

или  $(C - \varepsilon)b_n < a_n < (C + \varepsilon)b_n$ .

Если ряд  $\sum_{n=N+1}^{\infty} b_n$  сходится, то сходится и ряд  $\sum_{n=N+1}^{\infty} b_n(C + \varepsilon)$  (свойство 2,

лекция 1, разд. 1.3), откуда по I признаку сравнения рядов следует сходимость

ряда  $\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$ , так как  $a_n < (C + \varepsilon)b_n$ .

Если же ряд  $\sum_{n=N+1}^{\infty} b_n$  расходится, то расходится и ряд  $\sum_{n=N+1}^{\infty} b_n(C - \varepsilon)$ , а так

как  $(C - \varepsilon)b_n < a_n$ , то по I признаку сравнения рядов ряд  $\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$  также

расходится. Теорема доказана.

*Замечание.* Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = C$ ,  $C = 0$  или  $C = \infty$ , то предельный признак не

применим (теорема 2 в этих случаях не верна).

**Пример 4.** Исследовать на сходимость ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 3n}$ .

*Решение.* Обозначим  $\frac{1}{n^2 + 3n} = a_n$ . Рассмотрим ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ . Так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2 + 3n} = 1 \neq 0 \text{ и } \neq \infty, \text{ то эти два ряда одновременно сходятся,}$$

или расходятся (теорема 2). Поскольку  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  – ряд Дирихле с  $p = 2 > 1$

сходится, следовательно, исходный ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 3n}$  тоже сходится.

*Ответ:* ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 3n}$  сходится.

**Пример 5.** Исследовать на сходимости ряд  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ .

*Решение.* Обозначим  $\frac{1}{\ln n} = a_n$ . Рассмотрим гармонический ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ,

который расходится. Так как  $a_n = \frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n} = b_n$  ( $n > \ln n \quad \forall n \geq 2$ ), то по теореме 1

ряд  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$  расходится.

*Ответ:* ряд  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$  расходится.

### 2.3. Признак Даламбера сходимости рядов с положительными членами

**Теорема 3 (признак Даламбера).** Пусть дан ряд с положительными членами

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  ( $a_n > 0$ ), и существует конечный предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$ , тогда:

- 1) ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится, если  $l < 1$ ,
- 2) ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  расходится, если  $l > 1$ ,
- 3) если  $l = 1$ , то для выяснения сходимости ряда признак Даламбера не применим.

**Доказательство.** 1) Пусть предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$  существует и  $0 \leq l < 1$ .

Рассмотрим число  $q$  такое, что  $l < q < 1$ . Из определения предела следует, что

$\forall \varepsilon = q - l > 0$  существует  $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ , начиная с которого  $\forall n \geq N = N(\varepsilon)$

выполняется неравенство  $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - l \right| < q - l$ ,

$l - q < \frac{a_{n+1}}{a_n} - l < q - l$ ,  $2l - q < \frac{a_{n+1}}{a_n} < q$ . Таким образом,  $\forall n \geq N$   $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q$ , т.е.

$a_{n+1} < q \cdot a_n$ . Берём  $n = N, N+1, N+2, \dots$ , тогда  $a_{N+1} < q \cdot a_N$ ,  $a_{N+2} < q a_{N+1} < q^2 a_N$ ,

$a_{N+3} < q \cdot a_{N+2} < q^3 a_N$ , ...,  $a_{N+k} < q^k a_N$ .

Запишем исходный ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  ( $a_n > 0$ ) в виде:

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_N + a_{N+1} + a_{N+2} + \dots$ . Рассмотрим новый ряд

$\sum_{k=0}^{\infty} a_N \cdot q^k = a_N + q a_N + q^2 a_N + \dots$ . Этот ряд есть ряд геометрической прогрессии

с  $b_1 = a_N$  и  $0 < q < 1$ , который сходится, а значит, сходится ряд

$\sum_{k=0}^{\infty} a_{N+k} = a_N + a_{N+1} + a_{N+2} + \dots$ , так как  $a_{N+k} < q^k a_N$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) на основании

теоремы 1. Ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} a_{N+k}$  получен из исходного  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  отбрасыванием

конечного числа членов  $a_1, a_2, \dots, a_{N-1}$ , тогда ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится (свойство 1,

лекция 1, разд. 1.3). Таким образом, исходный ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится, если

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l, \quad l < 1$ . Первая часть теоремы доказана.

2) Пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l > 1$ . Рассмотрим число  $q$  такое, что  $l > q > 1$ .  $\varepsilon = l - q > 0$ , из

определения предела следует:  $-\varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} - l < \varepsilon, l - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < l + \varepsilon, \frac{a_{n+1}}{a_n} > q > 1$ .

Таким образом,  $a_{n+1} > a_n > 0$  и при  $n \rightarrow \infty$  общий член ряда  $a_n$  не стремится к

0, т.е. ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  расходится, так как не выполняется необходимое условие

сходимости ряда (теорема 1, лекция 1, разд. 1.3). Вторая часть теоремы доказана.

3) Если  $l = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$  равен единице или не существует, в этом

случае для выяснения сходимости ряда признак Даламбера не применим.

**Пример 6.** Исследовать на сходимость ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ .

**Решение.** Обозначим  $\frac{n}{2^n} = a_n, a_n > 0$ ; найдём  $a_{n+1} = \frac{n+1}{2^{n+1}}$ . Составим предел

$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \cdot 2^n}{2^n \cdot 2 \cdot n} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = \frac{1}{2} < 1$ , т.е. по признаку Даламбера ряд

сходится.

Ответ: ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$  сходится.

**Пример 7.** Исследовать на сходимость ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^n}$ .

**Решение.** Обозначим  $\frac{n!}{5^n} = a_n, a_n > 0$ ; найдём  $a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{5^{n+1}}$ . Составим предел

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! \cdot 5^n}{5^{n+1} \cdot n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! \cdot (n+1) \cdot 5^n}{5^n \cdot 5 \cdot n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{5} = \infty > 1,$$

т.е. по признаку Даламбера ряд расходится.

Ответ: ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^n}$  расходится.

## 2.4. Радикальный признак Коши сходимости рядов с положительными членами

**Теорема 4 (радикальный признак Коши).** Пусть дан ряд с положительными

членами  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n > 0$  и пусть существует конечный предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l$ . Тогда:

- 1) если  $l < 1$ , ряд сходится,
- 2) если  $l > 1$ , ряд расходится,
- 3) если  $l = 1$ , то для выяснения сходимости ряда радикальный признак Коши не применим.

**Доказательство.** 1) Пусть существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l < 1$ ; так как  $a_n > 0$ , то  $l \geq 0$ .

Рассмотрим число  $q$  такое, что  $l < q < 1$ . Из определения предела следует, что

$\forall \varepsilon = q - l > 0$  существует  $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ , начиная с которого  $\forall n \geq N$  выполняется

неравенство  $|\sqrt[n]{a_n} - l| < q - l, l - q < \sqrt[n]{a_n} - l < q - l, \sqrt[n]{a_n} < q, a_n < q^n \quad \forall n \geq N$ .

Распишем исходный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_N + a_{N+1} + a_{N+2} + \dots \quad (1)$$

Составим новый ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^{N+k} = q^N + q^{N+1} + q^{N+2} + \dots \quad (2)$$

Ряд (2) представляет собой ряд геометрической прогрессии со знаменателем  $q$ :  $0 \leq q < 1$ , т.е. этот ряд сходится, а значит, ряд (1) сходится по I признаку сравнения рядов (теорема 1 данной лекции).

2) Пусть существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l > 1$ . Начиная с некоторого  $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n \geq N$ ,

$\sqrt[n]{a_n} > 1 \Rightarrow a_n > 1$ , т.е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ , тогда исходный ряд расходится по

необходимому признаку сходимости (теорема 1, лекция 1, разд. 1.3).

3) Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l = 1$  (или не существует), то для выяснения сходимости ряда радикальный признак Коши не применим. Теорема доказана.

**Пример 8.** Исследовать на сходимость ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n}{2n+1} \right)^n$

**Решение.** Обозначим  $\left( \frac{n}{2n+1} \right)^n = a_n$ ,  $a_n > 0$ . Составим предел:

$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1$ , т.е. по радикальному признаку Коши ряд сходится.

**Ответ:** ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n}{2n+1} \right)^n$  сходится.



### Лекция 3. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость знакопеременных рядов

#### 3.1. Знакопеременные ряды. Признак Лейбница

**Определение 1.** Числовой ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots$ ,

где  $a_n > 0$ , называется *знакопеременным рядом*.

Для установления сходимости таких рядов существует достаточный признак сходимости, называемый *признаком Лейбница*.

**Теорема 1 (признак Лейбница).** Пусть числовой ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  удовлетворяет

условиям:

- 1)  $u_n = (-1)^{n-1} \cdot a_n$ ,  $a_n > 0$ , т.е. этот ряд *знакопеременный*;
- 2) члены этого ряда монотонно убывают по абсолютной величине:  
 $|u_1| > |u_2| > |u_3| > \dots$  т.е.  $a_n > a_{n+1}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ;
- 3) общий член ряда  $a_n$  стремится к 0, т.е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

Тогда ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  сходится и его сумма  $S \leq a_1$ .

**Доказательство.** 1) Сначала рассмотрим частичную сумму чётного порядка

$S_n = S_{2m} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + a_{2m-1} - a_{2m}$  и запишем её в виде:

$S_{2m} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \dots + (a_{2m-1} - a_{2m})$ . В силу условия 2) теоремы 1 все

выражения в скобках положительны, тогда сумма  $S_{2m} > 0$  и последовательность

$\{S_{2m}\}$  монотонно возрастает:  $0 < S_2 < S_4 < S_6 < \dots < S_{2m} < \dots$ .

Теперь запишем эту сумму иначе:

$$S_{2m} = a_1 - (a_3 - a_2) - (a_4 - a_3) - \dots - (a_{2m-2} - a_{2m-1}) - a_{2m}.$$

В последнем выражении каждое из выражений в скобках положительно, поэтому  $S_{2m} < a_1$ , из чего следует, что последовательность  $\{S_n\} = \{S_{2m}\}$  является ограниченной, и так как она монотонно возрастает, то она сходится. Другими словами существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m} = S$ , причём  $S \leq a_1$ .

2) Рассмотрим частичную сумму нечётного порядка

$S_n = S_{2m+1} = S_{2m} + a_{2m+1}$ , которая положительна. Можно показать, что последовательность  $\{S_{2m+1}\}$  монотонно возрастает, так как монотонно возрастает последовательность  $\{S_{2m}\}$  и  $a_{2m+1} > 0$ . Запишем выражение для  $\{S_{2m+1}\}$  в виде:  $S_{2m+1} = a_1 - (a_2 - a_3) - \dots - (a_{2m} - a_{2m+1})$ , так как все выражения в скобках положительны, то  $S_{2m+1} \leq a_1$ . По условию 3) теоремы  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ,

тогда  $\lim_{m \rightarrow \infty} a_{2m+1} = 0$ , откуда

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m+1} = \lim_{m \rightarrow \infty} (S_{2m} + a_{2m+1}) = \lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m} + \lim_{m \rightarrow \infty} a_{2m+1} = S.$$

Итак, при всех  $n$  (чётных или нечётных),  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \leq a_1$ , следовательно,

исходный ряд сходится. Теорема доказана.

*Замечание 1.* Признак Лейбница можно также применять к рядам, для которых условия теоремы выполняются с некоторого номера  $N \in \mathbb{N}$ .

*Замечание 2.* Условие 2) теоремы 1 (признак Лейбница) о монотонности членов ряда существенно.

**Пример 1.** Исследовать на сходимость ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ .

*Решение.* Обозначим  $\frac{(-1)^{n-1}}{n} = u_n$ . К данному ряду применим признак Лейбница.

Проверим выполнение условий теоремы 1: условие 1) ряд знакочередующийся

$a_n = \frac{1}{n}$ ,  $u_n = (-1)^{n-1} \cdot a_n$ ,  $a_n > 0$ ; условие 2) выполнено:  $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \dots$ ;

условие 3) также выполнено:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ . Следовательно, по признаку Лейбница

данный ряд сходится, причем его сумма  $S \leq a_1 = 1$ .

Ответ: ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$  сходится.

### 3.2. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость.

#### Достаточный признак сходимости знакопеременных рядов

Числовой ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ , члены которого имеют произвольные знаки (+), (-),

называется *знакопеременным рядом*. Рассмотренные выше

знакопеременяющиеся ряды являются частным случаем знакопеременного ряда;

понятно, что не всякий знакопеременный ряд является знакопеременяющимся.

Например, ряд  $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \dots$  – знакопеременный, но не

являющийся знакопеременяющимся рядом.

Отметим, что в знакопеременном ряде членов как со знаком (+), так и со знаком (-) бесконечно много. Если это не выполняется, например, ряд содержит конечное число отрицательных членов, то их можно отбросить и рассматривать ряд, составленный только из положительных членов, и наоборот.

**Определение 1.** Если числовой ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  сходится и его сумма равна  $S$ ,

а частичная сумма равна  $S_n$ , то  $r_n = S - S_n$  называется *остатком ряда*, причём

$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S - S_n) = S - S = 0$ , т.е. остаток сходящегося ряда стремится к 0.

Рассмотрим сходящийся знакочередующийся ряд как частный случай знакопеременного ряда

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot a_n$ , где  $a_n > 0$ . Запишем его в виде  $S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = S_n + r_n$ , тогда

по признаку Лейбница  $|r_n| = |S - S_n| < a_{n+1}$ ; так как  $S_n \rightarrow S$ , то  $r_n \rightarrow 0$ , т.е.

остаток сходящегося ряда стремится к 0.

Для знакопеременных рядов вводятся понятия абсолютной и условной сходимости.

**Определение 2.** Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  называется *сходящимся абсолютно*, если сходится

ряд, составленный из абсолютных величин его членов  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ .

**Определение 3.** Если числовой ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  сходится, а ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ , составленный

из абсолютных величин его членов, расходится, то исходный ряд называется *условно (неабсолютно) сходящимся*.

**Теорема 2 (достаточный признак сходимости знакопеременных рядов).**

Знакопеременный ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  сходится, причём абсолютно, если сходится ряд,

составленный из абсолютных величин его членов  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ .

*Доказательство.* Обозначим через  $S_n$  частичную сумму ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  :

$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$ , а через  $\sigma_n$  – частичную сумму ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$  :

$\sigma_n = |u_1| + |u_2| + |u_3| + \dots + |u_n|$ . Обозначим через  $S'_n$  сумму всех положительных членов, а через  $S''_n$  сумму абсолютных величин всех отрицательных членов, входящих в  $S_n$ . Очевидно, что  $S_n = S'_n - S''_n$ ,  $\sigma_n = S'_n + S''_n$ .

По условию теоремы ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$  сходится, тогда существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \sigma$ , и так как

последовательность  $\sigma_n = S'_n + S''_n$  – монотонно возрастающая и

неотрицательная, то  $\sigma_n \leq \sigma$ . Очевидно, что  $S'_n \leq \sigma$ ,  $S''_n \leq \sigma$ , тогда

последовательности  $\{S'_n\}$  и  $\{S''_n\}$  являются монотонно возрастающими и

ограниченными, причем их пределы равны  $\lim_{n \rightarrow \infty} S'_n = S'$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} S''_n = S''$ . Тогда

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S'_n - S''_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} S'_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S''_n = S' - S'' = S$ . Значит, исходный

знакопеременный ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  сходится и сходится абсолютно. Теорема

доказана.

*Замечание.* Теорема 2 даёт только достаточное условие сходимости

знакопеременных рядов. Обратная теорема неверна, т.е. если

знакопеременный ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  сходится, то не обязательно, что сходится ряд,

составленный из модулей  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$  (он может быть как сходящимся, так и

расходящимся). Например, ряд  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$  сходится по

признаку Лейбница (см. пример 1 данной лекции), а ряд, составленный из абсолютных величин его членов,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  (гармонический ряд) расходится.

**Пример 2.** Исследовать на условную и абсолютную сходимость ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 9^n}{n!}$ .

*Решение.* Данный ряд является знакопеременным, общий член которого

обозначим:  $\frac{(-1)^n \cdot 9^n}{n!} = u_n$ . Составим ряд из абсолютных величин  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n}{n!}$  и

применим к нему признак Даламбера. Составим предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ , где  $a_n = \frac{9^n}{n!}$ ,

$a_{n+1} = \frac{9^{n+1}}{(n+1)!}$ . Проведя преобразования, получаем

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9^{n+1} \cdot n!}{(n+1)! \cdot 9^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9^n \cdot 9 \cdot n!}{n! \cdot (n+1) \cdot 9^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9}{n+1} = 0$ . Таким образом, ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n}{n!}$  сходится, а значит, исходный знакопеременный ряд сходится

абсолютно.

*Ответ:* ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 9^n}{n!}$  абсолютно сходится.

**Пример 3.** Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \sqrt{n}}{n+1}$ .

*Решение.* А) Исследуем ряд на абсолютную сходимость. Обозначим

$\frac{(-1)^n \cdot \sqrt{n}}{n+1} = u_n$  и составим ряд из абсолютных величин  $a_n = |u_n| = \frac{\sqrt{n}}{n+1}$ .

Получаем ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$  с положительными членами, к которому

применяем предельный признак сравнения рядов (теорема 2, лекция 2, разд.

2.2). Для сравнения с рядом  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$  рассмотрим ряд, который имеет

вид  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ . Этот ряд является рядом Дирихле с показателем  $p = \frac{1}{2} < 1$ ,

т.е. он расходится. Составим и вычислим следующий предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n}}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = 1. \text{ Так как предел существует, не равен } 0 \text{ и не}$$

равен  $\infty$ , то оба ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  ведут себя одинаково. Таким образом, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1} \text{ расходится, а значит, исходный ряд не является абсолютно}$$

сходящимся.

Б) Далее исследуем исходный ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \sqrt{n}}{n+1}$  на условную сходимость. Для

этого проверим выполнение условий признака Лейбница (теорема 1, разд. 3.1).

Условие 1):  $u_n = (-1)^n \cdot a_n$ , где  $a_n = \frac{\sqrt{n}}{n+1} > 0$ , т.е. этот ряд знакочередующийся.

Для проверки условия 2) о монотонном убывании членов ряда используем

следующий метод. Рассмотрим вспомогательную функцию  $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1}$ ,

определенную при  $x \in [0; +\infty)$  (функция такова, что при  $x = n$  имеем

$$f(n) = \frac{\sqrt{n}}{n+1} = a_n). \text{ Для исследования этой функции на монотонность найдем её}$$

производную:  $f'(x) = \frac{\frac{x+1}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}}{(x+1)^2} = \frac{1-x}{2\sqrt{x}(x+1)^2}$ . Эта производная  $f'(x) < 0$  при

$x > 1$ . Следовательно, функция  $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1}$  монотонно убывает при указанных

значениях  $x$ . Полагая  $x = n < n + 1$ , получаем  $f(n) = \frac{\sqrt{n}}{n+1} = a_n > f(n+1) = a_{n+1}$ ,

где  $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ . Это означает, что условие 2) выполнено. Для проверки

условия 3) находим предельное значение члена  $a_n$ :  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}} = 0$

, т.е. третье условие выполняется. Таким образом, для исходного ряда выполнены все условия признака Лейбница, т.е. он сходится.

Ответ: ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \sqrt{n}}{n+1}$  условно сходится.

### 3.3. Свойства абсолютно и условно сходящихся рядов

**Свойство 1.** Если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  абсолютно сходится, то он абсолютно сходится при

любой перестановке его членов, при этом сумма ряда не зависит от порядка расположения членов. Если  $S'$  – сумма всех его положительных членов, а  $S''$  –

сумма всех абсолютных величин отрицательных членов, то сумма ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$

равна  $S = S' - S''$ .

**Свойство 2.** Если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  абсолютно сходится и  $C = \text{const}$ , то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} C \cdot u_n$

также абсолютно сходится.

**Свойство 3.** Если ряды  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  абсолютно сходятся, то ряды

$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$  также абсолютно сходятся.



**Свойство 4(теорема Римана).** Если ряд условно сходится, то какое бы мы не взяли число  $A$ , можно переставить члены данного ряда так, чтобы его сумма оказалась в точности равной  $A$ ; более того, можно так переставить члены условно сходящегося ряда, чтобы после этого он расходился.

## Лекция 4. Функциональные ряды. Степенные ряды. Формула Тейлора

### 4.1. Функциональные ряды: основные понятия, область сходимости

**Определение 1.** Ряд, члены которого являются функциями одной или нескольких независимых переменных, определёнными на некотором множестве, называется *функциональным рядом*.

Рассмотрим функциональный ряд 
$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \dots,$$

члены которого являются функциями одной независимой переменной  $x$ . Сумма первых  $n$  членов ряда  $S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x)$  является частичной суммой данного функционального ряда. Общий член  $u_n(x)$  есть функция от  $x$ , определённая в некоторой области. Рассмотрим функциональный ряд в точке

$x = x_0$ . Если соответствующий числовой ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$  сходится, т.е. существует

предел частичных сумм этого ряда  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x_0) = S(x_0)$  (где  $S(x_0) < \infty$  – сумма

числового ряда), то точка  $x_0$  называется *точкой сходимости* функционального

ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ . Если числовой ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$  расходится, то точка  $x_0$  называется

*точкой расходимости* функционального ряда.

**Определение 2.** Областью сходимости функционального ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$

называется множество всех таких значений  $x$ , при которых функциональный ряд сходится. Область сходимости, состоящая из всех точек сходимости, обозначается  $D(x)$ . Отметим, что  $D(x) \subset \mathbb{R}$ .

Функциональный ряд сходится в области  $D(x)$ , если для любого  $x \in D(x)$  он сходится как числовой ряд, при этом его сумма будет некоторой функцией  $S(x)$ .

Это так называемая *предельная функция* последовательности  $\{S_n(x)\}$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = S(x).$$

Как находить область сходимости функционального ряда  $D(x)$ ? Можно

использовать признак, аналогичный признаку Даламбера. Для ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$

составляем  $u_{n+1}(x)$  и рассматриваем предел при фиксированном  $x$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = |l(x)|. \text{ Тогда } D(x) \text{ является решением неравенства } |l(x)| < 1 \text{ и}$$

решением уравнения  $|l(x)| = 1$  (берём только те решения уравнения, в

которых соответствующие числовые ряды сходятся).

**Пример 1.** Найти область сходимости ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ .

**Решение.** Обозначим  $u_n(x) = \frac{x^n}{n}$ ,  $u_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ . Составим и вычислим предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1} \cdot n}{x^n \cdot (n+1)} \right| = |x|, \text{ тогда область сходимости ряда определяется}$$

неравенством  $|x| < 1$ ,  $x \in (-1; 1)$  и уравнением  $|x| = 1$ . Исследуем дополнительно сходимость исходного ряда в точках, являющимися корнями уравнения:

а) если  $x = 1$ ,  $u_n(1) = \frac{1}{n}$ , то получается расходящийся ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ;

б) если  $x = -1$ ,  $u_n(-1) = \frac{(-1)^n}{n}$ , то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  сходится условно (по

признаку Лейбница, пример 1, лекция 3, разд. 3.1).

Таким образом, область сходимости  $D(x)$  ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$  имеет вид:  $-1 \leq x < 1$ .

#### 4.2. Степенные ряды: основные понятия, теорема Абеля

Рассмотрим частный случай функционального ряда, так называемый

*степенной ряд*  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ , где  $u_n(x) = a_n(x - x_0)^n$ .

**Определение 3.** *Степенным рядом* называется функциональный ряд вида

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n,$$

где  $a_0, a_1, a_2, \dots$  – постоянные числа, называемые *коэффициентами ряда*.

Степенной ряд есть «бесконечный многочлен», расположенный по возрастающим степеням  $(x - x_0)$ . Любой числовой ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  является

частным случаем степенного ряда при  $x - x_0 = 1$ .

Рассмотрим частный случай степенного ряда при  $x_0 = 0$ :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$
 Выясним, какой вид имеет

область сходимости данного ряда  $D(x)$ .

**Теорема 1 (теорема Абеля).** 1) Если степенной ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  сходится в точке  $x = \alpha$  ( $\alpha \neq 0$ ), то он абсолютно сходится при всяком  $x$ , для которого справедливо неравенство  $|x| < |\alpha|$ .

2) Если же степенной ряд расходится при  $x = \beta$ , то он расходится при всяком  $x$ , для которого  $|x| > |\beta|$ .

*Доказательство.* 1) По условию степенной ряд сходится в точке  $x = \alpha$ , т. е. сходится числовой ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \alpha^n = a_0 + a_1 \alpha + a_2 \alpha^2 + \dots + a_n \alpha^n + \dots \quad (1)$$

и по необходимому признаку сходимости его общий член стремится к 0, т.е.

$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \alpha^n) = 0$ . Следовательно, существует такое число  $M > 0$ , что все члены

ряда ограничены этим числом:  $|a_n \alpha^n| \leq M, (\forall n = 0, 1, 2, 3, \dots)$ .

Рассмотрим теперь любое  $x$ , для которого  $|x| < |\alpha|$ , и составим ряд из

абсолютных величин:  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| = |a_0| + |a_1 x| + |a_2 x^2| + \dots + |a_n x^n| + \dots$

Запишем этот ряд в другом виде: так как  $\alpha \neq 0$ , то

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| = |a_0| + |a_1 \alpha| \cdot \left| \frac{x}{\alpha} \right| + |a_2 \alpha^2| \cdot \left| \frac{x}{\alpha} \right|^2 + \dots + |a_n \alpha^n| \cdot \left| \frac{x}{\alpha} \right|^n + \dots \quad (2).$$

Из неравенства  $|a_n \alpha^n| \leq M, n = 0, 1, 2, 3, \dots$  получаем

$|a_0| \leq M, |a_1 \alpha| \leq M, |a_2 \alpha^2| \leq M, \dots$ , т.е. ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} M \left( \frac{x}{\alpha} \right)^n = M + M \cdot \left| \frac{x}{\alpha} \right| + M \cdot \left| \frac{x}{\alpha} \right|^2 + \dots + M \cdot \left| \frac{x}{\alpha} \right|^n + \dots \quad (3)$$

состоит из членов, которые больше соответствующих членов ряда (2). Ряд

$\sum_{n=0}^{\infty} M \left( \frac{x}{\alpha} \right)^n$  представляет собой сходящийся ряд геометрической прогрессии со

знаменателем  $q = \left| \frac{x}{\alpha} \right|$ , причём  $|q| < 1$ , так как  $|x| < |\alpha|$ . Следовательно, ряд (2)

сходится при  $|x| < |\alpha|$ . Таким образом, степенной ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  абсолютно

сходится.

2) Пусть ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  расходится при  $x = \beta$ , иными словами,

расходится числовой ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \beta^n$ . Докажем, что для любого  $x$  ( $|x| > |\beta|$ ) ряд

расходится. Доказательство ведётся от противного. Пусть при некотором

фиксированном  $x_1$  ( $|x_1| > |\beta|$ ) ряд сходится, тогда он сходится при всех  $|x| < |x_1|$

(см. первую часть данной теоремы), в частности, при  $x = \beta$ , что противоречит

условию 2) теоремы 1. Теорема доказана.

*Следствие.* Теорема Абеля позволяет судить о расположении точки сходимости

степенного ряда. Если точка  $x = \alpha \neq 0$  является точкой сходимости степенного

ряда, то интервал  $(-|\alpha|; |\alpha|)$  заполнен точками сходимости; если точкой

расходимости является точка  $x = \beta$ , то

бесконечные интервалы  $(-\infty; -|\beta|)$ ,  $(|\beta|; \infty)$  заполнены точками расходимости

(рис. 1).



Рис. 1. Интервалы сходимости и расходимости ряда

Можно показать, что существует такое число  $R > 0$ , что при всех

$|x| < R$  ( $-R < x < R$ ) степенной ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  абсолютно сходится, а при  $|x| > R$  –

расходится. Будем считать, что если ряд сходится только в одной точке 0, то

$R = 0$ , а если ряд сходится при всех  $x \in (-\infty, +\infty)$ , то  $R = \infty$ .

**Определение 4.** Интервалом сходимости степенного ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  называется

такой интервал  $(-R, R)$ , что при всех  $x \in (-R, R)$  этот ряд сходится и притом абсолютно, а для всех  $x$ , лежащих вне этого интервала, ряд расходится. Число  $R$  называется *радиусом сходимости* степенного ряда.

*Замечание.* На концах интервала  $(-R, R)$  вопрос о сходимости или расходимости степенного ряда решается отдельно для каждого конкретного ряда.

Покажем один из способов определения интервала и радиуса сходимости степенного ряда.

Рассмотрим степенной ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  и обозначим  $a_n \cdot x^n = u_n$ .

Составим ряд из абсолютных величин его членов:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| = |a_0| + |a_1 x| + |a_2 x^2| + \dots + |a_n x^n| + \dots$$

и применим к нему признак Даламбера.

Пусть существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \cdot |x| \right) = |x| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = l \cdot |x|,$$

где

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|, \quad l \neq 0.$$

По признаку Даламбера ряд сходится, если  $l \cdot |x| < 1$ , и расходится, если  $l \cdot |x| > 1$ .

Отсюда ряд сходится при  $|x| < \frac{1}{l}$ , тогда интервал сходимости:  $\left(-\frac{1}{l}, \frac{1}{l}\right)$ . При

$|x| > \frac{1}{l}$  ряд расходится, так как  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| > 1$ .

Используя обозначение  $R = \frac{1}{l}$ , получим формулу для определения радиуса сходимости степенного ряда:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{R},$$

где  $a_n, a_{n+1}$  – коэффициенты степенного ряда.

Если окажется, что предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = l = 0$ , то полагаем  $R = \infty$ .

Для определения интервала и радиуса сходимости степенного ряда также можно использовать радикальный признак Коши, радиус сходимости ряда

определяется из соотношения  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R}$ .

**Определение 5.** Обобщенным степенным рядом называется ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n. \text{ Его также называют рядом по степеням } (x - x_0).$$

Для такого ряда интервал сходимости имеет вид:  $(x_0 - R, x_0 + R)$ , где  $R \geq 0$  – радиус сходимости.

Покажем, как находится радиус сходимости для обобщенного степенного ряда.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{a_n(x-x_0)^n} \right| = |x-x_0| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = |x-x_0| \cdot l < 1,$$

$$\text{т.е. } |x-x_0| < R, \text{ где } \frac{1}{R} = l = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|.$$

Если  $l = 0$ , то  $R = \infty$ , и область сходимости  $D(x) = \mathbb{R}$ ; если  $l = \infty$ , то  $R = 0$  и область сходимости  $D(x) = \{x_0\}$ .

**Пример 2.** Найти область сходимости ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n \cdot 5^n}$ .

**Решение.** Обозначим  $\frac{(x+1)^n}{n \cdot 5^n} = u_n(x)$ . Составим предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x+1|^{n+1} \cdot 5^n \cdot n}{(n+1) \cdot 5^{n+1} \cdot |x+1|^n} = |x+1| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{5(n+1)} = \frac{|x+1|}{5}.$$

Решаем неравенство:  $\frac{|x+1|}{5} < 1$ ,  $|x+1| < 5$ , следовательно, интервал

сходимости имеет вид:  $-6 < x < 4$ , причём  $R = 5$ . Дополнительно исследуем концы интервала сходимости:

а)  $x = 4$ ,  $u_n(4) = \frac{1}{n}$ , получаем ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ , который расходится;

б)  $x = -6$ ,  $u_n(-6) = \frac{(-1)^n}{n}$ , получаем ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ , который сходится

условно. Таким образом, область сходимости:  $[-6; 4)$ ,  $R = 5$ .

**Ответ:** область сходимости  $[-6; 4)$ .



**Пример 3.** Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (nx)^n$  расходится для всех  $x \neq 0$ , так как  $(nx)^n \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ , радиус сходимости  $R = 0$ .

**Пример 4.** Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  сходится при всех  $x \in \mathbb{R}$ , радиус сходимости  $R = \infty$ .

### 4.3. Свойства степенных рядов

Рассмотрим степенной ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ , у которого интервал сходимости  $(-R; R)$ , тогда сумма степенного ряда  $S(x)$  определена для всех  $x \in (-R; R)$  и можно записать равенство  $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ .

**Свойство 1.** Степенной ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  сходится абсолютно в любом промежутке  $[a; b] \subset (-R; R)$ , лежащем в интервале сходимости, причём сумма степенного ряда  $S(x)$  является непрерывной функцией при всех  $x \in [a; b]$ .

**Свойство 2.** Если отрезок  $[a; b] \subset (-R; R)$ , то степенной ряд можно почленно интегрировать от  $a$  до  $b$ , т.е. если

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots, \text{ то}$$

$$\int_a^b S(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b a_n x^n dx = \int_a^b a_0 dx + \int_a^b a_1 x dx + \dots + \int_a^b a_n x^n dx + \dots$$

При этом радиус сходимости не меняется:

$$R' = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a'_n}{a'_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n(n+2)}{(n+1)a_{n+1}} \right| = R,$$

где  $a'_n = \frac{a_n}{n+1}$  – коэффициенты проинтегрированного ряда.

**Свойство 3.** Сумма степенного ряда есть функция, имеющая внутри интервала сходимости производные любого порядка. Производные от суммы степенного ряда будут суммами рядов, полученных из данного степенного ряда почленным дифференцированием соответствующее число раз, причём радиусы сходимости таких рядов будут те же, что и у исходного ряда.

$$\text{Если } S(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n,$$

$$\text{то } S'(x) = a_1 + 2a_2x + \dots + na_nx^{n-1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^{n-1},$$

$$S''(x) = 2a_2 + 6a_3x + \dots + n(n-1)a_nx^{n-2} + \dots = \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot (n-1) \cdot a_n \cdot x^{n-2}, \dots, \text{ и т.д.}$$

#### 4.4. Формула Тейлора

Рассмотрим важную задачу, которая решается в теории функциональных рядов: по заданной функции найти сходящийся функциональный ряд того или иного типа, сумма которого в области сходимости равнялась бы заданной функции. Такая задача называется *разложением функции в ряд*, например, степенной.

Пусть функция  $y = f(x)$  определена в некоторой окрестности точки

$x_0$ :  $U_{\delta}(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ , где  $\delta > 0$ , причём в этой окрестности функция имеет все производные до  $(n+1)$ -го порядка.

**Задача:** Подберём многочлен  $n$ -й степени

$P_n(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \dots + c_n(x - x_0)^n$  по степеням  $(x - x_0)$  так, чтобы в точке  $x_0$  совпадали значения  $P_n(x)$  и  $f(x)$ , а также значения их производных до  $(n + 1)$ -го порядка включительно. Тогда считаем, что в окрестности точки  $x_0$  такой многочлен  $P_n(x)$  будет приближать данную функцию с некоторой точностью.

Коэффициенты многочлена  $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n$  являются неопределенными коэффициентами, которые необходимо найти исходя из следующих условий:

$$f(x_0) = P_n(x_0), f'(x_0) = P'_n(x_0), f''(x_0) = P''_n(x_0), \dots, f^{(n)}(x_0) = P_n^{(n)}(x_0).$$

Для нахождения этих коэффициентов найдём производные до  $n$ -го порядка от  $P_n(x)$ :

$$P'_n(x) = c_1 + 2c_2(x - x_0) + 3c_3(x - x_0)^2 + \dots + n c_n(x - x_0)^{n-1},$$

$$P''_n(x) = 2c_2 + 3 \cdot 2 \cdot c_3(x - x_0) + \dots + n(n-1)c_n(x - x_0)^{n-2},$$

...

$$P_n^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot c_n = c_n \cdot n!,$$

$$P_n^{(n+1)}(x) = 0, \text{ при всех } x \in \mathbb{R}.$$

Подставим в эти соотношения  $x = x_0$  и приравняем  $f^{(k)}(x_0) = P_n^{(k)}(x_0)$ , где  $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$ :

$$f(x_0) = P_n(x_0) = c_0, f'(x_0) = P'_n(x_0) = c_1, f''(x_0) = P''_n(x_0) = 2c_2,$$

$$f'''(x_0) = P'''_n(x_0) = 2 \cdot 3 \cdot c_3, \dots f^{(n)}(x_0) = P_n^{(n)}(x_0) = c_n \cdot n!.$$

Находим выражения для  $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n$ , решая полученную систему уравнений:

$$c_0 = f(x_0); \quad c_1 = f'(x_0); \quad c_2 = \frac{f''(x_0)}{2}; \quad c_3 = \frac{f'''(x_0)}{2 \cdot 3} = \frac{f'''(x_0)}{3!}; \quad \dots; \quad c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Получаем общую формулу для определения коэффициентов многочлена  $c_k$ :

$$c_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots, n. \quad (4)$$

Тогда многочлен примет следующий вид:

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

Этот многочлен называется *многочленом Тейлора* для функции  $f(x)$

по степеням  $(x - x_0)$ , где  $c_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$  называются *коэффициентами* *многочлена Тейлора*,  $k = \overline{0, n}$ .

Таким образом, для каждой функции  $f(x)$ , удовлетворяющей поставленным условиям при  $x \in U_\delta(x_0)$ , можно найти многочлен Тейлора  $P_n(x)$  (в точке  $x_0$  функция  $f(x)$  и многочлен  $P_n(x)$  совпадают со своими производными до  $n$ -го порядка).

Разность  $f(x) - P_n(x)$ , обозначенную через  $R_n(x)$ , называют *остаточным членом* формулы Тейлора, которая имеет вид:

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x) \quad (5)$$

Формула (5) называется *формулой Тейлора для функции  $f(x)$  по степеням  $(x - x_0)$  порядка  $n$* . Отметим, что

$$R_n(x_0) = R'_n(x_0) = R''_n(x_0) = \dots = R_n^{(n)}(x_0) = 0.$$

Величина остаточного члена формулы Тейлора  $R_n(x)$  играет важную роль в оценке точности приближения заданной функции многочленом Тейлора. Существует два вида остаточных членов.

1) Остаточный член в *форме Пеано*. Преобразуем остаточный член формулы Тейлора, используя некоторые понятия из теории пределов.

а) Функция  $\alpha(x)$  называется бесконечно малой при  $x \rightarrow x_0$ , если  $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$ .

б) Бесконечно малая функция  $\beta(x)$  называется бесконечно малой более высокого порядка малости относительно бесконечно малой функции  $\alpha(x)$  при  $x \rightarrow x_0$ , если существует  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 0$  и записывается следующим образом:  
 $\beta = o(\alpha)$  (что читается так: « $\beta$  есть  $o$  малое от  $\alpha$ ).

Рассмотрим формулу Тейлора для функции  $f(x)$  по степеням  $(x - x_0)$

порядка  $n$ :  $f(x) = P_n(x) + R_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_n(x)$ . Остаточный

член в формуле Тейлора имеет вид:  $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ . Из построения

многочлена Тейлора следует  $R_n(x_0) = R'_n(x_0) = R''_n(x_0) = \dots = R_n^{(n)}(x_0) = 0$ . Тогда

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R'_n(x)}{n \cdot (x - x_0)^{n-1}} = \dots = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n^{(n-1)}(x)}{n! \cdot (x - x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n^{(n)}(x)}{n!} = 0, \text{ откуда}$$

остаточный член формулы Тейлора можно записать в виде:

$R_n(x) = o((x - x_0)^n)$ , т.е. величина остаточного члена есть бесконечно малая более высокого порядка малости относительно  $(x - x_0)^n$  при  $x \rightarrow x_0$ .

Формула Тейлора  $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$ , в которой  $R_n(x) = o((x - x_0)^n)$ , называется *формулой Тейлора с остаточным членом в форме Пеано*.

Поскольку остаточный член при  $x \rightarrow x_0$  является бесконечно малой величиной, то можно считать, что разность  $f(x) - P_n(x)$  бесконечно мала, т.е.

$$f(x) \rightarrow P_n(x).$$

2) Остаточный член в *форме Лагранжа*. Запишем остаточный член в виде

$$R_n(x) = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} Q(x), \text{ где } Q(x) \text{ есть некоторая функция, подлежащая}$$

определению. Можно доказать, что  $Q(x) = f^{(n+1)}(\xi)$ , где точка  $\xi$  заключена между  $x$  и  $x_0$ :  $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$ ,  $0 < \theta < 1$ , т.е. остаточный член имеет вид:

$$R_n(x) = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi). \text{ Тогда формула Тейлора примет вид}$$

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi), \text{ который}$$

называется *формулой Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа*.

Рассмотрим частные случаи формулы Тейлора.

– Если в формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа положить  $n = 0$ , то получаем *формулу конечного приращения*:

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(\xi) \text{ (теорема Лагранжа)}.$$

– Если в формуле Тейлора положить  $x_0 = 0$ , то получим формулу, которую называют *формулой Маклорена*:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n + R_n(x),$$

где остаточный член можно записать в форме Пеано:  $R_n(x) = o(x^n)$  или в форме Лагранжа:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

Формула Маклорена является разложением функции  $f(x)$  в виде многочлена по степеням  $x$ .

**Пример 5.** Разложить функцию  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  в виде многочлена третьего

порядка по степеням  $(x - 2)$  с остаточным членом в форме Лагранжа.

*Решение.* Запишем формулу Тейлора для функции  $f(x)$  в точке  $x_0 = 2$  в виде многочлена 3-го порядка с остаточным членом в форме Лагранжа

$$f(x) = f(2) + \frac{f'(2)}{1!} \cdot (x-2) + \frac{f''(2)}{2!} \cdot (x-2)^2 + \frac{f'''(2)}{3!} \cdot (x-2)^3 + R_3(x),$$

$$\text{где } R_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} \cdot (x-2)^4.$$

Находим производные нужного порядка в точке  $x = 2$ :

$$f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad f(2) = \frac{1}{4}; \quad f'(x) = -\frac{2}{x^3}, \quad f'(2) = -\frac{2}{8} = -\frac{1}{4};$$

$$f''(x) = \frac{6}{x^4}, \quad f''(2) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}; \quad f'''(x) = -\frac{24}{x^5}, \quad f'''(2) = -\frac{24}{32} = -\frac{3}{4}; \quad f^{(4)}(x) = \frac{120}{x^6},$$

$$f^{(4)}(\xi) = \frac{120}{\xi^6}, \quad \text{где } \xi = 2 + \theta(x-2), \quad \theta \in (0;1).$$

Полученные данные подставляем в формулу Тейлора

$$f(x) = \frac{1}{4} + \left(-\frac{1}{4}\right)(x-2) + \frac{3}{16}(x-2)^2 + \left(-\frac{1}{8}\right)(x-2)^3 + R_3(x) \text{ и вычисляем}$$

$$R_3(x) = \frac{(x-2)^4}{4!} \cdot \frac{120}{\xi^6} = \frac{5 \cdot (x-2)^4}{(2+\theta(x-2))^6}, \quad \theta \in (0;1).$$

Можно сказать, что функция  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  заменяется многочленом с точностью, которую можно определить, оценив остаточный член формулы Тейлора

$$R_3(x) = \frac{(x-2)^4}{4!} \cdot \frac{120}{\xi^6} \text{ при } x \rightarrow 2.$$



## Лекция 5. Ряды Тейлора и Маклорена

### 5.1. Ряды Тейлора и Маклорена. Условия сходимости рядов Тейлора к исходной функции

Пусть функция  $y = f(x)$  определена в некоторой окрестности точки  $x_0$ :

$U_R(x_0) = (x_0 - R, x_0 + R)$ ,  $R > 0$  и имеет производные любого порядка,

тогда для этой функции формально можно составить ряд по степеням  $(x - x_0)$ :

$$f(x) \sim c_0 + c_1(x - x_0) + \dots + c_n(x - x_0)^n + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k,$$

где  $c_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$ .

**Определение 1.** Обобщённый степенной ряд вида  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$

называется *рядом Тейлора* для функции  $f(x)$  по степеням  $(x - x_0)$ . Если

положить  $x_0 = 0$ , то получим ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k$ , который носит название

*ряда Маклорена* для функции  $f(x)$  по степеням  $x$ .

**Задача.** Пусть задана функция  $f(x)$ , бесконечно дифференцируемая в окрестности точки  $x_0$ :  $(x_0 - R, x_0 + R)$ , и пусть для этой функции составлен ряд

Тейлора по степеням  $(x - x_0)$ :  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$  и его сумма равна  $S(x)$ .

Если интервал  $(x_0 - R, x_0 + R)$ ,  $R > 0$  является интервалом сходимости данного ряда с радиусом сходимости  $R$ , то можно записать равенство:

$$S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

при всех  $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ .

Выясним, при каких условиях такой степенной ряд имеет своей суммой функцию  $f(x)$ , т.е. когда  $f(x) = S(x)$ , поскольку существуют функции, для которых сумма ряда Тейлора не совпадает с данной функцией.

Рассмотрим пример. Дана функция  $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ , которая является

бесконечно дифференцируемой  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Вычислим производные этой функции в точке  $x = 0$ :

$$a_0 = f(0) = 0; a_1 = f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{x^2}} \left( \frac{2}{x^3} \right) = 0; \dots; a_n = f^{(n)}(0); a_{n+1} = f^{(n+1)}(0) = 0; \dots$$

Таким образом, все вычисленные коэффициенты ряда Тейлора–Маклорена для данной функции равны 0, поэтому этот ряд сходится на всей оси, его сумма тождественно равна 0:  $S(x) \equiv 0$ , однако  $f(x) \neq 0$  при  $x \neq 0$  ( $f(x) = 0$  только в начале координат).

Пусть ряд Тейлора  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$  имеет интервал сходимости

$(x_0 - R, x_0 + R)$ , где  $R$  – радиус сходимости. Тогда, если

$S_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$  – частичная сумма этого ряда, то для любого

$x \in (x_0 - R, x_0 + R)$  существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = S(x)$ . Рассмотрим теорему, которая

даёт условия того, что  $f(x) = S(x)$ .

**Теорема 1 (необходимый и достаточный признак сходимости ряда Тейлора**

**к функции  $f(x)$ ). Для того чтобы ряд Тейлора  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k = S(x)$ ,**

$\forall x \in U_R(x_0) = (x_0 - R, x_0 + R)$ , имел своей суммой функцию  $f(x)$ , т.е.

$f(x) = S(x)$ , необходимо и достаточно, чтобы

для всех  $x \in U_R(x_0)$  существовал предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ , где  $R_n(x)$  – остаток ряда Тейлора.

*Доказательство. 1) Необходимость.* Пусть функция  $f(x)$  есть сумма ряда

Тейлора на указанном промежутке:  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$ , или

$f(x) = S_n(x) + R_n(x)$ , где  $S_n(x)$  – частичная сумма ряда Тейлора,  $R_n(x)$  –

остаток ряда Тейлора. Из условия сходимости ряда  $\forall x \in U_R(x_0) = (x_0 - R, x_0 + R)$

существует предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = S(x)$ , и так как  $S(x) = f(x)$ , то существует

предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f(x) - S_n(x)) = f(x) - \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = f(x) - S(x) = 0,$$

т.е.  $R_n(x) \rightarrow 0 \quad \forall x \in U_R(x_0)$ . Необходимость доказана.

2) *Достаточность.* Пусть существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ . Так как функция  $f(x)$

бесконечно дифференцируема при всех  $x \in U_R(x_0)$ , то для неё имеет место

формула Тейлора  $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_n(x)$  для всех

$x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ , где  $R_n(x)$  – остаточный член формулы Тейлора, который

совпадает с остатком ряда Тейлора. Тогда частичная сумма соответствующего ряда Тейлора имеет вид:

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k = f(x) - R_n(x).$$

Рассмотрим предел  $S_n(x)$ , который обозначим через  $S(x)$ , учитывая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0: S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f(x) - R_n(x)) = f(x), \text{ т.е. } S(x) = f(x).$$

Достаточность доказана.

*Замечание.* Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) \neq 0$ , то сумма ряда Тейлора может не совпадать

с данной функцией, т.е.  $S(x) \neq f(x)$ , хотя сам ряд может сходиться к другой функции.

Необходимое и достаточное условие сходимости ряда Тейлора к исходной функции неудобно для проверки на практике конкретных рядов; существуют более простые, хотя и более жёсткие, достаточные условия разложения функции  $f(x)$  в ряды Тейлора–Маклорена. Сначала сформулируем лемму.

**Лемма.** Для любого  $x \in \mathbb{R}$  существует следующий предел:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0$ .

*Доказательство.* Рассмотрим степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots, \text{ общий член которого } u_n(x) = \frac{x^n}{n!}. \text{ Найдём}$$

радиус и область сходимости этого ряда, используя признак

Даламбера. Вычисляем предел, учитывая, что  $u_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1} \cdot n!}{(n+1) \cdot x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{|x|}{n+1} \right) = 0,$$

т.е. радиус сходимости ряда  $R = \infty$ . Следовательно, рассмотренный ряд сходится для всех  $x \in \mathbb{R}$ , тогда по необходимому признаку сходимости общий член ряда  $u_n(x) = \frac{x^n}{n!} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ , т.е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0$  для любого  $x \in \mathbb{R}$ .

**Теорема 2 (достаточные условия разложимости функции  $f(x)$  в ряд Маклорена).** Пусть функция  $f(x)$  определена и бесконечно дифференцируема на интервале  $(-a; a)$ ,  $a > 0$ . Если существует такое число  $M > 0$ , что для каждого натурального  $n \in \mathbb{N}$  и всех  $x \in (-a; a)$  выполняется неравенство:

$|f^{(n)}(x)| \leq M$  (это означает, что производные любого порядка ограничены одним и тем же числом), тогда остаток ряда Маклорена

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0) \cdot x^k}{k!} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty, \text{ а значит,}$$

$$f(x) = S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k \quad \forall x \in (-a; a).$$

**Доказательство.** Покажем, что остаток ряда Маклорена стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$ . Запишем для функции  $f(x)$  формулу Маклорена с остаточным членом

в форме Лагранжа:  $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k + R_n(x)$ , где  $\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k = P_n(x)$  –

многочлен Маклорена, а  $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}$ . Отметим, что частичная сумма

ряда Маклорена  $S_n(x)$  совпадает с многочленом Маклорена  $P_n(x)$ , а остаток ряда есть  $R_n(x)$ . Выполним его оценку, используя условия теоремы 2 и

учитывая, что  $|f^{(n)}(x)| \leq M$  для всех  $x \in (-a; a)$ :

$$|R_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi) \cdot x^{n+1}}{(n+1)!} \right| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} |f^{(n+1)}(\xi)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot M.$$

По лемме  $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , тогда  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0, \forall x \in (-a; a)$ .

Следовательно, по теореме 1 о необходимом и достаточном признаке

сходимости ряда Тейлора к исходной функции получаем  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k$ .

Теорема доказана.

## 5.2. Разложение основных элементарных функций в степенные ряды

Используем изложенную выше теорию для разложения основных элементарных функций в степенные ряды. Для разложения функции  $f(x)$

в степенной ряд по степеням  $(x - x_0)$  можно рекомендовать следующий порядок действий:

1) Находим производные функции  $f(x)$  в точке  $x = x_0$ :  
 $f^{(n)}(x_0), \forall n \in \mathbb{N}$ .

2) Составляем ряд Тейлора  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$ .

3) Находим интервал сходимости данного ряда:  $(x_0 - R, x_0 + R)$ , где  $R$  — радиус сходимости.

4) Исследуем поведение остатка ряда  $R_n(x)$  для всех  
 $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ .

Если окажется, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ , то на основании теорем 1 и 2 делаем вывод,

что  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$  при всех  $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ .

В результате получаем формулу разложения функции в степенной ряд.

- Разложение в степенной ряд функции  $f(x) = \frac{1}{1-x}$  имеет вид:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad x \in (-1; 1) \quad (1)$$

*Вывод.* Рассмотрим ряд геометрической прогрессии  $1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots$ , знаменатель которой  $q = x$  и  $b_1 = 1$ . Можно показать, что интервал сходимости этого ряда  $(-1; 1)$ ,  $R = 1$  и сумма этого ряда  $S(x) = \frac{1}{1-x}$  (сумма ряда бесконечно убывающей геометрической прогрессии вычисляется по формуле  $S(x) = \frac{b_1}{1-q}$ ). Оценим остаток ряда:

$$R_n(x) = x^{n+1} + x^{n+2} + \dots = x^{n+1}(1 + x + x^2 + \dots) = \frac{x^{n+1}}{1-x}.$$

При  $x \in (-1; 1)$   $R_n(x) \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$ , тогда на основании теоремы 1

рассмотренный ряд имеет своей суммой функцию  $f(x) = \frac{1}{1-x}$ .

Разложение (1) имеет место.

- Разложение в степенной ряд функции  $f(x) = e^x$  имеет вид:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R} \quad (2)$$

*Вывод.* Для данной функции  $f(x) = e^x$  запишем ряд Маклорена:  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ .

Так как функция  $f(x)$  – бесконечно дифференцируема, то все производные существуют и равны  $f'(x) = f''(x) = \dots = f^{(n)}(x) = e^x$ ,

$\forall n \in \mathbb{N}$ .

Находим эти производные в точке  $x=0$ ; получаем  $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$  для всех  $n \in \mathbb{N}$ , тогда ряд Маклорена приобретает вид:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

Этот ряд сходится для всех  $x \in \mathbb{R}$ . Покажем, что сумма этого ряда равна  $f(x) = e^x$ . Фиксируем некоторое число  $a \in \mathbb{R}$  и рассмотрим некоторый отрезок  $[-a; a]$ , на котором  $|f^{(n)}(x)| = |e^x| \leq e^a = M$  для любого  $n \in \mathbb{N}$ . В этом случае по теореме 2 данный ряд Маклорена будет сходиться на указанном отрезке к исходной функции  $f(x) = e^x$ . Отметим, что это верно для любого фиксированного числа  $a \in \mathbb{R}$ . Разложение (2) имеет место при всех  $x \in \mathbb{R}$ .

- Разложение в степенной ряд функции  $f(x) = \sin x$  имеет вид:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!}, \quad x \in \mathbb{R} \quad (3)$$

**Вывод.** Для функции  $f(x) = \sin x$  запишем ряд Маклорена  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ .

Находим все производные:  $f(x) = \sin x$ ,  $f'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ ,

$$f''(x) = \sin\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x, \quad f'''(x) = \sin\left(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x, \quad \dots,$$

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right). \quad \text{Вычисляем эти производные в точке } x = 0:$$

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 0, \quad f'''(0) = -1, \quad \dots, \quad f^{(n)}(0) = \sin n \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Подставив эти значения в ряд Маклорена, получаем ряд:



$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!}.$$

Данный ряд сходится при любом  $x \in (-\infty, +\infty)$ ; покажем, что он сходится к функции  $f(x) = \sin x$ . Согласно теореме 2 (поскольку

$$\left| f^{(n)}(x) \right| = \left| \sin \left( x + n \cdot \frac{\pi}{2} \right) \right| \leq 1 = M, \text{ т.е. все производные ограничены одним и тем}$$

же числом) данный ряд Маклорена будет сходиться к исходной функции

$f(x) = \sin x$  при всех  $x \in \mathbb{R}$ . Таким образом разложение (3) имеет место.

- Разложение в степенной ряд функции  $f(x) = \cos x$  имеет вид:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R} \quad (4)$$

**Вывод.** Рассмотрим разложение (3)

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!}, \quad x \in \mathbb{R}. \text{ Продифференцируем}$$

данный степенной ряд; получившийся новый ряд будет также сходиться при всех  $x \in \mathbb{R}$  к функции, которая равна производной от  $\sin x$  (свойство 3, лекция 4, разд. 4.3), т.е.

$$f(x) = (\sin x)' = \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

Таким образом, разложение (4) имеет место.

- Разложение в степенной ряд функции  $f(x) = (1+x)^m$  имеет вид:

$$\begin{aligned} (1+x)^m &= 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \dots = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{n!} x^n, \quad |x| < 1 \end{aligned} \quad (5)$$

Разложение (5) приводится без вывода. Отметим, что оно верно при фиксированном  $m \in \mathbb{R}$  и называется *биномиальным рядом*.

При натуральном  $m \in \mathbb{N}$  этот ряд представляет собой конечную сумму, известную как *бином Ньютона*:

$$(1+x)^m = 1 + C_m^1 x + C_m^2 x^2 + \dots + C_m^m x^m, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Для нецелых  $m$  имеет место формула Тейлора:

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{n!} x^n + R_n(x).$$

При  $n \rightarrow \infty$  из этой формулы получаем бесконечный степенной ряд (5). Найдём радиус его сходимости, применяя признак Даламбера. Учитывая, что

$$u_{n+1} = \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n)}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}, \quad u_n = \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{n!} x^n, \quad \text{вычисляем}$$

предел:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n) n! x^{n+1}}{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1) (n+1)! x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{m-n}{n+1} \cdot x \right| = |x|,$$

тогда при  $|x| < 1$  ряд сходится и его радиус сходимости  $R=1$ , а интервал сходимости  $(-1;1)$ ; можно показать, что  $\forall x \in (-1;1), \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ .

Итак, разложение (5) верно для всех  $\forall x \in (-1;1)$ . В частном случае, когда  $m = -1$ , из разложения (5) получаем ряд :

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot x^{n-1},$$

который при  $|x| < 1$  абсолютно сходится. Если в каждом члене ряда заменить  $x$  на  $(-x)$ , то получим разложение (1):

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}, \quad x \in (-1; 1).$$

- Разложение в степенной ряд функции  $f(x) = \ln(1+x)$  имеет вид:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n}, \quad x \in (-1; 1] \quad (6)$$

*Вывод.* Из разложения (5) биномиального ряда при  $m = -1$  получаем ряд геометрической прогрессии со знаменателем  $q = -x$ :

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot x^{n-1},$$

который сходится при  $|x| < 1$ , т.е. этот ряд имеет интервал сходимости  $(-1; 1)$  с радиусом сходимости  $R = 1$ .

Полученный ряд почленно интегрируем на отрезке  $[0, x] \subset (-1; 1)$ , используя свойство 3 (лекция 4, разд. 4.3); при этом интервал сходимости сохранится:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x (-1)^{n-1} \cdot t^{n-1} dt = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{t^n}{n} \Big|_0^x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots = S(x).$$

Сумма полученного ряда равна

$$S(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \ln|1+t| \Big|_0^x = \ln|1+x|$$

(или  $\ln(1+x)$ , так как  $|x| < 1$ ).

Таким образом,  $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$ , т.е. имеет место разложение

(6) при  $x \in (-1; 1)$ . Исследуя сходимость данного ряда в точке  $x = 1$ , получаем

числовой ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ , который условно сходится. Таким образом, область сходимости ряда в разложении (6) имеет вид  $(-1; 1]$ , а радиус сходимости  $R = 1$ .

- Разложение в степенной ряд функции  $f(x) = \operatorname{arctg} x$  имеет вид:

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{2n-1}, \quad |x| \leq 1 \quad (7)$$

*Вывод.* Из разложения (5) биномиального ряда при  $m = -1$  получаем разложение

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot x^{n-1},$$

из которого заменой  $x$  на  $x^2$  вытекает следующий ряд:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot x^{2n-2},$$

сходящийся при  $|x^2| < 1$ , а именно, при  $|x| < 1$ . Полученный ряд почленно интегрируем на отрезке  $[0, x] \subset (-1; 1)$ , используя свойство 3 (лекция 4, разд.

4.3); при этом интервал сходимости сохранится, обозначим  $\frac{x^{2n-1}}{2n-1} = t$ :

$$\begin{aligned} \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot t^{2n-2} dt &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \int_0^x t^{2n-2} dt = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{2n-1} = \\ &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots = S(x). \end{aligned}$$

Сумма полученного ряда

$$S(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} t \Big|_0^x = \operatorname{arctg} x.$$

Таким образом,  $\operatorname{arctg} x = S(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$ , т.е. разложение (7)

имеет место при  $|x| < 1$ . Исследуя разложение (7) в точках  $x = -1$  и  $x = 1$ ,

получаем два условно сходящихся числовых ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{2n-1}$  и

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{2n-1}$  соответственно. Таким образом, область сходимости ряда (7)

является отрезком  $[-1; 1]$ , а радиус сходимости  $R$  равен 1.

- Разложение в степенной ряд функции  $f(x) = \arcsin x$  имеет вид:

$$\arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad x \in (-1; 1) \quad (8)$$

*Вывод.* Из разложения (5) биномиального ряда при  $m = -\frac{1}{2}$  и при замене  $x$  на

$-x^2$  получаем разложение в степенной ряд:

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^4 + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)}x^{2n} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot x^{2n}.$$

Получившийся ряд сходится при  $|x| < 1$ . Этот ряд

почленно интегрируем на отрезке  $[0, x] \subset (-1; 1)$ , используя свойство 3

(лекция 4, разд. 4.3); при этом интервал сходимости сохранится:

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{t^{2n+1}}{2n+1} \Big|_0^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \dots = S(x).$$

Сумма полученного ряда  $S(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin x$ . Таким образом,

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots,$$

т.е. имеет место разложение (8) на интервале сходимости  $x \in (-1;1)$ .

В заключение добавим, что все перечисленные в разделе 5.2 разложения называют *основными разложениями* элементарных функций в степенной ряд, которые используются как эталонные для разложения других функций.

### Задания по теме «Ряды»

Выражение вида

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} u_i,$$

где  $u_i$  члены ряда,  $u_n$  –  $n$ -й или общий член ряда, называется *бесконечным рядом*.

Если члены ряда:

- числа, то ряд называется *числовым*;
- числа одного знака, то ряд называется *знакопостоянным*;
- числа разных знаков, то ряд называется *знакопеременным*;
- положительные числа, то ряд называется *знакоположительным*;
- числа, знаки которых строго чередуются, то ряд называется *знакочередующимся*;
- функции, то ряд называется *функциональным*;

- степени  $x$ , то ряд называется *степенным*;
- тригонометрические функции, то ряд называется *тригонометрическим*.

## 1. Числовые ряды. Ряды с положительными членами

## 1.1. Основные понятия числового ряда

*Числовым рядом* называется сумма вида

$$\sum_{i=1}^{\infty} u_i = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots, (1)$$

где  $u_i$  называемые *членами ряда*, образуют бесконечную последовательность; член  $u_n$  называется *общим членом ряда*.

СҮММЫ:

[illegible]

составленные из первых членов ряда (1), называются *частичными суммами этого ряда*.

Каждому ряду можно сопоставить *последовательность частичных сумм*  $S_n\{S_n\}$ .

Если при бесконечном возрастании номера  $n$  частичная сумма ряда  $S_n$  стремится к пределу  $S$ , то ряд называется *сходящимся*, а число  $S$  – *суммой сходящегося ряда*, т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \text{ И } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n = S.$$

Эта запись равносильна записи

$$\sum_{i=1}^{\infty} u_i = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots.$$

Если частичная сумма ряда (1) при неограниченном возрастании  $n$  не имеет конечного предела (стремится к  $+\infty$  или  $-\infty$ ), то такой ряд называется *расходящимся*.

**Задание 1.** Найти общий член числового ряда:

1)  $\frac{1}{3} + \frac{2}{4} + \frac{3}{5} + \dots$

6)  $\frac{1}{4} + \frac{2}{5} + \frac{3}{6} + \dots$

2)  $\frac{2}{5} + \frac{4}{25} + \frac{6}{125} + \dots$

7)  $\frac{3}{2} + \frac{6}{4} + \frac{9}{8} + \dots$

3)  $\frac{1}{4} + \frac{3!}{16} + \frac{5!}{64} + \dots$

8)  $\frac{2}{4!} + \frac{4}{7!} + \frac{6}{10!} + \dots$

4)  $\frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{3}{8} + \dots$

9)  $\frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{4}{8} + \dots$

5)  $\frac{1}{4} + \frac{2}{6} + \frac{3}{8} + \dots$

10)  $\frac{1}{4} + \frac{3}{6} + \frac{9}{8} + \dots$

## 1.2 Необходимый признак сходимости ряда

Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  может сходиться только при условии, что его общий член при неограниченном увеличении номера  $n$  стремится к нулю:  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ . Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$ , то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  расходится – это достаточный признак расходимости ряда.

**Задание 2.** Проверить выполнение необходимого условия сходимости ряда:



$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{10n^3 + 1}$$

$$6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3n^2 + 8}$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)\ln^2(n+1)}$$

$$7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(12n+1)\ln^2(5n+1)}$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(4n+1)}{2n+1}$$

$$8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n-1}{2n+1}$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n^3 + 10}$$

$$9) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^5}{n^3 + 10}$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12n}{4n-1}$$

$$10) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n^2 - 1}$$

### 1.3. Достаточные признаки сходимости ряда с положительными членами.

#### ***Признаки сравнения рядов с положительными членами***

**1-й признак сравнения.** Пусть  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  – ряды с положительными

членами, причём  $a_n \leq b_n$  для всех номеров  $n$ , начиная с некоторого. Тогда:

1) если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  сходится, то сходится и ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ;

2) если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  расходится, то расходится и ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ .

**2-й признак сравнения.** Пусть  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  – ряды с положительными

членами, причём существует конечный и отличный от нуля предел

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ , тогда ряды  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  сходятся или расходятся

одновременно.

## Ряд Дирихле

Ряд  $1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots$ , где  $p > 0$ , называется *рядом Дирихле*. Этот ряд сходится при  $p > 1$  и расходится при  $0 < p \leq 1$ . Частным случаем ряда Дирихле (при  $p = 1$ ) является гармонический ряд  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$ .

**Задание 3.** Исследовать на сходимость по признакам сравнения:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n^2 - 1}$$

$$6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{4n^3 + n}$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n+1}$$

$$7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2n\sqrt{n}+1}$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n^2 - 1}$$

$$8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{4+10n}$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n+1001}$$

$$9) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+1}{4n^4+n}$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2n^2+1}$$

$$10) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{n\sqrt{n}+1}$$

**Признак Даламбера.** Если для ряда с положительными членами

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + u_{n+1} + \dots$  ( $u_n > 0$ ) выполняется условие

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$ , то ряд сходится при  $l < 1$  и расходится при  $l > 1$ .

Признак Даламбера не даёт решения, если  $l = 1$ . В этом случае для исследования ряда применяются другие признаки.

**Задание 3.** Исследовать на сходимость по признаку Даламбера:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n+1}$$

$$6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}{3^n n!}$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$$

$$7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{\sqrt{n} 2^n}$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(n+1)!}$$

$$8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{(2n+1)!}$$

$$9) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n}{3^n}$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}{4^n n!}$$

$$10) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n n}$$

**Интегральный признак Коши.** Пусть функция  $f(x)$  при  $x \geq 1$  удовлетворяет условиям:

- 1) непрерывна,
- 2) положительна,
- 3) монотонно убывает.

Тогда числовой ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ , где  $u_n = f(n), n \geq 1$  сходится или расходится

одновременно со сходимостью или расходимостью интеграла  $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ .

**Задание 4.** Исследовать на сходимость по интегральному признаку Коши следующие ряды:

$$1) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$$

$$6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^2 + 4}$$

$$2) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$$

$$7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

$$3) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$$

$$8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{\ln(n+1)}}$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 4}$$

$$9) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln^2 n}{n}$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 9}$$

$$10) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)}$$

## 2. Знакопеременные ряды

### 2.1. Понятие знакопеременного ряда

Числовой ряд  $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$

называется *знакопеременным*, если среди его членов имеются как положительные, так и отрицательные числа. Числовой ряд называется *знакопеременяющимся*, если любые два стоящие рядом члена имеют противоположные знаки:

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + (-1)^{n+1} \cdot u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot u_n ,$$

где  $u_n > 0$  для всех  $n \in N$ , т.е. ряд, положительные и отрицательные члены которого следуют друг за другом поочередно. Например,

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots,$$

$$\frac{1}{1} - \frac{2}{3} + \frac{3}{5} - \frac{4}{7} + \dots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{n}{2n-1} + \dots,$$

$$\frac{1}{2} - \frac{2}{4} + \frac{3}{8} - \frac{4}{16} + \dots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{n}{2n} + \dots$$

Для знакочередующихся рядов имеет место достаточный признак сходимости – признак Лейбница.

## 2.2. Признак Лейбница. Абсолютная и условная сходимость ряда

**Теорема (признак Лейбница).** Знакочередующийся ряд сходится, если:

1) последовательность абсолютных величин членов ряда монотонно убывает, т.е.  $u_1 > u_2 > \dots > u_n \dots$ .

2) общий член ряда стремится к нулю:  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ . При этом сумма  $S$  ряда удовлетворяет неравенствам  $0 < S < u_1$ .

Пусть дан знакопеременный ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , где  $a_n$  – произвольные числа (действительные или комплексные). Если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ , составленный из абсолютных величин его членов, сходится, то данный ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  также сходится. В этом случае знакопеременный

ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  называется *абсолютно сходящимся*. Следовательно,

если же знакопеременный ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится, а ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$

расходится, то данный ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  называется *условно сходящимся*.

**Пример 1.** Исследовать на сходимость ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2\sqrt{n}-1}$

**Решение.** 1. Исследуем на сходимость ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  из абсолютных величин членов данного ряда:  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}-1}$ . Сравним этот ряд с рядом  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}}$ . Так как  $2\sqrt{n}-1 < 2\sqrt{n}$ , то  $\frac{1}{2\sqrt{n}-1} > \frac{1}{2\sqrt{n}}$  для всех  $n$ . Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}}$  расходится, так как расходится ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$  (как ряд Дирихле  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  при  $p = \frac{1}{2} < 1$ ). Значит, по 1-му признаку сравнения расходится и ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}-1}$ .

Итак, исходный ряд не является абсолютно сходящимся.

2. Выясним, сходится ли данный знакочередующийся ряд, применяя признак Лейбница.

- Проверим, выполняется ли неравенство  $a_n > a_{n+1}$  для абсолютных величин членов данного ряда:

$$a_n = \frac{1}{2\sqrt{n}-1} > \frac{1}{2\sqrt{n+1}-1} = a_{n+1}.$$

Данное неравенство эквивалентно неравенству  $2\sqrt{n}-1 < 2\sqrt{n+1}-1$ , которое верно для любого  $n=1, 2, \dots$ . Значит  $a_n > a_{n+1}$  для все номеров  $n=1, 2, \dots$

- Найдём предел общего члена ряда:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\sqrt{n}+1} = 0$ .

Таким образом, для данного знакочередующегося ряда выполнены оба условия, содержащиеся в признаке Лейбница, откуда следует, что исходный ряд сходится, однако он не является абсолютно сходящимся, поэтому данный ряд сходится

условно. *Ответ:* ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2\sqrt{n}-1}$  сходится условно.

**Задание 6.** Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряды:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n}$$

$$6) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln^2 n}$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2 + 1}$$

$$7) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n}{n!}$$

$$3) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n}$$

$$8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)}$$

$$4) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}$$

$$9) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n+1}$$

$$5) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 \ln n}$$

$$10) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n\sqrt{n}+1}$$

### 3. Функциональные ряды

#### 3.1. Понятие функционального ряда

Ряд, членами которого являются функции от  $x$ , называется *функциональным*:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x_1) + u_2(x_2) + \dots + u_n(x_n) + \dots$$

Придавая  $x$  определенное

значение  $x_0$ , получим числовой ряд

$u_1(x_0) + u_2(x_0) + \dots + u_n(x_0) + \dots$ , который может быть как сходящимся, так и расходящимся. Если полученный числовой ряд сходится, то точка  $x_0$  называется *точкой сходимости* функционального ряда; если же ряд расходится – *точкой расходимости* функционального ряда. Совокупность числовых значений аргумента, при которых функциональный ряд сходится, называется его *областью сходимости*. В области сходимости функционального ряда его сумма является некоторой функцией от  $x$ :  $S = S(x)$ . Определяется она в области сходимости равенством  $S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x)$ , где  $S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x)$  – частичная сумма ряда.

### 3.2. Степенные ряды

*Степенным рядом* называется ряд вида:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

*Областью сходимости* степенного ряда называется множество всех значений  $x$ , при которых данный ряд сходится.

Число  $R$  называется *радиусом сходимости* степенного ряда, если при  $|x| < R$  ряд сходится и притом абсолютно, а при  $|x| > R$  ряд расходится. Радиус сходимости найдем, используя признак Даламбера:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1, \quad |x| < \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|,$$



т.е. если степенной ряд сходится при любых  $x$ , удовлетворяющих данному условию и расходится при  $|x| < \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ . Отсюда следует, что если существует предел  $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$  ( $a_n \neq 0, n = 1, 2, 3, \dots$ ), то радиус сходимости ряда  $R$  равен этому пределу и степенной ряд сходится при  $|x| < R$ , т.е. в промежутке  $(-R, R)$ , который называется *промежутком (интервалом) сходимости*.

Если  $R = 0$ , то степенной ряд сходится в единственной точке  $x = 0$ . На концах промежутка ряд может сходиться (абсолютно или условно), но может и расходиться.

Сходимость степенного ряда при  $x = R$  и  $x = -R$  исследуется с помощью какого-либо из признаков сходимости.

**Пример 2.** Найти область сходимости ряда. *Решение.* Найдём радиус сходимости ряда:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n 2^{n-1}}$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n \cdot 2^{n-1}} : \frac{1}{(n+1) \cdot 2^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \cdot 2^n}{n \cdot 2^{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \cdot 2^n \cdot 2}{n \cdot 2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot (n+1)}{n} = 2.$$

Следовательно, ряд сходится при  $-2 < x+1 < 2$ , т.е. при  $-3 < x < 1$ . При  $x = -3$  имеем ряд  $2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ , который сходится по признаку Лейбница.

При  $x=1$  имеем расходящийся ряд:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n \cdot 2^{n-1}} = 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ . *Ответ:*

областью сходимости исходного ряда является промежуток  $[-3, 1)$

**Задание 7.** Найти область сходимости степенного ряда:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n 2^n}$$

$$6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{3^n n \sqrt{n}}$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n 3^n}{n}$$

$$7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n n}{4^n}$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n 2^n}{n^2}$$

$$8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+1)^n}{3^n}$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n (n+1)}{4^n n}$$

$$9) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^{2n}}{3^n}$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{2^n \sqrt{n}}$$

$$10) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^{2n+1}}{4^n n}$$

**Ответы:**

*Задание 1.* 1)  $\frac{n}{n+2}$ , 2)  $\frac{2n}{5^n}$ , 3)  $\frac{(2n-1)!}{4^n}$ , 4), 5)  $\frac{n}{2n+2}$ , 6)  $\frac{n}{n+3}$ , 7)  $\frac{3n}{2^n}$ ,

8)  $\frac{2n}{(3n+1)!}$ , 9)  $\frac{2^{n+1}}{3n-1}$ , 10)  $\frac{3^{n-1}}{2n+2}$ .

*Задание 2.* 1) да, 2) да, 3) да, 4) нет, 5) нет, 6) да, 7) да, 8) нет, 9) нет, 10) да.

*Задание 3.* 1) сходится, 2) расходится, 3) расходится, 4) расходится, 5) сходится, 6) сходится, 7) расходится, 8) расходится, 9) сходится, 10) сходится.

*Задание 4.* 1) расходится, 2) сходится, 3) сходится, 4) сходится, 5) сходится, 6) сходится, 7) сходится, 8) расходится, 9) сходится, 10) расходится.

*Задание 5.* 1) расходится, 2) сходится, 3) сходится, 4) расходится, 5)

сходится, 6) расходится, 7) сходится, 8) расходится, 9) расходится, 10) расходится.

**Задание 6.** 1) абсолютно сходится, 2) условно сходится, 3) условно сходится, 4) условно сходится, 5) абсолютно сходится, 6) абсолютно сходится, 7) абсолютно сходится, 8) абсолютно сходится, 9) условно сходится, 10) условно сходится.

**Задание 7.** 1)  $(-2; 2]$ , 2)  $\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right]$ , 3)  $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ , 4)  $(-4; 4)$ , 5)  $[-3; 1)$ , 6)  $[-1; 5]$ , 7)  $(-6; 2)$ , 8)  $(-2; 1)$ , 9)  $(-\sqrt{3}-1; \sqrt{3}-1)$ , 10)  $(0; 4)$ .

### ***Практическая работа № 11***

**Тема:** Комплексные числа и действия с ними.

**Цель:** сформировать умение выполнять арифметические действия с комплексными числами.

#### **Методические указания для практической работы**

#### **Теоретические сведения к практической работе**

##### ***1. Понятие комплексного числа***

*Комплексными числами* называются числа вида

$$z = x + iy, \quad (1.1)$$

где  $x, y$  – действительные (вещественные) числа, а число  $i$  определяется равенством  $i^2 = -1$  ( $i = \sqrt{-1}$ ), называется мнимой единицей.

Число  $x$  называется *действительной (вещественной) частью* комплексного числа (используется обозначение  $x = \operatorname{Re} z$ );  $y$  – мнимой частью комплексного числа  $z$  ( $y = \operatorname{Im} z$ ).

Выражение (1.1) называют *алгебраической формой записи комплексного числа*.

Если  $x=0$ , то число  $z$  называют чисто мнимым; если  $y=0$ , то получается вещественное число  $z = x + 0i = x$ .

Два комплексных числа  $z = x + iy$  и  $\bar{z} = x - iy$  называются сопряженными. Используя формулу разности квадратов, получаем, что  $z\bar{z} = x^2 + y^2$ .

Можно доказать, что корнями квадратного уравнения с отрицательным дискриминантом являются два сопряженных комплексных числа.

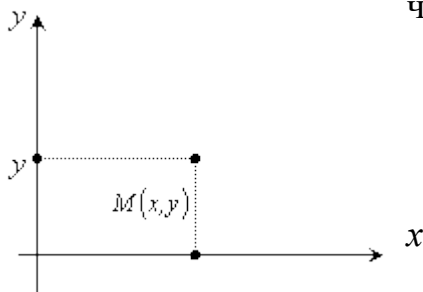
*Пример 1.* Решить уравнение  $x^2 - 6x + 18 = 0$ .

*Решение.* Дискриминант данного уравнения:  $D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 18 = 36 - 72 = -36$  меньше нуля, но теперь мы можем воспользоваться мнимой единицей:

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{36} \cdot \sqrt{-1}}{2} = \frac{6 \pm 6i}{2}, \text{ т.е. } x_1 = 3 + 3i; \quad x_2 = 3 - 3i.$$

Два комплексных числа  $z_1 = x_1 + iy_1$  и  $z_2 = x_2 + iy_2$  равны друг другу, если  $x_1 = x_2$  и  $y_1 = y_2$ ; комплексное число  $z$  считается равным нулю, если  $x = y = 0$ .

Всякое комплексное число можно изобразить на плоскости, т.к. каждому  $z$  соответствует упорядоченная пара вещественных чисел  $(x, y)$ :



Число  $z=0$  ставится в соответствие началу координатной плоскости. Такую плоскость мы в дальнейшем будем называть комплексной плоскостью, ось абсцисс—действительной, а ось ординат—мнимой осью комплексной плоскости.

Число  $\sqrt{x^2 + y^2}$  называется модулем комплексного числа  $z = x + iy$  и обозначается  $|z|$  или  $r: r = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

## 2. Тригонометрическая форма комплексного числа

*Тригонометрическая форма комплексного числа.* Каждому комплексному числу вида (1.1) можно поставить в соответствие точку  $M(x; y)$  на декартовой

плоскости (при этом на оси  $Ox$  располагаются вещественные числа  $z = x + i0 = x$ , а на оси  $OY$  – чисто мнимые числа  $z = 0 + iy = iy$ ).

Модулем комплексного числа назовем длину отрезка  $|OM|$  (или расстояние от начала координат до точки  $M$ ), т.е.  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Аргументом комплексного числа ( $\varphi = \text{Arg} z$ ) назовем угол, который вектор  $\overline{OM}$  образует с положительным направлением оси  $Ox$ . Главное значение аргумента, которое, как правило, используется при осуществлении действий с комплексными числами, удовлетворяет условию  $0 \leq \varphi < 2\pi$ .

При этом выражение вида

$$z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad (1.2)$$

называется *тригонометрической формой записи комплексного числа*.

Преобразуем (1.1)

$$z = x + iy = \sqrt{x^2 + y^2} \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + i \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = |z| \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + i \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$$

и, сравнивая с (1.2), получаем, что  $\varphi$ –аргумент комплексного числа можно найти, решив систему

$$\begin{cases} \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \cos \varphi = \frac{x}{|z|} \\ \sin \varphi = \frac{y}{|z|} \end{cases} \quad (1.3)$$

Заметим, что при выборе значений  $\varphi$  из последнего уравнения необходимо учитывать знаки  $x$  и  $y$ .

$\varphi$ –аргумент комплексного числа можно найти формул  $\cos \varphi = \frac{x}{r}$ ,  $\sin \varphi = \frac{y}{r}$

$$(1.3) \text{ или в силу того, что } \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \left( \frac{y}{x} \right).$$

*Пример 2.* Записать комплексное число в тригонометрической форме:

а)  $6i$ ; б)  $1 - i\sqrt{3}$ , указать модуль и аргумент комплексного числа.

*Решение.* а) Здесь  $x=0$ ,  $y=6$   $|z| = 6$ .

Поскольку число  $6i$  лежит на положительной полуоси  $Oy$ , то значение аргумента  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ , поэтому  $6i = 6(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})$ .

б) Здесь  $x=1$ ,  $y=-\sqrt{3}$ .

По определению  $|z| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$ . Для определения аргумента

воспользуемся формулой: 
$$\begin{cases} \cos \varphi = \frac{1}{2} \\ \sin \varphi = \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$
. Получаем, что  $\varphi = \arg z = \frac{5\pi}{3}$ .

Тригонометрическая форма заданного комплексного числа имеет вид:

$$z = 2 \left( \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right).$$

*Пример 3.* Записать в тригонометрической форме комплексное число

$$z = -1 + i\sqrt{3}.$$

*Решение.* Найдем модуль и аргумент комплексного числа:  $|z| = \sqrt{1+3} = 2$ .

Угол  $\varphi$  найдем из соотношений  $\cos \varphi = \frac{x}{r}$ ,  $\sin \varphi = \frac{y}{r}$ . Тогда получим

$\cos \varphi = \frac{-1}{2}$ ,  $\sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Очевидно, точка  $z = -1 + i\sqrt{3}$  находится во второй четверти:  $\varphi = 120^\circ = \frac{2}{3}\pi$ .

Подставляя в формулу (1.2) найденные  $r$  и  $\varphi$ , имеем  $z = 2 \left( \cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi \right)$ .

### 3. Действия над комплексными числами

1) **Сумма** двух комплексных чисел  $z_1 = x_1 + iy_1$  и  $z_2 = x_2 + iy_2$  определяется согласно формуле  $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$ .

2) **Операция вычитания** комплексных чисел определяется как операция, обратная сложению. Комплексное число  $z = z_1 - z_2$ , если  $z_2 + z = z_1$ , является разностью комплексных чисел  $z_1$  и  $z_2$ . Тогда  $z = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$ .

*Пример 4.* Выполнить действия: а)  $(4+2i)+(1+5i)$ ; б)  $(3+5i)-(6+3i)$ .

а) По правилу сложения комплексных чисел получим

$$(4+2i)+(1+5i)=(4+1)+(2+5)i=5+7i.$$

б) По правилу вычитания комплексных чисел получим

$$(3+5i)-(6+3i)=(3-6)+(5-3)i=-3+2i.$$

3) **Произведение** двух комплексных чисел  $z_1 = x_1 + iy_1$  и  $z_2 = x_2 + iy_2$  определяется по формуле  $z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1 x_2 + iy_1 x_2 + ix_1 y_2 + i^2 y_1 y_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$ . В частности  $z \cdot \bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$ .

Можно получить формулу умножения комплексных чисел в тригонометрической форме.

$$\text{Имеем } z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)].$$

*Пример 5.* Выполнить действия: а)  $2i \cdot 3i$ ; б)  $(2-3i) \cdot (2+3i)$ ; в)  $(5-4i) \cdot (3+2i)$ .

$$\text{а) } 2i \cdot 3i = 6i^2 = -6;$$

$$\text{б) } (2-3i) \cdot (2+3i) = 4 - 9i^2 = 4 + 9 = 13;$$

$$\text{в) } (5-4i) \cdot (3+2i) = (5 \cdot 3 - (-4) \cdot 2) + i(5 \cdot 2 + 3 \cdot (-4)) = 23 - 2i.$$

Можно выполнить умножение по правилу умножения многочленов:

$$(5-4i) \cdot (3+2i) = 15 + 10i - 12i + 8 = 23 - 2i.$$

4) **Деление** комплексных чисел определяется как операция, обратная

умножению, то есть число  $z = \frac{z_1}{z_2}$  называется частным от деления  $z_1$  на  $z_2$ , если

$$z_1 = z_2 \cdot z. \text{ Тогда } \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1 x_2 + iy_1 x_2 - ix_1 y_2 - i^2 y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(-x_1 y_2 + x_2 y_1)}{x_2^2 + y_2^2}.$$

$$\text{Окончательно } \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{-x_1 y_2 + x_2 y_1}{x_2^2 + y_2^2}.$$

В тригонометрической форме:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)].$$

Операция деления возможна только в случае, когда  $z_2 \neq 0 + i0 = 0$ .

*Пример 6.* Выполнить действия: а)  $\frac{2}{3i}$ ; б)  $\frac{1}{1+i}$ ; в)  $\frac{1+i}{1-i}$ ; д)  $\frac{2-7i}{3+4i}$

и указать вещественную и мнимую части полученного комплексного числа.

*Решение.*

а) Умножаем делимое и делитель на  $i$ , получим  $\frac{2}{3i} = \frac{2i}{3i \cdot i} = \frac{2i}{-3} = -\frac{2}{3}i$ .

б) Умножаем делимое и делитель на множитель, сопряженный делителю:  $\frac{1}{1+i} = \frac{1(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i}{1-i^2} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ .

в) Умножаем делимое и делитель на множитель, сопряженный делителю:  $\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+2i+i^2}{1-i^2} = \frac{2i}{2} = i$ .

г) Умножаем делимое и делитель на множитель, сопряженный делителю:  
 $z = \frac{2-7i}{3+4i} = \frac{(2-7i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \frac{6-8i-21i+28i^2}{9-16i^2} = \frac{6-29i-28}{9+16} = \frac{-22-29i}{25} = -\frac{22}{25} - \frac{29}{25}i$ ;

Вещественная и мнимая части равны:  $\operatorname{Re} z = -\frac{22}{25}$ ,  $\operatorname{Im} z = -\frac{29}{25}$ .

5) *Возведение в степень и извлечение корней.* Если комплексное число задано тригонометрической формой  $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ , то справедлива формула Муавра

$$z^n = |z|^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi). \quad (1.4)$$

б) Для извлечения корня  $n$ -й степени ( $n$  – целое число, большее 1) из комплексного числа, заданного в тригонометрической форме, применяется формула, дающая  $n$  значений этого корня:

$$z_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \left( \cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), \quad k=0, 1, \dots, n-1. \quad (1.5)$$

*Пример 7.* Вычислить:  $(-1+i)^{13}$ .

*Решение.* Чтобы воспользоваться формулой Муавра, необходимо представить комплексное число в тригонометрической форме.

Имеем:  $|z| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ ;  $\cos \varphi = -1/\sqrt{2}$  и  $\sin \varphi = 1/\sqrt{2}$ , т.е.  $\varphi = 3\pi/4$  (так как соответствующая точка лежит во второй четверти).

Следовательно,  $-1+i = \sqrt{2} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$  и

$(-1+i)^{13} = \sqrt{2}^{13} \left( \cos \frac{3 \cdot 13\pi}{4} + i \sin \frac{3 \cdot 13\pi}{4} \right)$  (в силу (1.4)). Учитывая, что

$\frac{39\pi}{4} = 10\pi - \frac{\pi}{4}$  и используя свойства тригонометрических функций, получаем:



$$(-1+i)^{13} = 64\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = 64\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 64 - 64i.$$

*Пример 8.* Возвести число  $z = \sqrt{3} - i$  в пятую степень.

*Решение.* Получим тригонометрическую форму записи числа  $z$ .

$$r = \sqrt{3+1} = 2, \quad \cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin \varphi = -\frac{1}{2}. \quad \text{Отсюда } \varphi = -\frac{\pi}{6}, \text{ а}$$

$$z = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]. \quad \text{Тогда по формуле Муавра получим:}$$

$$\begin{aligned} z^5 &= 2\left[\cos\left(-\frac{5}{6}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{5}{6}\pi\right)\right] = 2\left(\cos\frac{5}{6}\pi - i\sin\frac{5}{6}\pi\right) = \\ &= 2\left(-\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = -2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = -(\sqrt{3} + i). \end{aligned}$$

*Пример 9.* Вычислить:  $\sqrt[3]{-1}$ .

Тригонометрическая форма заданного числа имеет вид  $-1 = \cos\pi + i\sin\pi$  ( $|z|=1$ ), поэтому в силу (1.5)

$$z_k = \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{3}, \quad k=0,1,2.$$

Выписываем три искомых корня:

$$z_0 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$z_1 = \cos\frac{\pi + 2\pi}{3} + i\sin\frac{\pi + 2\pi}{3} = \cos\pi + i\sin\pi = -1;$$

$$z_2 = \cos\frac{\pi + 4\pi}{3} + i\sin\frac{\pi + 4\pi}{3} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

### 1. Мнимая единица. Алгебраическая форма комплексных чисел.

Неразрешимость уравнения  $x^2 + 1 = 0$  на множестве действительных чисел привела к введению так называемой **мнимой единицы**  $i$ , т.е. мнимого (придуманного) числа, обладающего свойством:  $i^2 = -1$ .

Тогда  $x^2 + 1 = 0$  имеет два решения:  $x_1 = i$ ,  $x_2 = -i$ .

Числа, вида  $bi$ , где  $b \in R$ ,  $i$  – мнимая единица, называют **мнимыми числами**.

Например,  $4i$ ,  $-3i$ ,  $0,45i$ ,  $\sqrt{2}i$ , и т.п.

Числа, вида  $a + bi$ , где  $a, b \in R$ ,  $i$  – мнимая единица, называют **комплексными числами**.

Например,  $5 + 4i$ ,  $7 - 3i$ ,  $25 + 45i$ ,  $-2 - \sqrt{3}i$ , и т.п.

Форма записи  $z = a + bi$  называется **алгебраической**.

$a$  – действительная часть:  $\text{Re}(z)$        $bi$  – мнимая часть:  $\text{Im}(z)$

Такая запись позволит записывать не только комплексные числа, но и *чисто мнимые* и *действительные*, например:

**Действительные числа**

$$b = 0$$

**Мнимые числа**

$$a = 0$$

$$5 + 0i = 5$$

$$0 + 4i = 4i$$

$$-\sqrt{5} + 0i = -\sqrt{5}$$

$$0 - 7,8i = -7,8i$$

Во множестве комплексных чисел нет понятий «больше», «меньше», «положительное», «отрицательное».

Числа  $z_1 = a_1 + b_1i$  и  $z_2 = a_2 + b_2i$  называются **равными**, если  $a_1 = a_2$  и  $b_1 = b_2$ .

Числа  $z = a + bi$  и  $-z = -a - bi$  называются **противоположными**.

Числа  $z = a + bi$  и  $\bar{z} = a - bi$  называются **сопряженными**.

### 1.1. Решение квадратных уравнений с отрицательным дискриминантом

Решением квадратного уравнения с отрицательным дискриминантом всегда будут два сопряженных комплексных числа.

Пример 1: решить квадратное уравнение  $x^2 + 4x + 29 = 0$ .

Решение.

Вычислим дискриминант

$$D = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 29 = 16 - 116 = -100 < 0.$$

Представляем отрицательное число как произведение  $(-1)$  и положительного числа и заменяем  $(-1)$  на  $i^2$ :

$$D = -100 = -1 \cdot 100 = i^2 \cdot 10^2.$$

$$\text{Найдем } \sqrt{D} = \sqrt{i^2 \cdot 10^2} = \sqrt{i^2} \cdot \sqrt{10^2} = i \cdot 10.$$

Находим корни уравнения:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-4 + i \cdot 10}{2} = \frac{-4}{2} + \frac{10i}{2} = -2 + 5i;$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-4 - i \cdot 10}{2} = \frac{-4}{2} - \frac{10i}{2} = -2 - 5i.$$

Ответ: два сопряженных комплексных числа:  $x_1 = -2 + 5i$  и  $x_2 = -2 - 5i$ .

### 1.2. Арифметические операции над комплексными числами в алгебраической форме

$$\text{Сумма } z_1 + z_2 = (a_1 + b_1i) + (a_2 + b_2i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$$

$$\text{Разность } z_1 - z_2 = (a_1 + b_1i) - (a_2 + b_2i) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$$

$$\text{Произведение } z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1i) \cdot (a_2 + b_2i) = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i$$

$$\text{Частное } \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}}$$

(числитель и знаменатель умножают на число, сопряженное знаменателю, чтобы избавиться от комплексного числа в знаменателе)

Рекомендуется для упрощения вычислений при делении, вывести формулу для умножения двух сопряжённых комплексных чисел:

$$z \cdot \bar{z} = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 - b^2 i^2 = a^2 - b^2 \cdot (-1) = a^2 + b^2$$

**Пример2.** Выполнить арифметические действия над комплексными числами  $z_1 = 4 + 5i$  и  $z_2 = 6 - 9i$ .

Решение.

- 1)  $z_1 + z_2 = (4 + 5i) + (6 - 9i) = 4 + 6 + 5i - 9i = 10 - 4i$ ;
- 2)  $z_1 - z_2 = (4 + 5i) - (6 - 9i) = 4 - 6 + 5i + 9i = -2 + 14i$ ;
- 3)  $z_1 \cdot z_2 = (4 + 5i) \cdot (6 - 9i) = 24 - 36i + 30i - 45i^2 = 24 - 6i - 45 \cdot (-1) = 69 - 6i$ ;
- 4)  $\frac{z_1}{z_2} = \frac{4 + 5i}{6 - 9i} = \frac{(4 + 5i) \cdot (6 + 9i)}{(6 - 9i)(6 + 9i)} = \frac{24 + 36i + 30i + 9i^2}{36 + 81} = \frac{15 + 66i}{117} = \frac{5 + 22i}{39} = \frac{5}{39} + \frac{22}{39}i$ .

Ответ.  $z_1 + z_2 = 10 - 4i$ ;  $z_1 - z_2 = -2 + 14i$ ;  $z_1 \cdot z_2 = 69 - 6i$ ;  $\frac{z_1}{z_2} = \frac{5}{39} + \frac{22}{39}i$

### 1.3. Натуральная степень мнимой единицы $i$

Найдем первые четыре степени  $i$ :

$$i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i, \quad i^4 = i^2 \cdot i^2 = -1 \cdot (-1) = 1$$

Учитывая, что  $i^4 = 1$ , найдем старшие степени:

$$i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i, \quad i^6 = i^4 \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1,$$

$$i^7 = i^4 \cdot i^3 = 1 \cdot (-i) = -i, \quad i^8 = i^4 \cdot i^4 = 1 \cdot 1 = 1$$

Очевидно, что все остальные степени  $i$  будут равны одному из предыдущих четырех значений.

**Что бы возвести  $i$  в натуральную степень, надо показатель степени разделить на 4, и возвести  $i$  в степень, равную остатку от деления.**

**Пример 3:** Найти  $i^{16}$ ,  $i^{11}$ ,  $i^{22}$ ,  $i^{37}$ .

Решение.

$$i^{16} = i^{4 \cdot 4 + 0} = i^0 = 1;$$

$$i^{11} = i^{4 \cdot 2 + 3} = i^3 = -i;$$

$$i^{22} = i^{4 \cdot 5 + 2} = i^2 = -1;$$

$$i^{37} = i^{4 \cdot 9 + 1} = i^1 = i.$$

Ответ.  $i^{16} = 1$ ,  $i^{11} = -i$ ,  $i^{22} = -1$ ,  $i^{37} = i$ .

## 2. Геометрическая интерпретация комплексных чисел

Плоскость называется **комплексной**, если каждому комплексному числу  $z = x + iy$  ставится в соответствие точки плоскости с координатами  $z(x, y)$ , причем, это соответствие взаимно-однозначное (рис. 1).

Ось  $OX$  называется **действительной** осью, т. к. на ней расположены точки, соответствующие числам, у которых  $y = 0$ .

Ось  $OY$  называется **мнимой** осью, т. к. на ней расположены точки, соответствующие числам, у которых  $x = 0$ .

Таким образом, любое комплексное число  $z = a + bi$  можно изобразить на плоскости точкой с координатами  $(a, b)$ , причем взаимно однозначно.

С каждой точкой  $z(x, y)$  комплексной плоскости связан *радиус-вектор* этой точки (рис. 1).

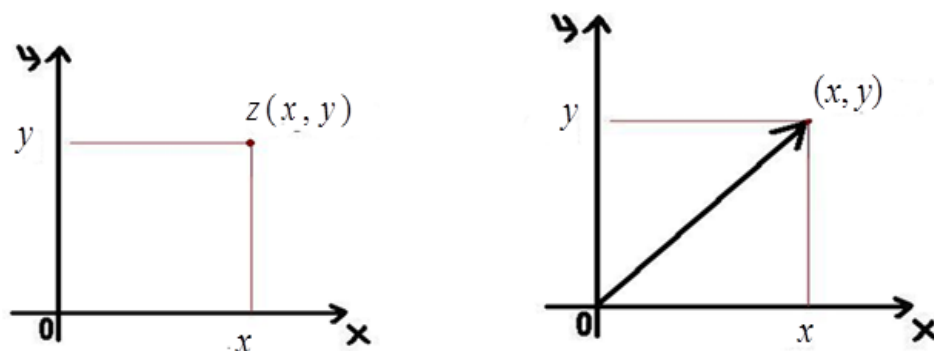


Рисунок 1

Сложение и вычитание комплексных чисел можно выполнить по правилу параллелограмма (правило сложения и вычитания векторов), которое заключается в следующем: нужно построить параллелограмм на векторах, полученных при геометрическом представлении этих чисел. Результату суммирования будет соответствовать вектор-диагональ этого параллелограмма. При выполнении вычитания нужно учитывать, что разность  $z_1$  и  $z_2$  будет соответствовать сумме  $z_1$  и  $-z_2$ . Т.е.  $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$ .

Пример 4. Даны два комплексных числа:  $z_1 = 1 - 5i$  и  $z_2 = 2 - 3i$ .

Изобразить их на комплексной плоскости и результаты их сложения и вычитания (рис. 2).

Решение.

$$z_1 + z_2 = (1 - 5i) + (2 - 3i) = 3 - 8i$$

$$z_1 - z_2 = (1 - 5i) - (2 - 3i) = -1 - 2i$$

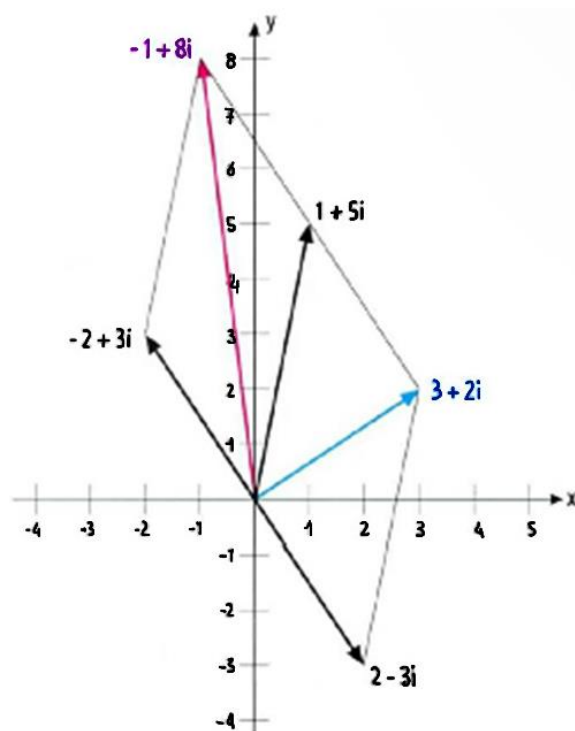


Рисунок 2

Длина  $r$  вектора, соответствующего комплексному числу  $z$  называется **модулем** комплексного числа  $z$  и обозначается  $|z|$ .

Угол  $\varphi$ , образованный радиус-вектором с положительным направлением оси  $OX$ , называется **аргументом** комплексного числа  $z$  и обозначается  $\arg z$  (рис. 3).

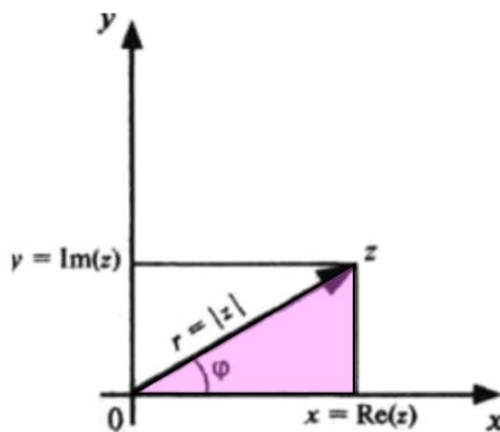


Рисунок 3

Рассматривая на рис. 3 выделенный прямоугольный треугольник, получаем соотношения:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\cos \varphi = \frac{x}{r}; \sin \varphi = \frac{y}{r}; \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x};$$

$$x = r \cdot \cos \varphi; y = r \cdot \sin \varphi; x = y / \operatorname{tg} \varphi; y = x \cdot \operatorname{tg} \varphi.$$

Пример 5: Задано комплексное число  $z = 1 - i$ . Найти  $|z|$  и  $\arg z$ .

Решение.

$$z = 1 - i, \text{ значит, } x = 1, \quad y = -1;$$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2};$$

$$\left. \begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin \varphi &= \frac{y}{r} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{4} = -45^\circ;$$

$$\text{Ответ: } |z| = \sqrt{2}; \quad \arg z = \varphi = -\frac{\pi}{4} \quad (\text{рис. 4})$$

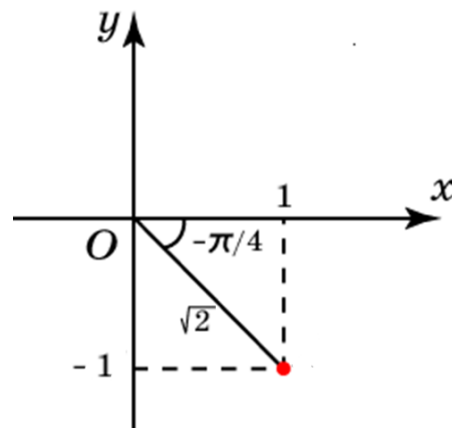


Рисунок 4

### 3. Тригонометрическая форма комплексного числа

Заменяя в алгебраической форме записи комплексного числа  $z = x + yi$   $x$  и  $y$  соотношениями  $x = r \cdot \cos \varphi$   $y = r \cdot \sin \varphi$ , получим:  
 $z = x + yi = r \cdot \cos \varphi + r \cdot \sin \varphi \cdot i = r(\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$ , т.е. тригонометрическую форму записи комплексного числа.

**Тригонометрическая форма:**  $z = r(\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$

Пример 6. Перевести в тригонометрическую форму комплексное число  $z = \sqrt{3} + i$ .

Решение.

$$z = \sqrt{3} + i, \text{ значит, } x = \sqrt{3}, \quad y = 1;$$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2;$$

$$\left. \begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \varphi &= \frac{y}{r} = \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{6} = 30^\circ$$

Таким образом, тригонометрическая форма данного комплексного числа имеет вид:

$$z = r(\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi) = 2 \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \cdot \sin \frac{\pi}{6} \right).$$

$$\text{Ответ. } z = 2 \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \cdot \sin \frac{\pi}{6} \right).$$

Пример 7. Перевести в алгебраическую форму комплексное число, заданное в тригонометрической форме  $z = 10(\cos 150^\circ + i \cdot \sin 150^\circ)$ .

Решение.

$$z = 10(\cos 150^\circ + i \cdot \sin 150^\circ), \text{ значит, } r = 10, \varphi = 150^\circ = \frac{5\pi}{6}$$

$$x = r \cdot \cos \varphi = 10 \cdot \cos \frac{5\pi}{6} = 10 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -5\sqrt{3},$$

$$y = r \cdot \sin \varphi = 10 \cdot \sin \frac{5\pi}{6} = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5.$$

Таким образом, алгебраическая форма данного комплексного числа имеет вид:

$$z = x + yi = -5\sqrt{3} + 5i.$$

Ответ.  $z = -5\sqrt{3} + 5i$ .

### 3.1. Действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме

**Умножение**  $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$

**Деление**  $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$

**Возведение в степень**  $z^n = r^n (\cos n\varphi + i \cdot \sin n\varphi)$  (формула Муавра)

**Извлечение корня**  $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \cdot \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right) \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$

## 4. Показательная форма комплексного числа

В 1740 году Леонард Эйлер опубликовал формулу, связывающую комплексную экспоненту с тригонометрическими функциями:

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi \quad \text{— формула Эйлера.}$$

Таким образом, если комплексное число задано в тригонометрической форме  $z = r(\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$ , то на основании формулы Эйлера, выражение в скобках можно заменить на показательное выражение. В результате получим показательную форму комплексного числа:

**Показательная форма:**  $z = r \cdot e^{i\varphi}$



#### 4.1. Действия над комплексными числами, заданными в показательной форме.

Пусть  $z_1 = r_1 \cdot e^{i\varphi_1}$  и  $z_2 = r_2 \cdot e^{i\varphi_2}$

Умножение  $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$

Деление  $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$

Возведение в степень  $(z)^n = r^n \cdot e^{in\varphi}$

Извлечение корня  $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i \frac{\varphi + 2\pi k}{n}}, k = 0, 1, 2, \dots, n-1$

Пример 8. Даны два комплексных числа  $z_1$  и  $z_2$ .

$$z_1 = 4(\cos 150^\circ + i \cdot \sin 150^\circ) \quad z_2 = \frac{1}{2}(\cos 90^\circ + i \cdot \sin 90^\circ)$$

Произвести действия  $z_1 \cdot z_2$ ,  $z_1 / z_2$  в тригонометрической и показательной форме. Результат записать в алгебраической форме.

Решение.

Из записи чисел имеем:  $r_1 = 4$ ,  $r_2 = \frac{1}{2}$ ,  $\varphi_1 = 150^\circ$ ,  $\varphi_2 = 90^\circ$ .

Тригонометрическая форма:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 \cdot r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) = 4 \cdot \frac{1}{2} (\cos(150^\circ + 90^\circ) + i \cdot \sin(150^\circ + 90^\circ)) = \\ &= 2(\cos 240^\circ + i \cdot \sin 240^\circ) = 2 \left( -\frac{1}{2} + i \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right) = -1 - \sqrt{3}i. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_2)) = 4 : \frac{1}{2} (\cos(150^\circ - 90^\circ) + i \cdot \sin(150^\circ - 90^\circ)) = \\ &= 8(\cos 60^\circ + i \cdot \sin 60^\circ) = 8 \left( \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 4 + 4\sqrt{3}i. \end{aligned}$$

Показательная форма:

$$z_1 = 4e^{i \cdot 150^\circ} \quad z_2 = \frac{1}{2}e^{i \cdot 90^\circ}$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{i(150^\circ + 90^\circ)} = 2e^{i240^\circ} =$$

$$2(\cos 240^\circ + i \cdot \sin 240^\circ) = 2\left(-\frac{1}{2} + i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = -1 - \sqrt{3}i.$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} = 4 : \frac{1}{2} e^{i(150^\circ - 90^\circ)} = 8e^{i60^\circ} = 8(\cos 60^\circ + i \cdot \sin 60^\circ) =$$

$$= 8\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 4 + 4\sqrt{3}i.$$

Ответ.  $z_1 \cdot z_2 = -1 - \sqrt{3}i$ ,  $\frac{z_1}{z_2} = 4 + 4\sqrt{3}i$ .

Как видно из примеров, **показательная форма упрощает запись вычислений, и оформление решения делает более компактным.**

Пример 9. Вычислить  $(\sqrt{2} - \sqrt{2}i)^{10}$ .

Решение.

Запишем данное комплексное число в показательной форме:

$$z = \sqrt{2} - \sqrt{2}i, \text{ значит, } x = \sqrt{2}, \quad y = -\sqrt{2};$$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{2})^2} = \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2;$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x} = \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -1 \Rightarrow \varphi = \operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4} = -45^\circ$$

Таким образом, показательная форма данного комплексного числа имеет вид:

$$z = re^{i\varphi} = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}.$$

Вычислим  $z^{10}$ :

$$z^{10} = r^{10} e^{i \cdot 10\varphi} = 2^{10} e^{i\left(-\frac{\pi}{4} \cdot 10\right)}$$

Переведем полученный результат в алгебраическую форму  $x + iy$ .

$$1024e^{i\left(-\frac{5\pi}{2}\right)} = 1024\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 1024(0 + i \cdot (-1)) = -1024i.$$

Ответ:  $(\sqrt{2} - \sqrt{2}i)^{10} = -1024i$ .

Пример 10. Найти все корни уравнения  $z^4 - 16 = 0$ .

Решение.

Запишем число 16 в показательной форме:  $16 = 16e^{i0}$ , т.е.  $r = 16$ ,  $\varphi = 0$ .  
Тогда

$$z = \sqrt[n]{r} e^{i \frac{\varphi + 2\pi k}{n}} \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

$$z = \sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{16} e^{i \frac{0 + 2\pi k}{4}} \quad k = 0, 1, 2, 3$$

При  $k = 0$ :

$$z_1 = \sqrt[4]{16} e^{i \frac{0}{4}} = 4e^{i0} = 2(\cos 0 + i \cdot \sin 0) = 2(1 + i \cdot 0) = 2$$

При  $k = 1$ :

$$z_2 = \sqrt[4]{16} e^{i \frac{0 + 2\pi}{4}} = 2e^{i \frac{\pi}{2}} = 2\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \cdot \sin \frac{\pi}{2}\right) = 2(0 + i \cdot 1) = 2i$$

При  $k = 2$ :

$$z_3 = \sqrt[4]{16} e^{i \frac{0 + 4\pi}{4}} = 2e^{i\pi} = 2(\cos \pi + i \cdot \sin \pi) = 2(-1 + i \cdot 0) = -2$$

При  $k = 3$ :

$$z_4 = \sqrt[4]{16} e^{i \frac{0 + 6\pi}{4}} = 2e^{i \frac{3\pi}{2}} = 2\left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \cdot \sin \frac{3\pi}{2}\right) = 2(0 + i \cdot (-1)) = -2i$$

Ответ.  $z_1 = 2$ ,  $z_2 = 2i$ ,  $z_3 = -2$ ,  $z_4 = -2i$ .

### Вывод:

- **Алгебраическая** форма удобна при сложении и вычитании,
- **Показательная** форма удобна при умножении, делении, возведении в степень, извлечении корня;
- **Тригонометрическая** форма служит для перевода показательной формы в алгебраическую.

## 5. Задачи для самостоятельного решения

1. Решить уравнение:

1)  $x^2 + 4x + 29 = 0$

2)  $x^2 + 36 = 0$

3)  $x^2 - 13x + 48 = 0$

4)  $x^2 + 6x + 18 = 0$

5)  $x^2 + 4 = 0$

6)  $x^2 + 7x + 20 = 0$

7)  $x^2 + 7 = 0$

8)  $x^3 + 8 = 0$

9)  $x^2 - 2x + 10 = 0$

10)  $x^2 - 2x + 11 = 0$

2. Даны два комплексных числа  $z_1$  и  $z_2$ .

Найти  $z_1 + z_2$ ,  $z_1 - z_2$ ,  $z_1 \cdot z_2$ ,  $z_1 / z_2$

1)  $z_1 = 2 - 8i$

2)  $z_1 = 1 - 2i$

3)  $z_1 = 2 - i$

$z_2 = 3 - 2i$

$z_2 = 1 + 2i$

$z_2 = 2i - 3$

4)  $z_1 = 4 + 5i$

5)  $z_1 = 3$

6)  $z_1 = 3 - 4i$

$z_2 = 6 - 9i$

$z_2 = 1 - 3i$

$z_2 = 3 + 4i$

7)  $z_1 = 3 - 5i$

8)  $z_1 = 4$

9)  $z_1 = -2i$

$z_2 = 2i - 4$

$z_2 = 2i$

$z_2 = 1 - i$

3. Выполнить действия:

1)  $\frac{(1+2i)(2+i)}{3-2i}$

2)  $\frac{2+3i}{(4+i)(2-2i)}$

3)  $\frac{(3+2i)(2-i)}{(2+3i)(1+i)}$

4. Вычислить:

1)  $i^{16}$

2)  $i^{11}$

3)  $i^{22}$

4)  $i^{37}$

5)  $i^{14}$

6)  $i^{24}$

7)  $i^{34}$

8)  $i^{35}$

9)  $i^{52} + 2 \cdot i^{83} - 3 \cdot i^{61} + 5 \cdot i^{38}$

10)  $i^6 + i^{20} + i^{30} + i^{36} + i^{54}$

11)  $i + i^{21} - 4i^{37} - i^{42} + 3i^{55}$

12)  $i^{42} + 2 \cdot i^{53} - 3 \cdot i^{71} + 5 \cdot i^{108}$

13)  $\frac{2-3i}{5+i^{11}}$

14)  $\frac{1+i^{17}}{i^{23}}$

5. Изобразите на комплексной плоскости числа

1)  $z = 3 + 2i$     2)  $z = -4 + 3i$     3)  $z = 2$     4)  $z = -6i$

6. Задано комплексное число  $z$ . Найти  $|z|$  и  $\arg z$ .

1)  $z = 1 + i$     2)  $z = 2i$     3)  $z = -2$     4)  $z = -\sqrt{3} + i$

7. Перевести в тригонометрическую и в показательную форму комплексное число

1)  $z = 1 - i$     2)  $z = \sqrt{3} + i$     3)  $z = 5$     4)  $z = -4i$   
 5)  $z = -1 + i\sqrt{3}$     6)  $z = 5 - 5i$

8. Перевести в алгебраическую форму комплексное число

$z = 10(\cos 150^\circ + i \cdot \sin 150^\circ)$

9. Даны два комплексных числа  $z_1$  и  $z_2$ . Найти  $z_1 \cdot z_2$ ,  $z_1 / z_2$

1)  $z_1 = 4(\cos 150^\circ + i \cdot \sin 150^\circ)$     2)  $z_2 = \frac{1}{2}(\cos 90^\circ + i \cdot \sin 90^\circ)$

10. Выполнить действия и результат представить в алгебраической форме:

1)  $6(\cos 19^\circ + i \cdot \sin 19^\circ) \cdot 8(\cos 31^\circ + i \cdot \sin 31^\circ) \cdot \frac{1}{24}(\cos 40^\circ + i \cdot \sin 40^\circ)$   
 2)  $\frac{1/2(\cos 210^\circ + i \cdot \sin 210^\circ)}{1/4(\cos 150^\circ + i \cdot \sin 150^\circ)}$     3)  $\frac{2(\cos 72^\circ + i \cdot \sin 72^\circ) \cdot 3(\cos 28^\circ + i \cdot \sin 28^\circ)}{0.3(\cos 160^\circ + i \cdot \sin 160^\circ)}$   
 4)  $\frac{1}{0.2(\cos \frac{\pi}{4} + i \cdot \sin \frac{\pi}{4})}$     5)  $10e^{i15^\circ} \cdot 12e^{i30^\circ}$     6)  $27e^{i86^\circ} : 18e^{i26^\circ}$   
 7)  $(10 + 10i)^4$     8)  $[2(\cos 60^\circ + i \cdot \sin 60^\circ)]^6$     9)  $(\cos 120^\circ + i \cdot \sin 120^\circ)^3$   
 10)  $(\sqrt{2} - \sqrt{2}i)^{10}$     11)  $\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{20}$     12)  $\frac{(1-i)^5 \cdot i}{2e^{i\frac{\pi}{4}}}$

11. Проверить равенство  $\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^6 + \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^6 = 2$

12. Вычислить все значения корня  $\sqrt[3]{27i}$  и построить их геометрические изображения.

13. Найти все корни уравнения и построить их геометрические изображения.

1)  $z^4 - 16 = 0$ ;    2)  $z^4 - 81 = 0$ .

## 6. Литература

### Основная

1. Богомолов Н.В. Математика: учеб. для ссузов. - М.: Дрофа, 2019
2. Богомолов Н.В. Практические задания по математике: учеб. пособие. - М.: Высш. Шк., 2019.
3. Григорьев С.Г. Математика: учебник для студ. образоват. учреждений сред. проф. образования - М.: Издательский центр «Академия», 2020.
4. Шмидт Н. М. Приложение комплексных чисел в электротехнике [Текст] / Н. М. Шмидт // Молодой ученый. — 2019. — №2. — С. 320-323.

### Дополнительная

5. Дадаян, А.А Математика: учебник – М.: Форум: Инфра- М, 2019.
6. Дадаян, А.А Сборник задач по математике – М.: Форум: Инфра- М, 2020.