



---

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ**  
**ФГБОУ ВО «Брянский государственный технический университет»**  
**(БГТУ)**

---

Политехнический колледж (ПК БГТУ)

УТВЕРЖДАЮ

Ректор ФГБОУ ВО БГТУ

О.Н. Федонин

«29» апреля 2022 г.

**Методические рекомендации для проведения практических работ**  
**по учебной дисциплине**  
**ЕН.01 Математика**

Специальность:	15.02.08 Технология машиностроения
Уровень образования выпускника:	среднее профессиональное образование (СПО)
Программа подготовки специалиста среднего звена (ППССЗ):	базовая
Присваиваемая квалификация:	Техник-технолог
Форма обучения:	очная
Срок получения СПО по ППССЗ:	3 года 10 месяцев
Уровень образования, необходимый для приема на обучение по ППССЗ:	основное общее образование

Брянск 2022

Методические рекомендации  
для проведения практических работ по учебной дисциплине ЕН.01  
Математика для специальности 15.02.08 Технология машиностроения

предназначены для закрепления знаний по изучаемому материалу и формированию умений, а также для проверки усвоения теоретического материала и умений решать различные математические задачи.

Разработал(и):

Преподаватель ПК БГТУ

И.П. Парфенова

Методическая разработка рассмотрена одобрена предметной комиссией  
«Математических и общих естественно научных дисциплин»

Протокол № 9 от «29» апреля 2022 г.

Председатель \_\_\_\_\_ Л.А Лазарева

## **Область применения методических указаний**

Методические указания для выполнения практических работ являются частью примерной основной профессиональной образовательной программы в соответствии с ФГОС по специальности СПО **15.02.08 Технология машиностроения**.

### **Цели и задачи методических указаний для выполнения практических работ:**

В результате освоения учебной дисциплины обучающийся должен **уметь**:

- выполнять операции над матрицами и решать системы линейных уравнений;
- решать задачи, используя уравнения прямых и кривых второго порядка на плоскости;
- применять методы дифференциального и интегрального исчисления;
- решать дифференциальные уравнения;
- пользоваться понятиями теории комплексных чисел.

В результате освоения учебной дисциплины обучающийся должен **знать**:

- основы математического анализа, линейной алгебры и аналитической геометрии;
- основы дифференциального и интегрального исчисления;
- основы теории комплексных чисел.

### **Формируемые компетенции**

**ОК 4.** Осуществлять поиск и использование информации, необходимой для эффективного выполнения профессиональных задач, профессионального и личностного развития.

**ОК 5.** Использовать информационно-коммуникационные технологии в профессиональной деятельности.

**ОК 8.** Самостоятельно определять задачи профессионального и личностного развития, заниматься самообразованием, осознанно планировать повышение квалификации.

**ПК 1.4.** Разрабатывать и внедрять управляющие программы обработки деталей.

**ПК 1.5.** Использовать системы автоматизированного проектирования технологических процессов обработки деталей.

**ПК 3.2.** Проводить контроль соответствия качества деталей требованиям технической документации.

**Рекомендуемое количество часов на освоение рабочей программы учебной дисциплины:**

Максимальная учебная нагрузка 90 часов, самостоятельная работа 62 часа, обязательная аудиторная учебная нагрузка 28 часов, из них: лекционных работ 16 часов, практических работ 12 часов.

**Перечень практических работ**

1	Практическая работа №1. Решение СЛАУ с тремя неизвестными.
2	Практическая работа №2. Действия над комплексными числами в различных формах.
3	Практическая работа № 3. Предел функции. Производная сложной функции. Исследование функции и построение графика по результатам исследования.
4	Практическая работа №4. Вычисление неопределенного интеграла. Вычисление определенного интеграла. Вычисление площадей плоских фигур.
5	Практическая работа № 5. Решение дифференциальных уравнений.
6	Практическая работа № 6. Численное решение дифференциального уравнения.

## Практическая работа № 1

по теме «Решение матричных уравнений, СЛАУ матричным методом».

**Цель:** научиться вычислять миноры, алгебраические дополнения, находить обратные матрицы, решать простейшие матричные уравнения, СЛАУ матричным методом.

**Время выполнения** 90 минут

**Материальное обеспечение**

1. Теоретические сведения

2. Задание

3. Лист А4

4. Калькуляторы

**Порядок выполнения работы**

1. Изучить задание

2. Изучить теоретические сведения

3. Выполнить и оформить работу

4. Показать результаты преподавателю

**Домашнее задание**

1. Подготовить ответы на контрольные вопросы

**Ход работы**

**Теоретические сведения**

**Минором** некоторого элемента  $a_{ij}$  определителя  $n$ -го порядка называется определитель  $n - 1$ -го порядка, полученный из исходного путём вычёркивания строки и столбца, на пересечении которых находится выбранный элемент. Обозначается  $m_{ij}$ .

$$\text{Так если } \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \text{ то } m_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad m_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

**Алгебраическим дополнением** элемента  $a_{ij}$  определителя называется его минор, взятый со знаком «плюс», если сумма  $i + j$  – чётное число, и со знаком «минус», если эта сумма нечётная. Обозначается  $A_{ij}$ :  $A_{ij} = (-1)^{i+j} * m_{ij}$ .

Так,  $A_{11} = +m_{11}$ ,  $A_{32} = -m_{32}$ .

**Свойство** («Разложение определителя по элементам некоторого ряда»).  
Определитель равен сумме произведений элементов некоторого ряда на соответствующие им алгебраические дополнения.

Проиллюстрируем и одновременно докажем свойство 7 на примере определителя 3-го порядка. В этом случае свойство 7 означает, что

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} * A_{11} + a_{12} * A_{12} + a_{13} * A_{13}$$

В самом деле, имеем

$$\begin{aligned} a_{11} * A_{11} + a_{12} * A_{12} + a_{13} * A_{13} &= a_{11} * \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} * \left( - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \right) + \\ a_{13} * \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + \\ a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) &= \end{aligned}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} = \Delta$$

Свойство содержит в себе способ вычисления определителей высоких порядков.

**Пример.** Вычислите определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 & 8 \\ -1 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

Решение: Для разложения определителя обычно выбирают тот ряд, где есть нулевые элементы, т.к. соответствующие им слагаемые в разложении будут равны нулю.

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 8 \\ -1 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 3 * \begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 5 & 3 & 2 \\ -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} + 1 * \begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 5 & 3 & 2 \\ -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} + 0 * \begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 7 & 0 & 1 \\ -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} - 1 * \begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 7 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3 * (7 * 3 * 4 + (-1) * 0 * 2 + 5 * 7 * 1 - (-1) * 3 * 8 - (-1) * 3 * 8 - 5 * 0 * 8 - 3 * 1 * 5 - 7 * 7 * 2) - 5 * 0 * 8 - 3 * 1 * 5 - 7 * 7 * 2 = 122$$

**Свойство.** Сумма произведений элементов какого-либо ряда определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов параллельного ряда равна нулю.

Так, например,  $a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = 0$

**Нахождение обратной матрицы.**

Пусть  $A$  – квадратная матрица  $n$ -го порядка  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

Квадратная матрица  $A$  называется **невырожденной**, если определитель  $\Delta = \det A$  не равен нулю:  $\Delta = \det A \neq 0$ . В противном случае ( $\Delta = 0$ ) матрица  $A$  называется **вырожденной**.

Матрицей, **союзной к матрице**  $A$ , называется матрица

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

где  $A_{ij}$  – алгебраическое дополнение элемента  $a_{ij}$  данной матрицы  $A$  (оно определяется так же, как и алгебраическое дополнение элемента определителя).

Матрица  $A^{-1}$  называется **обратной** матрице  $A$ , если выполняется условие  $A * A^{-1} = A^{-1} * A = E$ ,

где  $E$  – единичная матрица того же порядка, что и матрица  $A$ . Матрица  $A^{-1}$  имеет те же размеры, что и матрица  $A$ .

## Обратная матрица.

**Теорема** Всякая невырожденная матрица имеет обратную.

$$A^{-1} = \frac{A^*}{\det A}, \text{ т. е. } A^{-1} = \frac{1}{\det A} * \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Отметим свойства обратной матрицы:

1.  $\det(A^{-1}) = 1 / \det A$ ;
2.  $(A * B)^{-1} = B^{-1} * A^{-1}$ ;
3.  $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$ .

**Пример.** Найти  $A^{-1}$ , если  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Решение: 1) Находим  $\det A$ :  $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 3 = 5 \neq 0$

2) Находим  $A^*$ :  $A_{11} = 1$ ,  $A_{21} = -3$ ,  $A_{12} = -(-1) = 1$ ,  $A_{22} = 2$ ,

поэтому  $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

3) Находим  $A^{-1}$ :  $A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 & -3/5 \\ 1/5 & 2/5 \end{pmatrix}$

Проверка:

$$A * A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1/5 & -3/5 \\ 1/5 & 2/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/5 + 3/5 & -6/5 + 6/5 \\ -1/5 + 1/5 & 3/5 + 2/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

**Пример.** Определить при каких значениях  $\alpha$  существует матрица, обратная данной

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ \alpha & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение: Всякая невырожденная матрица имеет обратную. Найдём определитель матрицы  $A$ :

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ \alpha & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 0 + 2\alpha - 12 - 0 + 2\alpha = 4\alpha - 9$$

Если  $4\alpha - 9 = 0$ , т.е.  $\alpha = 9/4$ , то  $\Delta A = 0$ , т.е. матрица  $A$  невырожденная, имеет обратную.

**Пример.** Показать, что матрица  $A$  является обратной для  $B$ , если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение: Найдём произведение матриц  $A$  и  $B$ :

$$\begin{aligned} A * B &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 - 3 + 1 & -3 + 5 - 2 & 1 - 2 + 1 \\ 3 - 6 + 3 & -3 + 10 - 6 & 1 - 4 + 3 \\ 3 - 9 + 6 & -3 + 15 - 12 & 1 - 6 + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E \end{aligned}$$

Аналогично  $B * A = E$ , следовательно, матрица  $A$  является обратной для  $B$ .

[illegible]

Основная матрица  $A$  такой системы квадратная. Определитель этой матрицы

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Умножив обе части уравнения  $A * X = B$  слева на матрицу  $A^{-1}$ , получим  $A^{-1} * A * X = A^{-1} * B$ . Поскольку  $A^{-1} * A = E$  и  $E * X = X$ , то  $X = A^{-1} * B$ .

## Задания для выполнения практической работы

Даны определители: 1)  $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & \kappa_1 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 3\kappa_2 & 2 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & 3 & -3 \end{vmatrix}$ , 2)  $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & \kappa_2 \\ -2 & 3 & \kappa_1 & 2 \\ 1 & -3 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ ,

- 1) Найти миноры и алгебраические дополнения элементов  $a_{i3}$ ,  $a_{2j}$
- 2) Вычислить определители, разложив их по элементам а) i-ой строки, б) j-го столбца

Вариант	$\kappa_1$	$\kappa_2$	i	j	Вариант	$\kappa_1$	$\kappa_2$	i	j
1	3	-2	1	2	16	4	-1	2	1
2	4	1	2	1	17	5	1	1	2
3	3	-4	1	3	18	2	0	3	1
4	2	1	3	4	19	-2	1	4	3
5	3	-3	4	1	20	2	-2	1	4
6	1	5	2	2	21	0	7	2	2
7	-2	3	1	4	22	-1	4	4	1
8	6	-2	4	3	23	-3	3	3	4
9	-6	1	2	1	24	-4	1	1	2
10	-5	1	1	1	25	0	8	1	1
11	-2	4	3	2	26	4	-2	2	3
12	1	3	4	3	27	-1	3	3	4
13	-3	2	2	4	28	2	-3	4	2



<b>14</b>	-4	-1	1	2	<b>29</b>	-2	5	2	1
<b>15</b>	-1	5	3	1	<b>30</b>	-5	-1	1	3

**Задание 2.** Дана матрица  $A = \begin{pmatrix} \kappa_1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & -\kappa_2 & 4 \end{pmatrix}$ . Найти

а)  $A^{-1}$  и проверить, что  $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$

б)  $A + A^{-1}$

<b>Вариант</b>	$\kappa_1$	$\kappa_2$	<b>Вариант</b>	$\kappa_1$	$\kappa_2$
<b>1</b>	3	-2	<b>16</b>	4	-1
<b>2</b>	4	1	<b>17</b>	5	1
<b>3</b>	3	-4	<b>18</b>	2	0
<b>4</b>	2	1	<b>19</b>	-2	1
<b>5</b>	3	-3	<b>20</b>	2	-2
<b>6</b>	1	5	<b>21</b>	0	7
<b>7</b>	-2	3	<b>22</b>	-1	4
<b>8</b>	6	-2	<b>23</b>	-3	3
<b>9</b>	-6	1	<b>24</b>	-4	1
<b>10</b>	-5	1	<b>25</b>	0	8
<b>11</b>	-2	4	<b>26</b>	4	-2
<b>12</b>	1	3	<b>27</b>	-1	3
<b>13</b>	-3	2	<b>28</b>	2	-3
<b>14</b>	-4	-1	<b>29</b>	-2	5
<b>15</b>	-1	5	<b>30</b>	-5	-1

### Задание 3

1. Решить системы уравнений с помощью обратной матрицы (матричным методом).

$$1.1. \begin{cases} 2x + y + 3z = 7, \\ 2x + 3y + z = 1, \\ 3x + 2y + z = 6. \end{cases}$$

$$1.2. \begin{cases} 2x - y + 2z = 3, \\ x + y + 2z = -4, \\ 4x + y + 4z = -3. \end{cases}$$

$$1.3. \begin{cases} 3x - y + z = 12, \\ x + 2y + 4z = 6, \\ 5x + y + 2z = 3. \end{cases}$$

$$1.4. \begin{cases} 2x - y + 3z = -4, \\ x + 3y + 3z = 11, \\ x - 2y + 2z = -7. \end{cases}$$

$$1.5. \begin{cases} 3x - 2y + 4z = 12, \\ 3x + 4y - 2z = 6, \\ 2x - y - z = -9. \end{cases}$$

$$1.6. \begin{cases} 8x + 3y - 6z = -4, \\ x + y - z = 2, \\ 4x + y - 3z = -5. \end{cases}$$

$$1.7. \begin{cases} 4x + y - 3z = 9, \\ x + y - z = -2, \\ 8x + 3y - 6z = 12. \end{cases}$$

$$1.8. \begin{cases} 2x + 3y + 4z = 33, \\ 7x - 5y = 24, \\ 4x + 11z = 39. \end{cases}$$

$$1.9. \begin{cases} 2x + 3y + 4z = 12, \\ 7x - 5y + z = -33, \\ 4x + z = -7. \end{cases}$$

$$1.10. \begin{cases} x + 4y - z = 6, \\ 5y + 4z = -20, \\ 3x - 2y + 5z = -22. \end{cases}$$

$$1.11. \begin{cases} 3x - 2y + 4z = 21, \\ 3x + 4y - 2z = 9, \\ 2x - y - z = 10. \end{cases}$$

$$1.12. \begin{cases} 3x - 2y - 5z = 5, \\ 2x + 3y - 4z = 12, \\ x - 2y + 3z = -1. \end{cases}$$

$$1.13. \begin{cases} 4x + y + 4z = 19, \\ 2x - y + 2z = 11, \\ x + y + 2z = 8. \end{cases}$$

$$1.14. \begin{cases} 2x - y + 2z = 0, \\ 4x + y + 4z = 6, \\ x + y + 2z = 4. \end{cases}$$

$$1.15. \begin{cases} 2x - y + 2z = 8, \\ x + y + 2z = 11, \\ 4x + y + 4z = 22. \end{cases}$$

$$1.16. \begin{cases} 2x - y - 3z = -9, \\ x + 5y + z = 20, \\ 3x + 4y + 2z = 15. \end{cases}$$

$$1.17. \begin{cases} 2x - y - 3z = 0, \\ 3x + 4y + 2z = 1, \\ x + 5y + z = -3. \end{cases}$$

$$1.18. \begin{cases} -3x + 5y + 6z = -8, \\ 3x + y + z = -4, \\ x - 4y - 2z = -9. \end{cases}$$

$$1.19. \begin{cases} 3x + y + z = -4, \\ -3x + 5y + 6z = 36, \\ x - 4y - 2z = 19. \end{cases}$$

$$1.20. \begin{cases} 3x - y + z = -11, \\ 5x + y + 2z = 8, \\ x + 2y + 4z = 16. \end{cases}$$

$$1.21. \begin{cases} 3x - y + z = 9, \\ 5x + y + 2z = 11, \\ x + 2y + 4z = 19. \end{cases}$$

$$1.22. \begin{cases} 2x + 3y + z = 4, \\ 2x + y + 3z = 0, \\ 3x + 2y + z = 1. \end{cases}$$

$$1.23. \begin{cases} 2x + 3y + z = 12, \\ 2x + y + 3z = 16, \\ 3x + 2y + z = 8. \end{cases}$$

$$1.24. \begin{cases} x - 2y + 3z = 14, \\ 2x + 3y - 4z = -16, \\ 3x - 2y - 5z = -8. \end{cases}$$

$$1.25. \begin{cases} 3x + 4y - 2z = 11, \\ 2x - y - z = 4, \\ 3x - 2y + 4z = 11. \end{cases}$$

$$1.26. \begin{cases} x + 5y - 6z = -15, \\ 3x + y + 4z = 13, \\ 2x - 3y + z = 9. \end{cases}$$

$$1.27. \begin{cases} 4x - y = -6, \\ 3x + 2y + 5z = -14, \\ x - 3y + 4z = -19. \end{cases}$$

$$1.28. \begin{cases} 5x + 2y - 4z = -16, \\ x + 3z = -6, \\ 2x - 3y + z = 9. \end{cases}$$

$$1.29. \begin{cases} x + 4y - z = -9, \\ 4x - y + 5z = -2, \\ 3y - 7z = -6. \end{cases}$$

$$1.30. \begin{cases} 7x + 4y - z = 13, \\ 3x + 2y + 3z = 3, \\ 2x - 3y + z = -10. \end{cases}$$

## Ответы

### Задание 1

вариант	M <sub>13</sub>	M <sub>2j</sub>	A <sub>13</sub>	A <sub>2j</sub>	Δ	вариант	M <sub>13</sub>	M <sub>2j</sub>	A <sub>13</sub>	A <sub>2j</sub>	Δ
1.	-72	-52	72	52	58	16.	-33	15	33	-15	24
	50	-30	-50	30	160		-25	65	25	-65	175
2.	9	15	-9	-15	18	17.	-27	26	-27	26	14
	-15	55	-15	-55	145		50	-15	-50	-15	160
3.	14	-88	-14	88	82	18.	-19	5	-19	-5	47
	50	-40	50	40	180		-12	60	-12	-60	120
4.	-19	6	-19	6	26	19.	15	-33	-15	33	42
	-19	10	19	10	115		-2	-15	2	15	55
5.	7	10	-7	-10	70	20.	-72	24	72	24	89
	-11	75	-11	75	170		50	10	-50	10	130
6.	36	54	-36	54	-90	21.	35	25	-35	25	-200
	5	5	-5	5	100		15	15	-15	15	115
7.	93	-6	93	-6	-72	22.	74	-10	-74	10	-106

	50	10	50	10	85		10	40	-10	-40	100
8.	46	-58	-46	58	-20	23.	-44	-6	-44	-6	-86
	-8	-30	8	30	250		-33	10	-33	10	80
9.	-61	-35	61	35	58	24.	27	-73	-27	-73	50
	-15	55	15	-55	-5		50	-15	50	-15	25
10.	27	-30	-27	30	54	25.	258	-5	-258	5	-239
	50	55	-5	-55	10		50	20	-50	-20	120
11.	-39	-78	-39	-78	-129	26.	-54	-54	54	54	27
	-40	0	40	0	100		-30	-30	30	-30	190
12.	21	12	-21	-12	-30	27.	-34	-6	-34	-6	-58
	7	-5	-7	5	100		-33	10	-33	10	90
13.	-40	0	40	0	-20	28.	-13	-115	13	-115	110
	-10	10	10	10	60		-11	-35	11	-35	135
14.	-39	-19	-39	-19	200	29.	-21	-15	21	15	-186
	50	-25	-50	-25	-25		5	35	-5	-35	115
15.	-34	-10	-34	10	-154	30.	-39	-42	-39	42	222
	-47	35	-47	-35	110		50	-25	-50	25	-50

## Задание 2

<b>1</b> $\left  \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 6 & -3 \\ -2 & 15 & -8 \\ 1 & -12 & 7 \end{pmatrix} \right $	<b>2</b> $\frac{1}{27} \begin{pmatrix} 6 & 9 & -3 \\ -2 & 15 & -8 \\ -5 & -3 & 7 \end{pmatrix}$	<b>3</b> $\frac{1}{13} \begin{pmatrix} 4 & -4 & 3 \\ 2 & -15 & 8 \\ -5 & 18 & -7 \end{pmatrix}$	<b>4</b> $\frac{1}{21} \begin{pmatrix} 6 & 9 & -3 \\ -2 & 11 & -6 \\ -5 & -4 & 6 \end{pmatrix}$	<b>5</b> $\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 2 & -15 & 8 \\ -3 & 15 & -7 \end{pmatrix}$
<b>6</b> $\frac{1}{31} \begin{pmatrix} 14 & 13 & -3 \\ -2 & 7 & -4 \\ -13 & -1 & 5 \end{pmatrix}$	<b>7</b> $\frac{1}{7} \begin{pmatrix} -10 & -11 & 3 \\ 2 & 5 & -2 \\ 9 & 12 & -2 \end{pmatrix}$	<b>8</b> $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 6 & -3 \\ -2 & 27 & -14 \\ 1 & -18 & 10 \end{pmatrix}$	<b>9</b> $\frac{1}{27} \begin{pmatrix} -6 & -9 & 3 \\ 2 & 21 & -10 \\ 5 & 12 & 2 \end{pmatrix}$	<b>10</b> $\frac{1}{21} \begin{pmatrix} -6 & -9 & 3 \\ 2 & 17 & -8 \\ 5 & 11 & 1 \end{pmatrix}$
<b>11</b> $\frac{1}{9} \begin{pmatrix} -12 & -12 & 3 \\ 2 & 5 & -2 \\ 11 & 14 & -2 \end{pmatrix}$	<b>12</b> $\frac{1}{23} \begin{pmatrix} 10 & 11 & -3 \\ -2 & 7 & -4 \\ -9 & -3 & 5 \end{pmatrix}$	<b>13</b> $\frac{1}{13} \begin{pmatrix} -8 & -10 & 3 \\ 2 & 9 & -4 \\ 7 & 12 & -1 \end{pmatrix}$	<b>14</b> $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & -7 & 3 \\ 2 & 13 & -6 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$	<b>15</b> $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 14 & 13 & -3 \\ -2 & -1 & 0 \\ -13 & -11 & 3 \end{pmatrix}$
<b>16</b> $\frac{1}{13} \begin{pmatrix} 2 & 7 & -3 \\ -2 & 19 & -10 \\ -1 & -10 & 8 \end{pmatrix}$	<b>17</b> $\frac{1}{39} \begin{pmatrix} 6 & 9 & -3 \\ -2 & 23 & -12 \\ -5 & -1 & 9 \end{pmatrix}$	<b>18</b> $\frac{1}{15} \begin{pmatrix} 4 & 8 & -3 \\ -2 & 11 & -6 \\ -3 & -6 & 6 \end{pmatrix}$	<b>19</b> $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -6 & -9 & 3 \\ 2 & 5 & -2 \\ 5 & 8 & -2 \end{pmatrix}$	<b>20</b> $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 6 & -3 \\ -2 & 11 & -6 \\ 1 & -10 & 6 \end{pmatrix}$
<b>21</b>	<b>22</b>	<b>23</b>	<b>24</b>	<b>25</b>

$\frac{1}{21} \begin{pmatrix} 18 & 15 & -3 \\ -2 & 3 & -2 \\ -17 & -6 & 4 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 12 & 12 & -3 \\ -2 & -1 & 0 \\ -11 & -10 & 3 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{17} \begin{pmatrix} -10 & -11 & 3 \\ 2 & 9 & -4 \\ 9 & 15 & -1 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{15} \begin{pmatrix} -6 & -9 & 3 \\ 2 & 13 & -6 \\ 5 & 10 & 0 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{23} \begin{pmatrix} 20 & 16 & -3 \\ -2 & 3 & -2 \\ -19 & -6 & 4 \end{pmatrix}$
<b>26</b> $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 6 & -3 \\ -2 & 19 & -10 \\ 1 & -14 & 8 \end{pmatrix}$	<b>27</b> $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 10 & 11 & -3 \\ -2 & -1 & 0 \\ -9 & -9 & 3 \end{pmatrix}$	<b>28</b> $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 2 & -11 & 6 \\ -3 & 12 & -6 \end{pmatrix}$	<b>29</b> $\frac{1}{11} \begin{pmatrix} -14 & -13 & 3 \\ 2 & 5 & -2 \\ 13 & 16 & -2 \end{pmatrix}$	<b>30</b> $\frac{1}{5} \begin{pmatrix} -2 & -7 & 3 \\ 2 & 17 & -8 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

### Контрольные вопросы

Что называется минором?

Что называется алгебраическим дополнением элемента матрицы?

Как разложить определитель по элементам столбца или строки?

Какая матрица называется невырожденной?

Транспонированная матрица.

Какая матрица называется обратной по отношению к данной?

Каков порядок вычисления обратной матрицы?

Алгоритм решения простейшего матричного уравнения

## Практическая работа № 2

по теме «Действия над комплексными числами в алгебраической форме»

**Цель:** научить выполнять действия с комплексными числами в алгебраической форме

**Время выполнения** 90 минут

**Материальное обеспечение**

1. Теоретические сведения

2. Задание

3. Лист А 4

4. Калькуляторы

**Порядок выполнения работы**

1. Изучить задание

2. Изучить теоретические сведения

3. Выполнить и оформить работу

4. Показать результаты преподавателю

**Домашнее задание**

1. Подготовить ответы на контрольные вопросы

**Теоретические сведения**

**Определение.** Комплексным числом  $z$  называется выражение  $z = a + ib$ , где  $a$  и  $b$  – действительные числа,  $i$  – мнимая единица, которая определяется соотношением:  $i^2 = -1$ ;  $i = \sqrt{-1}$ .

При этом число  $a$  называется **действительной частью** числа  $z$  ( $a = \operatorname{Re} z$ ), а  $b$  – **мнимой частью** ( $b = \operatorname{Im} z$ ).

Если  $a = \operatorname{Re} z = 0$ , то число  $z$  будет чисто мнимым, если  $b = \operatorname{Im} z = 0$ , то число  $z$  будет действительным.

**Определение.** Числа  $z = a + ib$  и  $\bar{z} = a - ib$  называются **комплексно – сопряженными**.

**Определение.** Два комплексных числа  $z_1 = a_1 + ib_1$  и  $z_2 = a_2 + ib_2$  называются равными, если соответственно равны их действительные и мнимые части:

$$a_1 = a_2; \quad b_1 = b_2;$$

**Определение.** Комплексное число равно нулю, если соответственно равны нулю действительная и мнимая части.

$$a = b = 0.$$

**Действия над комплексными числами в алгебраической форме.**

Основные действия с комплексными числами вытекают из действий с многочленами.

## Сложение и вычитание

Рассмотрим два комплексных числа, заданных в общем виде  $z_1 = a_1 + ib_1$ ;

$z_2 = a_2 + ib_2$ , тогда

$$z = z_1 \pm z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = (a_1 \pm a_2) + i(b_1 \pm b_2) = a \pm ib$$

Можно сформулировать правило сложения и вычитания комплексных чисел: при сложении (вычитании) комплексных чисел соответственно складываются (вычитаются) их действительные и мнимые части.

## Умножение

$$z = z_1 z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1 a_2 + ia_1 b_2 + ib_1 a_2 + i^2 b_1 b_2 = a + ib$$

$$z = z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + b_1 a_2)$$

(т.е. можно говорить, что перемножаются комплексные числа как многочлены, учитывая, что  $i^2 = -1$ ). Значит, чтобы перемножить два комплексных числа необходимо перемножить их как многочлены, учитывая, что  $i^2 = -1$ .

## Деление

При выполнении деления комплексных чисел пользуются искусственным приёмом: числитель и знаменатель дроби умножают на число, комплексно - сопряженное знаменателю дроби, и поступают далее так, как и при умножении комплексных чисел.

### Пример.

$$z_1 = 5 - i;$$

$$z_2 = -2 + 3i;$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{5 - i}{-2 + 3i} = \frac{(5 - i) * (-2 - 3i)}{(-2 + 3i) * (-2 - 3i)} = \frac{-10 + 2i - 15i + 3i^2}{4 - 9i^2} = \frac{-13 - 13i}{13} = -1 - i$$

## Задания практической работы

1. Даны комплексные числа вычислить  $y z = z_1 + z_2$ ;  $z_1 - z_2$ ;  $z_1 \cdot z_2$ ;  $\frac{z_1}{z_2}$

1.  $z_1 = 5 - i$ ;  $z_2 = 1 + 3i$

16.  $z_1 = 5 + i$ ;  $z_2 = 1 - 2i$

2.  $z_1 = 3 - 4i$ ;  $z_2 = 1 + i$

17.  $z_1 = 3 + i$ ;  $z_2 = 5 - 2i$

3.  $z_1 = 1 - 5i$ ;  $z_2 = 1 + 4i$

18.  $z_1 = 1 - 5i$ ;  $z_2 = 1 + 3i$

4.  $z_1 = 1 + 3i$ ;  $z_2 = 7 - i$

19.  $z_1 = 5 - i$ ;  $z_2 = 1 + 3i$

5.  $z_1 = 1 - i$ ;  $z_2 = 7 + 3i$

20.  $z_1 = 1 + 3i$ ;  $z_2 = -2 + 5i$

6.  $z_1 = 1 - i$ ;  $z_2 = 5 - 4i$

21.  $z_1 = 3 + 4i$ ;  $z_2 = -2 + i$

7.  $z_1 = 3 + 4i$ ;  $z_2 = -2 + i$

22.  $z_1 = 5 - 2i$ ;  $z_2 = -2 + i$

8.  $z_1 = -i$ ;  $z_2 = 7 + 4i$

23.  $z_1 = 7 - 2i$ ;  $z_2 = 5 + 3i$

9.  $z_1 = 6 - 5i$ ;  $z_2 = 1 + i$

24.  $z_1 = 7 - 3i$ ;  $z_2 = -1 + 4i$

10.  $z_1 = -1 + 5i; \quad z_2 = 2 - 5i$

11.  $z_1 = 5 - 7i; \quad z_2 = 1 - 3i$

12.  $z_1 = -3 - 2i; \quad z_2 = -1 + 7i$

13.  $z_1 = 5 + 2i; \quad z_2 = 2 - i$

14.  $z_1 = 1 + 5i; \quad z_2 = 2 - 3i$

15.  $z_1 = 1 - 4i; \quad z_2 = 1 + 2i$

25.  $z_1 = -2 + 3i; \quad z_2 = 5 - 4i$

26.  $z_1 = -3 + 2i; \quad z_2 = 6 + 5i$

27.  $z_1 = -1 + 7i; \quad z_2 = 4 - 5i$

28.  $z_1 = 4 + 5i; \quad z_2 = 1 - 2i$

29.  $z_1 = -1 + 3i; \quad z_2 = 6 - 5i$

30.  $z_1 = -3 - 2i; \quad z_2 = 4 + 3i$

**2. Выполнить действия над комплексными числами в алгебраической форме**

1)11)21)  $\frac{1+i}{1-2i} - \left( \frac{4}{5} - \frac{2}{5}i \right);$

2)12)22)  $\frac{2(1-i\sqrt{3})}{1+i\sqrt{3}};$

3)13)23)  $\left( \frac{1-i}{1+i} \right)^{20} + i^{17};$

4)14)24)  $\frac{(1-2i)(1+2i)}{2+i} - i^{12};$

5)15)25)  $\frac{2(1+i\sqrt{3})}{1-i} - (1+i\sqrt{3});$

6)16)26)  $\frac{(-2+i)^2}{1+3i} - (0,1 - 0,3i);$

7)17)27)  $\frac{2(1-i\sqrt{3})}{i(\sqrt{3}-i)};$

8)18)28)  $\frac{(1-3i)(1+3i)}{-3-i} - 2i^{19};$

9) 19)29)  $\frac{(1+i\sqrt{3})^2}{2i^5};$

10)20)30)  $\frac{(4-i)^2}{i^8} - 8(2-i^{13});$

### **Контрольные вопросы**

1. Что такое комплексное число: действительная часть числа, мнимая часть числа?
2. Что такое мнимая единица?
3. Какие числа называются сопряженными?
4. Как представить комплексное число графически?
5. Что такое модуль числа?
6. Что такое аргумент числа?
7. Сколько может быть модулей и аргументов у комплексного числа?
8. Как найти аргумент числа?

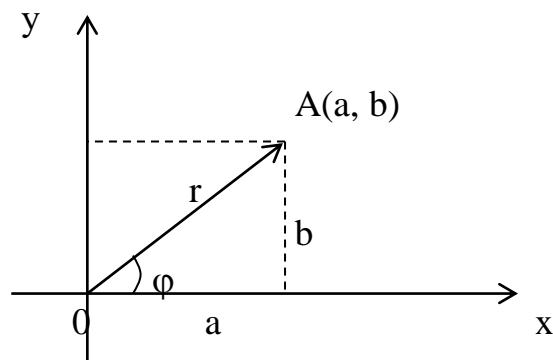
Как найти сумму, разность, произведение, частное комплексных чисел

### **Теоретические сведения**

### **Геометрическое изображение комплексных чисел.**

Понятие комплексного числа имеет геометрическое истолкование. Множество комплексных чисел является расширением множества действительных чисел за счет включения множества мнимых чисел. Комплексные числа включают в себя все множества чисел, которые изучались ранее. Так натуральные, целые, рациональные, иррациональные, действительные числа являются, вообще говоря, частными случаями комплексных чисел.

Если любое действительное число может быть геометрически представлено в виде точки на числовой прямой, то комплексное число представляется точкой на плоскости, координатами которой будут соответственно действительная и мнимая части комплексного числа. При этом горизонтальная ось будет являться действительной числовой осью, а вертикальная - мнимой осью.



Таким образом, на оси OX располагаются действительные числа, а на оси OY – чисто мнимые.

С помощью подобного геометрического представления можно представлять числа в так называемой тригонометрической форме.

### **Тригонометрическая форма числа.**

Из геометрических соображений видно, что  $a = r \cos \varphi$ ;  $b = r \sin \varphi$ . Тогда комплексное число можно представить в виде:

$$z = a + ib = r \cos \varphi + ir \sin \varphi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

Такая форма записи называется **тригонометрической формой записи комплексного числа**.

При этом величина  $r$  называется **модулем** комплексного числа, а угол наклона  $\varphi$  - **аргументом** комплексного числа.

$$r = |z|; \quad \varphi = \operatorname{Arg} z.$$

Из геометрических соображений видно:

$$r = |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}; \quad \varphi = \operatorname{Arg} z = \operatorname{arctg} \frac{b}{a};$$



Очевидно, что комплексно – сопряженные числа имеют одинаковые модули и противоположные аргументы.

$$|z| = |\bar{z}|; \quad \text{Arg } z = -\text{Arg } \bar{z}.$$

Действия с комплексными числами в тригонометрической форме.

$$z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), \quad z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2).$$

**Умножение**  $z = z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$

В случае комплексно – сопряженных чисел:

$$z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 = |z|^2 = |\bar{z}|^2.$$

**Деление**  $z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$

### Возведение в степень

Из операции умножения комплексных чисел следует, что

$$z^2 = zz = r^2 (\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi)$$

В общем случае получим:

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi),$$

где  $n$  – целое положительное число.

Это выражение называется **формулой Муавра**. (Абрахам де Муавр (1667 – 1754) – английский математик).

### Извлечение корня из комплексного числа

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \rho(\cos \psi + i \sin \psi)$$

Возводя в степень, получим:

$$\rho^n (\cos n\psi + i \sin n\psi) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

Отсюда:  $\rho = \sqrt[n]{r}; \quad n\psi = \varphi + 2\pi k; \quad k \in \mathbb{Z}.$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right)$$

Таким образом, корень  $n$  – ой степени из комплексного числа имеет  $n$  различных значений.

### Задания для практической работы

**Задание.** Выполнить действия с данными комплексными :

1)  $Z_1 + Z_2; \quad Z_1 - Z_2; \quad Z_1 \cdot Z_2, \quad Z_1 : Z_2$

1.  $z_1 = 8(\cos 55^\circ + i \sin 55^\circ), \quad z_2 = 2(\cos 5^\circ + i \sin 5^\circ),$

2.  $z_1 = 5(\cos 48^\circ + i \sin 48^\circ), \quad z_2 = 2(\cos 12^\circ + i \sin 12^\circ),$

3.  $z_1 = 3(\cos 70^\circ + \sin 70^\circ)$ ,  $z_2 = 2(\cos 20^\circ + \sin 20^\circ)$ ,
4.  $z_1 = 10(\cos 105^\circ + \sin 105^\circ)$ ,  $z_2 = 2(\cos 15^\circ + \sin 15^\circ)$ ,
5.  $z_1 = 12(\cos 145^\circ + \sin 145^\circ)$ ,  $z_2 = 2(\cos 5^\circ + \sin 5^\circ)$ ,
6.  $z_1 = 7(\cos 255^\circ + \sin 255^\circ)$ ,  $z_2 = 2(\cos 15^\circ + \sin 15^\circ)$ ,
7.  $z_1 = 9(\cos 168^\circ + \sin 168^\circ)$ ,  $z_2 = 2(\cos 12^\circ + \sin 12^\circ)$ ,
8.  $z_1 = 6(\cos 40^\circ + \sin 40^\circ)$ ,  $z_2 = 2(\cos 20^\circ + \sin 20^\circ)$ ,
9.  $z_1 = 3(\cos 40^\circ + \sin 40^\circ)$ ,  $z_2 = 2(\cos 5^\circ + \sin 5^\circ)$ ,
10.  $z_1 = 10(\cos 75^\circ + \sin 75^\circ)$ ,  $z_2 = 2(\cos 15^\circ + \sin 15^\circ)$ ,
11.  $z_1 = 9(\cos 123^\circ + \sin 123^\circ)$ ,  $z_2 = 2(\cos 12^\circ + \sin 12^\circ)$ ,
12.  $z_1 = 5(\cos 160^\circ + \sin 160^\circ)$ ,  $z_2 = 2(\cos 20^\circ + \sin 20^\circ)$ ,
13.  $z_1 = 3(\cos 235^\circ + \sin 235^\circ)$ ,  $z_2 = 2(\cos 5^\circ + \sin 5^\circ)$ ,
14.  $z_1 = 4(\cos 30^\circ + \sin 30^\circ)$ ,  $z_2 = 2(\cos 15^\circ + \sin 15^\circ)$ ,
15.  $z_1 = 2(\cos 258^\circ + \sin 258^\circ)$ ,  $z_2 = 2(\cos 12^\circ + \sin 12^\circ)$ ,
16.  $z_1 = 7(\cos 115^\circ + \sin 115^\circ)$ ,  $z_2 = 2(\cos 20^\circ + \sin 20^\circ)$ ,
17.  $z_1 = 14(\cos 310^\circ + \sin 310^\circ)$ ,  $z_2 = 2(\cos 5^\circ + \sin 5^\circ)$ ,
18.  $z_1 = 8(\cos 45^\circ + \sin 45^\circ)$ ,  $z_2 = 2(\cos 15^\circ + \sin 15^\circ)$ ,
19.  $z_1 = 6(\cos 213^\circ + \sin 213^\circ)$ ,  $z_2 = 2(\cos 12^\circ + \sin 12^\circ)$ ,
20.  $z_1 = 9(\cos 70^\circ + \sin 70^\circ)$ ,  $z_2 = 2(\cos 20^\circ + \sin 20^\circ)$ ,
21.  $z_1 = 4(\cos 40^\circ + \sin 40^\circ)$ ,  $z_2 = 2(\cos 5^\circ + \sin 5^\circ)$ ,
22.  $z_1 = 6(\cos 300^\circ + \sin 300^\circ)$ ,  $z_2 = 2(\cos 15^\circ + \sin 15^\circ)$ ,
23.  $z_1 = 3(\cos 33^\circ + \sin 33^\circ)$ ,  $z_2 = 2(\cos 12^\circ + \sin 12^\circ)$ ,
24.  $z_1 = 5(\cos 250^\circ + \sin 250^\circ)$ ,  $z_2 = 2(\cos 20^\circ + \sin 20^\circ)$ ,
25.  $z_1 = 8(\cos 85^\circ + \sin 85^\circ)$ ,  $z_2 = 2(\cos 5^\circ + \sin 5^\circ)$ ,
26.  $z_1 = 10(\cos 165^\circ + \sin 165^\circ)$ ,  $z_2 = 2(\cos 15^\circ + \sin 15^\circ)$ ,
27.  $z_1 = 9(\cos 48^\circ + \sin 48^\circ)$ ,  $z_2 = 2(\cos 12^\circ + \sin 12^\circ)$ ,
28.  $z_1 = 5(\cos 100^\circ + \sin 100^\circ)$ ,  $z_2 = 2(\cos 20^\circ + \sin 20^\circ)$ ,
29.  $z_1 = 4(\cos 175^\circ + \sin 175^\circ)$ ,  $z_2 = 2(\cos 5^\circ + \sin 5^\circ)$ ,
30.  $z_1 = 16(\cos 120^\circ + \sin 120^\circ)$ ,  $z_2 = 2(\cos 15^\circ + \sin 15^\circ)$ ,

2. Выполнить действия над комплексными числами в тригонометрической форме, результат записать в тригонометрической, алгебраической и показательной форме

$$1,11,21. \frac{i-1}{1+i}$$

$$6,16,26. \sqrt[3]{-1+i}$$

$$2,12,22. \left( \frac{1-i}{-2-2i} \right)^{-6}$$

$$7,17,27. ((\sqrt{3}-i)(-1+i))^4$$

$$3,13,23. \left( \frac{1+\sqrt{3}i}{1-i} \right)^6$$

$$8,18,28. \left( \frac{\sqrt{3}+i}{2} \right)^{12}$$

$$4,14,24. \left( \frac{0,5-0,5\sqrt{3}i}{0,5\sqrt{3}-0,5i} \right)^4$$

$$9,19,29. \left( \frac{2\sqrt{3}-2i}{\sqrt{3}+i} \right)^3$$

$$5,15,25. (2+\sqrt{12}i)^5$$

$$10,20,30. (-3-\sqrt{3}i)^3$$

3. Записать комплексное число в тригонометрической и алгебраической форме

- |                           |                          |
|---------------------------|--------------------------|
| 1. $14e^{2\pi i/3}$ ;     | 6. $4e^{-\pi i/4}$ ;     |
| 2. $2e^{\pi i/6}$ ;       | 7. $5e^{-7\pi i/6}$ ;    |
| 3. $(2/3)e^{-5\pi i/3}$ ; | 8. $(2/5)e^{5\pi i/4}$ ; |
| 4. $3e^{\pi i/3}$ ;       | 9. $8e^{7\pi i/6}$ ;     |
| 5. $e^{-5\pi i/6}$ ;      | 10. $2,2e^{-3\pi i/4}$ ; |

4. Выполнить действия. Результат записать во всех формах.

- |  |                               |
|--|-------------------------------|
| 1. $\frac{(5+3i)(5+3i^{15})}{\sqrt{2}(\cos 225^\circ + i \sin 225^\circ)}$ ; | 6. $((-\sqrt{3}+i)/2)^{60}$ ; |
| 2. $\frac{(3+2i)^2(2-3i^0)}{1+2i^{31}}$ ;                                    | 7. $(2/(1-i\sqrt{3}))$ ;      |
| 3. $\frac{(2+i)^3}{2i(\cos(3\pi/4) + i \sin(3\pi/4))}$ ;                     | 8. $((\sqrt{3}+i)/2)^{24}$ ;  |
| 4. $((1-i\sqrt{3})/2)^6$ ;   | 9. $\sqrt{-8-8\sqrt{3}i}$ ;   |
| 5. $\sqrt{-1+i\sqrt{3}}$ ;   | 10. $\sqrt{7-4i\sqrt{2}}$ ;   |

5. Выполнить действия, используя тригонометрическую форму:

- |  |  |
|--|--|
| 1. $\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{i\sqrt{6}}{6}\right)$ ; | 6. $3\left[\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)\right] + (3 + \sqrt{3}i)$ ; |
| 2. $(1+i\sqrt{3})(-2-2i\sqrt{3})$ ;  | 7. $\frac{-1+i\sqrt{3}}{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}$ ;  |
| 3. $(1+i)(3+3i\sqrt{3})$ ;   | 8. $\frac{i^6+i^5}{\sqrt{2}e^{\pi i/3}}$ ;   |
| 4. $(6+2i\sqrt{3})(-3-3i)$ ;   | 9. $\frac{-3 - \frac{3\sqrt{3}}{2}i}{4-4\sqrt{3}i}$ ;  |
| 5. $(5+5i)(\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ)$ ;   | 10. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)e^{-3\pi i/4}$                                   |

6. Выполнить действия над комплексными числами в тригонометрической форме:

- |  |   |
|--|---|
| 1) $\sqrt[3]{z_1}$ ;                                       | 2) $z_2^5$ ;  |
| 1. $z_1 = 1+i, z_2 = -\sqrt{3}+i$ ;                        | 6. $z_1 = 1-\sqrt{3}i, z_2 = 2+2i$ ;                              |
| 2. $z_1 = 1-i, z_2 = -\sqrt{3}-i$ ;                        | 7. $z_1 = -1+\sqrt{3}i, z_2 = -2-2i$ ;                            |
| 3. $z_1 = -1+i, z_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ; | 8. $z_1 = -1-\sqrt{3}i, z_2 = -2+2i$ ;                            |
| 4. $z_1 = -1-i, z_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ; | 9. $z_1 = \sqrt{3}+i, z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ; |

5.  $z_1 = 1 + \sqrt{3}i, z_2 = 2 - 2i;$

10.  $z_1 = \sqrt{3} - i, z_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i;$

### **Контрольные вопросы**

1. Что такое тригонометрическая форма записи комплексного числа?
2. Как перевести число в тригонометрическую форму?
3. Как найти произведение, частное чисел в тригонометрической форме?
4. Как найти возвести число в тригонометрической форме в целую степень?
5. Как найти корень n-ной степени из числа в тригонометрической форме?
6. Формула Эйлера
7. Как представить комплексное число в показательной форме?
8. Как связаны тригонометрическая и показательная формы записи комплексных чисел?
9. Как найти произведение, частное чисел в показательной форме?
10. Как найти возвести число в показательной форме в целую степень?
11. Как найти корень n-ной степени из числа в показательной форме?

### Практическая работа № 3

#### по теме «Нахождение производной сложной функции. Геометрический и физический смысл производной»

**Цель:** научиться находить производные элементарных и сложных функций.

**Время выполнения** 90 минут

#### **Материальное обеспечение**

1. Теоретические сведения
2. Задание
3. Лист А 4
4. Калькуляторы

#### **Порядок выполнения работы**

1. Изучить задание
2. Изучить теоретические сведения
3. Выполнить и оформить работу
4. Показать результаты преподавателю

#### **Домашнее задание**

1. Подготовить ответы на контрольные вопросы

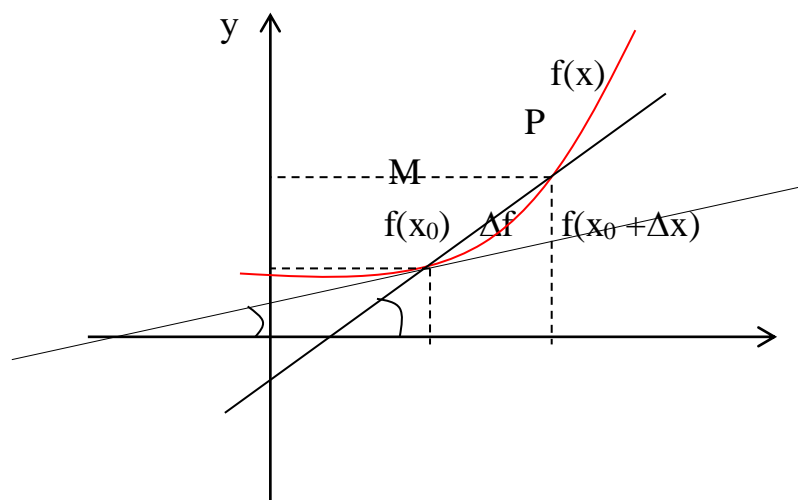
#### **Ход работы**

#### **Краткие теоретические сведения.**

**Производная функции, ее геометрический и физический смысл.**

**Определение.** Производной функции  $f(x)$  в точке  $x = x_0$  называется предел отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента, если он существует.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$



Пусть  $f(x)$  определена на некотором промежутке  $(a, b)$ . Тогда  $\operatorname{tg} \beta = \frac{\Delta f}{\Delta x}$  – тангенс угла наклона секущей MP к графику функции.

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha = k$  – **геометрический смысл производной**

где  $\alpha$  – угол наклона касательной к графику функции  $f(x)$  в точке  $(x_0, f(x_0))$ .

К –угловой коэффициент касательной.

Угол между кривыми может быть определен как угол между касательными, проведенными к этим кривым в какой-либо точке.

**Уравнение касательной к кривой**  $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

**Уравнение нормали к кривой**  $y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$ .

Фактически производная функции показывает как изменяется функция при изменении переменной.

**Физический смысл производной функции  $f(t)$** , где  $t$ - время, а  $f(t)$ - закон движения (изменения координат) – **мгновенная скорость**

**движения.** Соответственно, вторая производная функции- скорость изменения скорости, т.е. **ускорение**.

**Основные правила дифференцирования.**

Обозначим  $f(x) = u$ ,  $g(x) = v$ - функции, дифференцируемые в точке  $x$ .

1)  $(u \pm v)' = u' \pm v'$

2)  $(u \cdot v)' = u \cdot v' + u' \cdot v$

3)  $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$ , если  $v \neq 0$

### **Производные основных элементарных функций.**

1)  $C' = 0$ ;

2)  $(x^m)' = mx^{m-1}$ ;

3)  $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

4)  $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

5)  $(e^x)' = e^x$

6)  $(a^x)' = a^x \ln a$

7)  $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

8)  $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$

9)  $(\sin x)' = \cos x$

10)  $(\cos x)' = -\sin x$

11)  $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

12)  $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

13)  $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

14)  $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

15)  $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$

16)  $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

### ***Производная сложной функции.***

Пусть  $y = f(x)$ ;  $u = g(x)$ , причем область значений функции  $u$  входит в область определения функции  $f$ .

Тогда  $y' = f'(u) \cdot u'$

### ***Логарифмическое дифференцирование.***

Рассмотрим функцию  $y = \ln|x| = \begin{cases} \ln x, & \text{при } x > 0 \\ \ln(-x), & \text{при } x < 0 \end{cases}$ .

Тогда  $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$ , т.к.  $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ ;  $(\ln(-x))' = \frac{(-x)'}{x} = \frac{1}{x}$ .

Учитывая полученный результат, можно записать  $(\ln|f(x)|)' = \frac{f'(x)}{f(x)}$ .

Отношение  $\frac{f'(x)}{f(x)}$  называется **логарифмической производной** функции  $f(x)$ .

Способ **логарифмического дифференцирования** состоит в том, что сначала находят логарифмическую производную функции, а затем производную самой функции по формуле

$$f'(x) = (\ln|f(x)|)' \cdot f(x)$$

Способ логарифмического дифференцирования удобно применять для нахождения производных сложных, особенно показательных функций, для которых непосредственное вычисление производной с использованием правил дифференцирования представляется трудоемким.

### ***Производная показательно-степенной функции.***

Функция называется показательной, если независимая переменная входит в показатель степени, и степенной, если переменная является основанием. Если же и основание и показатель степени зависят от переменной, то такая функция будет показательно – степенной.

Пусть  $u = f(x)$  ( $f(x) > 0$ ) и  $v = g(x)$  – функции, имеющие производные в точке  $x$ .

Найдем производную функции  $y = u^v$ . Логарифмируя, получим:

$$\ln y = v \ln u$$

$$\frac{y'}{y} = v' \ln u + v \frac{u'}{u}$$

$$y' = u^v \left( v \frac{u'}{u} + v' \ln u \right)$$

$$(u^v)' = v u^{v-1} u' + u^v v' \ln u$$

**Пример.** Найти производную функции  $f(x) = (x^2 + 3x)^{x \cos x}$ .

По полученной выше формуле получаем:  $u = x^2 + 3x$ ;  $v = x \cos x$ ;

Производные этих функций:  $u' = 2x + 3$ ;  $v' = \cos x - x \sin x$ ;

Окончательно:

$$f'(x) = x \cos x \cdot (x^2 + 3x)^{x \cos x - 1} \cdot (2x + 3) + (x^2 + 3x)^{x \cos x} (\cos x - x \sin x) \ln(x^2 + 3x)$$

**Пример.** Найти производную функции  $y = \cos x \sin x + \frac{1}{2} \cos^2 x$ . Сначала

преобразуем данную функцию:  $y = \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{2} \cos^2 x$

$y' = \frac{1}{2} 2 \cos 2x + \frac{1}{2} 2 \cos x (-\sin x) = \cos 2x - \sin x \cos x$ . **Пример.** Найти производную

функции  $y = \frac{x^2 e^{x^2}}{x^2 + 1}$ .

$$y' = \frac{(2xe^{x^2} + x^2 2xe^{x^2})(x^2 + 1) - (2x)x^2 e^{x^2}}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x^3 e^{x^2} + 2x^5 e^{x^2} + 2xe^{x^2} + 2x^3 e^{x^2} - 2x^3 e^{x^2}}{(x^2 + 1)^2} =$$

$$= \frac{2xe^{x^2}(x^4 + 1 + x^2)}{(x^2 + 1)^2}$$

### Задание 1. Найти производные функций

**B1**  $Y = x^5 - 5x^2 + 11$ ,  $Y = x^2 \operatorname{ctg} x$

$$Y = \frac{\arctg x}{x}, Y = \sqrt[3]{x^3 + 5}$$

$$Y = e^{-x^2} \ln x, Y = (\cos x - 1)^{2x}$$

**B16**  $Y = x^5 - 5x^2 + 1$ ,  $Y = x^2 \operatorname{ctg} x$

$$Y = \frac{\arctg x}{x}, Y = \sqrt[3]{x^3 + 5}$$

$$Y = e^{-x^2} \ln x, Y = (x - 1)^{2x}$$

**B2**  $Y = 2x^3 - x^2 + 1$ ,  $Y = x^5 \operatorname{tg} x$

$$Y = \frac{\arctg x}{4x}, Y = \sqrt[3]{x^2 - 3}$$

$$Y = \ln \frac{x}{x+1}, Y = (\sin x - 2)^{3x}$$

**B17**  $Y = 2x^3 - x^2 + 17$ ,  $Y = x^5 \operatorname{tg} x$

$$Y = \frac{\arctg x}{4x}, Y = \sqrt[3]{x^2 - 3}$$

$$Y = \ln \frac{x}{x+1}, Y = (\ln x + 8)^{2x}$$

**B3**  $Y = 7x^3 + 3x^2 - 2$ ,  $Y = x \arctg x$

$$Y = \frac{x+5}{\ln x}, Y = \frac{1}{(2x+11)^5}$$

$$Y = \sin^3(4x^2 + \frac{x}{2} - 1)$$

$$Y = (5x + 4)^{4x}$$

**B18**  $Y = 7x^3 + 3x^2 - 2$ ,  $Y = x \arctg x$

$$Y = \frac{x+5}{\ln x}, Y = \frac{1}{(2x+11)^5}$$

$$Y = \sin^3(4x^2 + \frac{x}{2} - 1)$$

$$Y = (\ln x - 2)^{2x}$$

**B4**  $Y = -3x^3 + 5x^4 - 81$ ,  $Y = 2x \sin x$

$$Y = \frac{x}{\sin x}, Y = \sqrt[4]{x^2 - 3}$$

$$Y = \cos \frac{x}{x+1}, Y = (\operatorname{tg} x - 3)^{3x}$$

**B19**  $Y = -3x^3 + 5x^4 - 81$ ,  $Y = 2x \sin x$

$$Y = \frac{x}{\sin x}, Y = \sqrt[4]{x^2 - 3}$$

$$Y = \cos \frac{x}{x+1}, Y = (\ln x + 9)^{5x}$$

**B5**  $Y = 7x^6 - 3x^2 + 32$

$$Y = x^3 \arcsin x$$

$$Y = \frac{2}{(3-6x)^6}, Y = \frac{\cos x}{3x}$$

$$Y = \ln(x - x^2 - 6)$$

$$Y = (\cos x + 4)^x$$

**B20**  $Y = 7x^6 -$

$$3x^2 + 3, Y = x^3 \arcsin x$$

$$Y = \frac{2}{(3-6x)^6}, Y = \frac{\cos x}{3x}$$

$$Y = \ln(x - x^2 - 6)$$

$$Y = (\operatorname{tg} x + 2)^x$$

**B6**  $Y = -x^5 + 3x^3 - 11$ ,  $Y = 3x^2 \operatorname{ctg} x$

$$Y = \frac{\arccos x}{3x}, Y = \sqrt[5]{x^2 - 3}$$

$$Y = e^{3x^2} \ln 2x$$

**B21**  $Y = -x^5 + 3x^3 - 11$ ,  $Y = 3x^2 \operatorname{ctg} x$

$$Y = \frac{\arccos x}{3x}, Y = \sqrt[5]{x^2 - 3}$$

$$Y = e^{3x^2} \ln 2x$$



$$Y=(7x+6)^{2x}$$

**B7**  $Y=3x^4-6x^2+19, Y=x^3\sin x$   
 $Y=\frac{tgx}{3x}, Y=\sqrt[3]{2x^3-6}$   
 $Y=e^{-x^2}\ln x, Y=(3x+1)^{9x}$

**B8**  $Y=-4X^6+9X^2-12, Y=x^3\operatorname{tg}x$   
 $Y=\frac{\operatorname{arctg}x}{6x}, Y=\sqrt[3]{3x+6}$   
 $Y=2^{-x^2}\ln x, Y=(\sin x - 4)^x$

**B9**  $Y=5x^4-2x^3+65, Y=x^2\arcsin x$   
 $Y=\frac{5}{(6x-4)^3}, Y=\sqrt[5]{x^2-5}$   
 $Y=3^{2x^2}\ln, Y=(\cos x + 1)^{2x}$

**B10**  $Y=-2x^6-3x^2+19, Y=x^2\operatorname{ctg}x$   
 $Y=\frac{\operatorname{arctg}x}{x}, Y=\sqrt[3]{x^3+5}$   
 $Y=e^{2x^2}\ln x, Y=(3x-1)^x$

**B11**  $Y=8x^4-6X^5+1, Y=2x^3\arccos x$   
 $Y=\frac{tgx}{5x}, Y=\frac{9}{(6x-5)^4}$   
 $Y=4^{-x^2}\ln x, Y=(9x+3)^{4x}$

**B12**  $Y=3X^2+11x^3-87, Y=3x^3\operatorname{ctg}x$   
 $Y=\frac{\cos x}{2x}, Y=\frac{-3}{(4x+9)^5}$   
 $Y=5^{6x^2}\ln x, Y=(\cos x - 2)^{3x}$

**B13**  $Y=x^5+9X^2-51, Y=x^2\arcsin x$   
 $Y=\frac{x}{\cos x}, Y=\sqrt[4]{8x^3-3}$   
 $Y=e^{2x^2}\ln x, Y=(8x-2)^x$

**B14**  $Y=3x^7-9X^3+11, Y=5x^3\operatorname{tg}x$

$$Y=(tgx-6)^{2x}$$

**B22**  $Y=3x^4-6x^2+1, Y=x^3\sin x$   
 $Y=\frac{tgx}{3x}, Y=\sqrt[3]{2x^3-6}$   
 $Y=e^{-x^2}\ln x, Y=(tgx+3)^{5x}$

**B23**  $Y=-4X^6+9X^2-12, Y=x^3\operatorname{tg}x$   
 $Y=\frac{\operatorname{arctg}x}{6x}, Y=\sqrt[3]{3x+6}$   
 $Y=2^{-x^2}\ln x, Y=(\cos x + 3)^{6x}$

**B24**  $Y=5x^4-2x^3+65, Y=x^2\arcsin x$   
 $Y=\frac{5}{(6x-4)^3}, Y=\sqrt[5]{x^2-5}$   
 $Y=3^{2x^2}\ln x, Y=(\sin x + 2)^{8x}$

**B25**  $Y=-2x^6-3x^2+1, Y=x^2\operatorname{ctg}x$   
 $Y=\frac{\operatorname{arctg}x}{x}, Y=\sqrt[3]{x^3+5}$   
 $Y=e^{2x^2}\ln x, Y=(\sin x - 1)^{3x}$

**B26**  $Y=8x^4-6X^5+1, Y=2x^3\arccos x$   
 $Y=\frac{tgx}{5x}, Y=\frac{9}{(6x-5)^4}$   
 $Y=4^{-x^2}\ln x, Y=(\sin x + 5)^{4x}$

**B27**  $Y=3X^2+11x^3-87, Y=3x^3\operatorname{ctg}x$   
 $Y=\frac{\cos x}{2x}, Y=\frac{-3}{(4x+9)^5}$   
 $Y=5^{6x^2}\ln x, Y=(\sin x - 2)^{2x}$

**B28**  $Y=x^5+9X^2-51, Y=x^2\arcsin x$   
 $Y=\frac{x}{\cos x}, Y=\sqrt[4]{8x^3-3}$   
 $Y=e^{2x^2}\ln x, Y=(\cos x + 6)^{6x}$

**B29**  $Y=3x^7-9X^3+11, Y=5x^3\operatorname{tg}x$

$$Y = \frac{2x}{\arcsin x}, Y = \sqrt[5]{2x^4 - 6}$$

$$Y = e^{3x^3} \ln x, Y = (tgx - 3)^{2x}$$

$$\text{B15 } Y = x^5 - 8x^2 + 16, Y = 4x^2 \operatorname{ctg} x$$

$$Y = \frac{\operatorname{actg} x}{3x}, Y = \frac{9}{(2x-15)^6}$$

$$Y = 6^{2x^2} \ln x, Y = (\ln x + 2)^{6x}$$

$$Y = \frac{2x}{\arcsin x}, Y = \sqrt[5]{2x^4 - 6}$$

$$Y = e^{3x^3} \ln x, Y = (\sin x + 2)^{3x}$$

$$\text{B30 } Y = x^5 - 8x^2 + 16, Y = 4x^2 \operatorname{ctg} x$$

$$Y = \frac{\operatorname{actg} x}{3x}, Y = \frac{9}{(2x-15)^6}$$

$$Y = 6^{2x^2} \ln x, Y = (\sin x - 6)^{6x}$$

2. Найти производные функции.

**a – порядковый номер в журнале**

$$1. y = a x^a - \frac{a}{x^a} + \sqrt[a]{x^{a+6}} - ax + a \quad 2. y = \sqrt[2a]{(ax^2 - 3ax + 5)^3} - \frac{a}{(x+a)^{a-4}}$$

$$3. y = tg^a(x+a) \cdot \arccos ax^2 \quad 4. y = \arcsin^a ax \cdot \log_a(x-a)$$

$$5. y = a^{-x^4} \cdot \operatorname{ctg} ax^3 \quad 6. y = \operatorname{ctg}^2 ax \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{x^a}$$

$$7. y = \frac{\sqrt{ax^2 - 3ax + 5a}}{e^{-x^6}} \quad 8. y = \frac{\lg(ax^2 - 2ax + 3a)}{\operatorname{arctg}^2 ax}$$

## Контрольные вопросы

1. Сформулировать определение производной, правила дифференцирования.
2. Знать таблицу производных элементарных функций.
3. Сформулировать правило нахождения производной сложной функции.

## Теоретические сведения

### Ход работы

### Определение функции двух переменных

Если каждой паре (x; y) значений двух независимых друг от друга переменных величин x и y из некоторого множества D соответствует единственное значение величины, то говорят, что z есть функция двух независимых переменных x и y, определенная на множестве D.

Обозначается:  $z = f(x; y)$  или  $z = z(x; y)$ .

Например,  $S = ab$ ,  $S = S(a; b)$  – функции двух переменных;  $V = abc$ ,  $V = V(a, b, c)$  – функция трех переменных;

### Способы задания функций нескольких переменных

Чтобы задать функцию двух (трех) переменных, нужно указать способ, с помощью которого для каждой пары (тройки) значений аргументов можно найти соответствующее значение функции. Наиболее часто функция задается аналитически – это явное задание функции или неявное задание

### Частные производные первого порядка

Пусть функция двух переменных  $z = f(x, y)$  определена в некоторой окрестности точки  $M(x, y)$  евклидова пространства  $E_2$ . Частная производная функции  $z = f(x, y)$  по аргументу x является обыкновенной производной функции одной переменной x при фиксированном значении переменной y и обозначается как

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x}, z'_x, f'_x.$$

Аналогичным образом определяется частная производная функции  $f(x, y)$  по переменной  $y$  в точке  $M$ , обозначаемая как

$$\frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y}, z'_y, f'_y.$$

Функция, имеющая частные производные, называется дифференцируемой. Совершенно аналогично определяются частные производные функций трех и более переменных. Частная производная функции нескольких переменных характеризует скорость ее изменения по данной координате при фиксированных значениях других координат.

**Пример:**  $z = 2x^2y^3 + 3x + 5y - 7$  — функция двух переменных.

Иногда используют запись  $f(x, y) = 2x^2y^3 + 3x + 5y - 7$ . Также встречаются задания, где вместо буквы  $z$  используется буква  $u$ .

**Найти частные производные первого и второго порядка функции  $z = 2x^2y^3 + 3x^4 + 5y - 7$**

Сначала найдем частные производные первого порядка. Их две.

**Обозначения:**

$z'_x$  или  $\frac{\partial z}{\partial x}$  — частная производная по «икс»

$z'_y$  или  $\frac{\partial z}{\partial y}$  — частная производная по «игрек»

Начнем с  $z'_x$ . **Когда мы находим частную производную по «икс», то переменная  $y$  считается константой (постоянным числом).**

$$\begin{aligned} z'_x &= (2x^2y^3 + 3x^4 + 5y - 7)'_x = 2y^3(x^2)'_x + 3(x^4)'_x + (5y)'_x - (7)'_x = \\ &= 2y^3 \cdot 2x + 3 \cdot 4x^3 + 0 - 0 = 4xy^3 + 12x^3 \end{aligned}$$

Комментарии к выполненным действиям:

(1) Первое, что мы делаем при нахождении частной производной — заключаем  **всю функцию в скобки под штрих с подстрочным индексом.**

(2) Используем правила дифференцирования  $(u \pm v)' = u' \pm v'$ ,  $(Cu)' = Cu'$ . Для простого примера, как этот, оба правила вполне можно применить на одном шаге. Обратите внимание на первое слагаемое: так как  $y$  **считается константой, а любую константу можно вынести за знак производной**, то  $y^3$  мы выносим за скобки. То есть в данной ситуации  $y^3$  ничем не лучше обычного числа. Теперь посмотрим на третье слагаемое  $5y$ : здесь, наоборот, выносить нечего. Так как  $y$  константа, то  $5y$  — тоже константа, и в этом смысле она ничем не лучше последнего слагаемого — «семерки».

(3) Используем табличные производные  $(C)' = 0$  и  $(x^n)' = nx^{n-1}$ .

(4) Теперь  $z'_y$ . **Когда мы находим частную производную по «игрек», то переменная  $x$  считается константой (постоянным числом).**

$$z'_y = (2x^2y^3 + 3x^4 + 5y - 7)'_y \stackrel{(1)}{=} 2x^2(y^3)'_y + (3x^4)'_y + 5(y)'_y - (7)'_y \stackrel{(2)}{=} \\ = 2x^2 \cdot 3y^2 + 0 + 5 \cdot 1 - 0 = 6x^2y^2 + 5$$

(1) Используем те же правила дифференцирования  $(u \pm v)' = u' \pm v'$ ,  $(Cu)' = Cu'$ .  
В первом слагаемом выносим константу  $x^2$  за знак производной, во втором слагаемом ничего вынести нельзя поскольку  $3x^4$  — уже константа.

(2) Используем таблицу производным элементарных функций. **Мысленно поменяем в таблице все «иксы» на «игреки».** В частности, используемые нами формулы выглядят так:  $(C)' = 0$  и  $(y^x)' = xy^{x-1}$ . Итак, частные производные первого порядка найдены

Подведем итог, чем же отличается нахождение частных производных от нахождения «обычных» производных функции одной переменной:

1) Когда мы находим частную производную  $z'_x$ , переменная  $y$  считается константой.

2) Когда мы находим частную производную  $z'_y$ , переменная  $x$  считается константой.

3) Правила и таблица производных элементарных функций справедливы и применимы для любой переменной ( $x$ ,  $y$  либо какой-нибудь другой), по которой ведется дифференцирование.

Шаг второй. Находим частные производные второго порядка. Их четыре.

**Обозначения:**

$z''_{xx}$	или	$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$	—	вторая	производная	по	«икс»
$z''_{yy}$	или	$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$	—	вторая	производная	по	«игрек»
$z''_{xy}$	или	$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$	—	смешанная	производная	«икс	по игрек»
$z''_{yx}$	или	$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$	—	смешанная	производная	«игрек	по икс»

В понятии второй производной нет ничего сложного. Говоря простым языком, **вторая производная — это производная от первой производной.**

Частные производные первого порядка:  
 $z'_x = 4xy^3 + 12x^3$   
 $z'_y = 6x^2y^2 + 5$

Сначала найдем смешанные производные:  
 $z''_{xy} = (z'_x)'_y = (4xy^3 + 12x^3)'_y = 4x(y^3)'_y + (12x^3)'_y = 4x \cdot 3y^2 + 0 = 12xy^2$

Как видите, всё просто: берем частную производную  $z'_x$  и дифференцируем ее еще раз, но в данном случае — уже по «игрек».

Аналогично:

$$z''_{yx} = (z'_y)'_x = (6x^2y^2 + 5)'_x = 6y^2(x^2)'_x + (5)'_x = 6y^2 \cdot 2x + 0 = 12xy^2$$

**В практических примерах можно ориентироваться на следующее равенство:**

$$z''_{xy} = z''_{yx}$$

Таким образом, через смешанные производные второго порядка очень удобно проверить, а правильно ли мы нашли частные производные первого порядка.

Находим вторую производную по «икс».

Никаких изобретений, берем  $z'_x = 4xy^3 + 12x^3$  и дифференцируем её по «икс» еще раз:

$$z''_{xx} = (z'_x)'_x = (4xy^3 + 12x^3)'_x = 4y^3(x)'_x + 12(x^3)'_x = 4y^3 \cdot 1 + 12 \cdot 3x^2 = 4y^3 + 36x^2$$

Аналогично:

$$z''_{yy} = (z'_y)'_y = (6x^2y^2 + 5)'_y = 6x^2(y^2)'_y + (5)'_y = 6x^2 \cdot 2y + 0 = 12x^2y$$

Следует отметить, что при нахождении  $z''_{xx}$ ,  $z''_{yy}$  нужно проявить повышенное внимание, так как никаких чудесных равенств для их проверки не существует.

**Примеры нахождения частных производных первого порядка.**

**Пример 1.**  $z = x^2 - 2xy + 2y^2$ .

Решение. Дифференцируем функцию  $z = f(x, y)$  сначала по  $x$ , полагая  $y$  фиксированной величиной, потом повторяем эту же процедуру, меняя роли  $x$  и  $y$ . Получаем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 2y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 4y - 2x.$$

**Пример 2.**  $z = \arctg xy, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{1 + (xy)^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{1 + (xy)^2}.$

**Пример 3.**  $u = ye^{yz} + \ln(x^2 - 2y + z).$

Решение. Частные производные этой функции трех переменных выражаются следующими формулами:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 - 2y + z}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = (1 + yz)e^{yz} - \frac{2}{x^2 - 2y + z},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = y^2 e^{yz} + \frac{1}{x^2 - 2y + z}.$$

### Задания практической работы

1. Найти и построить область определения сложной функции.
2. Вычислить производную сложной функции.

**B1** 1.  $z = \arcsin(1 - x^2 - y^2)$

2.a)  $z = \sqrt{\ln x} \cdot \frac{y}{x}, \quad x=e, y=1$

б)  $u = x^2 - y^2 + 3z^2, \quad x=1/2, y=1/2, z=1/2$

**B2** 1.  $z = \ln(y - \ln x)$

2.a)  $z = \sqrt{xy} \cdot \ln \frac{y}{x}, \quad x=1, y=2$

в)  $u = 3x^2/2 -$

**B16** 1.  $z = \ln \frac{x}{y}$

2.a)  $z = (x^2 + y^2)^{x^2 - y^2}$

б)  $u = x\sqrt{y} - (z+y)\sqrt{x}, \quad x=1, y=1, z=-2$

**B17** 1.  $z = \ln y - \ln \cos x$

2.a)  $z = x \sin y + x^2, \quad x=3, y=\pi/2$

б)  $u = \sqrt{xy} - \sqrt{4 - z^2}, \quad x=1, y=1, z=0$

$$y^2/2+2z^2, x=2/3, y=2, z=2/3$$

**B3** 1.  $z = \sqrt{\ln x + \ln y}$

2.a)  $z = x^y \frac{1}{xy}, x=e, y=1$

б)  $u = x^3/2 - y^3/2 + 8z^3, x=2, y=2, z=3/2$

**B4** 1.  $z = \sqrt{\sqrt{y} - x} + 2$

2.a)  $z = \sin 1/x e^y, x=\pi/2, y=1$

б)  $u = 3/2x^2 + 3y^2 - 2z^2,$

$x=2, y=1/3, z=3/2$

**B5** 1.  $z = \arcsin \frac{x^2}{y}$

2.a)  $z = \arccos(x^2 - y^2) + 1/\sqrt{xy}$

б)  $u = \frac{\sqrt{x}}{y} - \frac{yz}{x+\sqrt{y}}$

**B6** 1.  $z = \arccos(2x - y)$

2.a)  $z = \arccos \frac{y}{x} + e^{\sqrt{xy}}, x=2, y=1$

б)  $u = \sqrt{2}x^2 - \frac{3}{\sqrt{2}} - 6\sqrt{2}z^2,$

$x=1, y=2/3, z=1/\sqrt{6}$

**B7** 1.  $Z = \sqrt{\ln(2 - x - y)},$

2.a)  $z = \operatorname{tg} 1/x \cdot e^{\frac{y}{x}}, x=1/\pi, y=0$

б)  $u = 2\sqrt{x+y} + y \cdot \operatorname{arctg} z,$

$x=1, y=1/3, z=1/\sqrt{6}$

**B8** 1.  $z = \ln \frac{x}{y}$

2.a)  $z = (x^2 + y^2)^{x^2 - y^2}$

б)  $u = x\sqrt{y} - (z+y)\sqrt{x}, x=1, y=1, z=-2$

**B9** 1.  $z = \ln y - \ln \cos x$

2.a)  $z = x \sin y + x^2, x=3, y=\pi/2$

б)  $u = \sqrt{xy} - \sqrt{4 - z^2}, x=1, y=1, z=0$

**B10** 1.  $z = \ln \sin x - \sqrt{y}$

2.a)  $z = \arcsin \frac{u}{v} - \ln v, u=0, v=1$

б)  $u = (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}, x=0, y=-3, z=4$

**B18** 1.  $z = \ln \sin x - \sqrt{y}$

2.a)  $z = \arcsin \frac{u}{v} - \ln v, u=0, v=1$

б)  $u = (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}, x=0, y=-3, z=4$

**B19** 1.  $z = \ln(y^2/4 - x^2/9 - 1)$

2.a)  $z = \ln \sqrt{x^2 + y^2} + 1/y, x=y=1/\sqrt{2}$

б)  $u = 2/x + 3/2y -$

$\sqrt{6/4}z, x=2/3, y=3/2, z=1/2$

**B20** 1.  $z = \arcsin \frac{y}{x}$

2.a)  $z = \ln y \sqrt{x}, x=1, y=3/5$

б)  $u = 3/x + 4/y -$

$1/\sqrt{6}x, x=1, y=2, z=1/\sqrt{6}$

**B21** 1.  $z = 1 + \sqrt{1 - (x - y)^2}$

2.a)  $z = \cos(1/y) - 1/\sqrt{xy}, x=\pi/2,$

$y=2/\pi$

б)  $u = x\sqrt{y} - yz^2, x=2, y=1, z=-1$

**B22** 1.  $z = \ln(x^2 + y)$

2.a)  $z = e^{x^2} \sqrt{x^2 - y^2}, x=1, y=0$

б)  $u = \sin \frac{y}{xz}, x=2, y=\pi, z=1$

**B23** 1.  $z = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - y^2}$

2.a)  $z = y \ln(x^2 - y^2), x=2, y=1$

б)  $u = x^3/16 + y^2/9 -$

$z^2/8, x=2, y=1/2, z=1/3$

**B24** 1.  $Z = \sqrt{\ln(2 - x - y)},$

2.a)  $z = \operatorname{tg} 1/x \cdot e^{\frac{y}{x}}, x=1/\pi, y=0$

б)  $u = 2\sqrt{x+y} + y \cdot \operatorname{arctg} z,$

$x=1, y=1/3, z=1/\sqrt{6}$

**B25** 1.  $z = \arccos(2x - y)$

2.a)  $z = \arccos \frac{y}{x} + e^{\sqrt{xy}}, x=2, y=1$

б)  $u = \sqrt{2}x^2 - \frac{3}{\sqrt{2}} - 6\sqrt{2}z^2,$

$$x=1, y=2/3, z=1/\sqrt{6}$$

**B11.** 1.  $z = \ln(y^2/4 - x^2/9 - 1)$

2. a)  $z = \ln\sqrt{x^2 + y^2} + 1/y, x=y=1/\sqrt{2}$

б)  $u = 2/x + 3/2y -$

$\sqrt{6/4z}, x=2/3, y=3/2, z=1/2$

**B12.** 1.  $z = \arcsin \frac{y}{x}$

2. a)  $z = \ln y \sqrt{x}, x=1, y=3/5$

б)  $u = 3/x + 4/y -$

$1/\sqrt{6}x, x=1, y=2, z=1/\sqrt{6}$

**B13.** 1.  $z = 1 + \sqrt{1 - (x - y)^2}$

2. a)  $z = \cos(1/y) - 1/\sqrt{xy}, x=\pi/2, y=2/\pi$

б)  $u = x\sqrt{y} - yz^2, x=2, y=1, z=-1$

**B14.** 1.  $z = \ln(x^2 + y)$

2. a)  $z = e^{x^2} \sqrt{x^2 - y^2}, x=1, y=0$

б)  $u = \sin \frac{y}{xz}, x=2, y=\pi, z=1$

**B15.** 1.  $z = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - y^2}$

2.  $z = y \ln(x^2 - y^2), x=2, y=1$

$u = x^3/16 + y^2/9 - z^2/8, x=2, y=1/2, z=1/3$

**B26** 1.  $z = \arcsin \frac{x^2}{y}$

2. a)  $z = \arccos(x^2 - y^2) + 1/\sqrt{xy}$

б)  $u = \frac{\sqrt{x}}{y} - \frac{yz}{x + \sqrt{y}}$

**B27** 1.  $z = \sqrt{\sqrt{y} - x + 2}$

2. a)  $z = \sin 1/x e^y, x=\pi/2, y=1$

б)  $u = 3/2x^2 + 3y^2 - 2z^2,$

$x=2, y=1/3, z=3/2$

**B28** 1.  $z = \sqrt{\ln x + \ln y}$

2. a)  $z = x^y \frac{1}{xy}, x=e, y=1$

б)  $u = x^3/2 -$

$y^3/2 + 8z^3, x=2, y=2, z=3/2$

**B29.**  $z = \ln(y - \ln x)$

2. a)  $z = \sqrt{xy} \ln \frac{y}{x}, x=1, y=2$

в)  $u = 3x^2/2 -$

$y^2/2 + 2z^2, x=2/3, y=2, z=2/3$

**B30** 1.  $z = \arcsin(1 - x^2 - y^2)$

2. a)  $z = \sqrt{\ln x} \frac{y}{x}, x=e, y=1$

б)  $u = x^2 - y^2 + 3z^2,$

$x=1/2, y=1/2, z=1/2$

### Контрольные вопросы:

1. Сформулировать определение функции с двумя переменными.
2. Что называется областью определения функции нескольких переменных?
3. Сформулировать правило нахождения производной функции нескольких переменных.
4. Что такое полный дифференциал функции нескольких переменных?

### Схема исследования функций

- 1) Область существования функции.  
Это понятие включает в себя и область значений и область определения функции.
- 2) Точки разрыва. (Если они имеются).
- 3) Интервалы возрастания и убывания.
- 4) Точки максимума и минимума.
- 5) Максимальное и минимальное значение функции на ее области определения.
- 6) Области выпуклости и вогнутости.

- 7) Точки перегиба.(Если они имеются).
- 8) Асимптоты.(Если они имеются).
- 9) Построение графика.

**Пример.** Исследовать функцию  $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$  и построить ее график.

Находим область существования функции. Очевидно, что *областью определения* функции является область  $(-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; \infty)$ .

В свою очередь, видно, что прямые  $x = 1$ ,  $x = -1$  являются *вертикальными асимптотами* кривой.

*Областью значений* данной функции является интервал  $(-\infty; \infty)$ .

*Точками разрыва* функции являются точки  $x = 1$ ,  $x = -1$ .

Находим *критические точки*.

$$\text{Найдем производную функции } y' = \frac{3x^2(x^2 - 1) - 2x \cdot x^3}{(x^2 - 1)^2} = \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2}$$

Критические точки:  $x = 0$ ;  $x = -\sqrt{3}$ ;  $x = \sqrt{3}$ ;  $x = -1$ ;  $x = 1$ .

Находим промежутки *возрастания* и *убывания* функции. Для этого определяем знаки производной функции на промежутках.

$-\infty < x < -\sqrt{3}$ ,  $y' > 0$ , функция возрастает

$-\sqrt{3} < x < -1$ ,  $y' < 0$ , функция убывает

$-1 < x < 0$ ,  $y' < 0$ , функция убывает

$0 < x < 1$ ,  $y' < 0$ , функция убывает

$1 < x < \sqrt{3}$ ,  $y' < 0$ , функция убывает

$\sqrt{3} < x < \infty$ ,  $y' > 0$ , функция возрастает

Видно, что точка  $x = -\sqrt{3}$  является точкой *максимума*, а точка  $x = \sqrt{3}$  является точкой *минимума*. Значения функции в этих точках равны соответственно  $3\sqrt{3}/2$  и  $-3\sqrt{3}/2$ .

Найдем вторую производную функции

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{(4x^3 - 6x)(x^2 - 1)^2 - (x^4 - 3x^2)4x(x^2 - 1)}{(x^2 - 1)^4} = \frac{(4x^3 - 6x)(x^4 - 2x^2 + 1) - (x^4 - 3x^2)(4x^3 - 4x)}{(x^2 - 1)^4} = \\ &= \frac{4x^7 - 8x^5 + 4x^3 - 6x^5 + 12x^3 - 6x - 4x^7 + 4x^5 + 12x^5 - 12x^3}{(x^2 - 1)^4} = \\ &= \frac{2x^5 + 4x^3 - 6x}{(x^2 - 1)^4} = \frac{2x(x^4 + 2x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^4} = \frac{2x(x^2 + 3)(x^2 - 1)}{(x^2 - 1)^4} = \frac{2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3}. \end{aligned}$$

Определим выпуклость и вогнутость кривой на промежутках.

$-\infty < x < -\sqrt{3}$ ,  $y'' < 0$ , кривая выпуклая  $-\sqrt{3} < x < -1$ ,

$y'' < 0$ , кривая выпуклая

$-1 < x < 0$ ,  $y'' > 0$ , кривая вогнутая  $0 < x < 1$ ,

$y'' < 0$ , кривая выпуклая

$1 < x < \sqrt{3}$ ,  $y'' > 0$ , кривая вогнутая  $\sqrt{3} < x < \infty$ ,

$y'' > 0$ , кривая вогнутая



Находим промежутки *возрастания* и *убывания* функции. Для этого определяем знаки производной функции на промежутках.

$-\infty < x < -\sqrt{3}$ ,  $y' > 0$ , функция возрастает

$-\sqrt{3} < x < -1$ ,  $y' < 0$ , функция убывает

$-1 < x < 0$ ,  $y' < 0$ , функция убывает

$0 < x < 1$ ,  $y' < 0$ , функция убывает

$1 < x < \sqrt{3}$ ,  $y' < 0$ , функция убывает

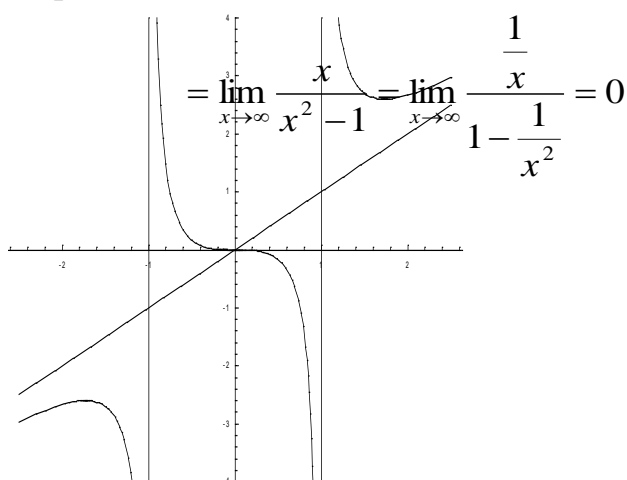
$\sqrt{3} < x < \infty$ ,  $y' > 0$ , функция возрастает

Видно, что точка  $x = -\sqrt{3}$  является точкой *максимума*, а точка  $x = \sqrt{3}$  является точкой *минимума*. Значения функции в этих точках равны соответственно  $3\sqrt{3}/2$  и  $-3\sqrt{3}/2$ .

Про вертикальные *асимптоты* было уже сказано выше. Теперь найдем *наклонные асимптоты*.  $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{x^2}} = 1$ ;

Итого,

Строим  $b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3}{x^2 - 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3 - x^3 + x}{x^2 - 1} \right) =$  уравнение наклонной асимптоты –  $y = x$ . *график функции:*



**Задание 1.** Исследовать функцию по предложенной схеме и построить ее график:

1. Найти область определения функции.
2. Исследовать на четность и нечетность.
3. Исследовать на периодичность.
4. Найти стационарные и критические точки первого рода.
5. Найти промежутки возрастания и убывания функции, экстремум.
6. Найти стационарные и критические точки второго рода.
7. Найти промежутки выпуклости функции, точки перегиба.
8. Найти асимптоты (вертикальные, горизонтальные, наклонные).
9. Найти точки пересечения графика функции с осями координат.
10. Найти дополнительные точки.

11. По результатам исследования построить график функции.

B1. a)  $y = x^2(2-x)^2$ ; б)  $y = \frac{x^2-2x-8}{x+1}$

B16. a)  $y = x^3 - 12x^2 - 9x + 1$ ;

б)  $y = \frac{x^2}{x^2 + 1}$

B2. a)  $y = x\sqrt{1-x}$ ;

б)  $y = \frac{x^2+2x-8}{x+3}$

B17. a)  $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x - 1$ ; б)  $y = \frac{x^2}{x-2}$

B3. a)  $y = x - \arctg x$ ;

б)  $y = \frac{x^2-3x-10}{x-1}$

B18. a)  $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + \frac{1}{3}$ ; б)  $y = \frac{x^2}{x^2-3}$

B4. a)  $y = \frac{8}{4-x^2}$ ;

б)  $y = \frac{x^2+3x-10}{x+3}$

B19. a)  $y = -x^3 + 3x^2 + 9x$ ;

б)  $y = \frac{x^2-1}{3x+5}$

B5. a)  $y = \sqrt{\frac{1-x}{x}}$ ;

б)  $y = \frac{x^2-4x-12}{x+3}$

B20. a)  $y = x^5 - 20x$  ; б)  $y = 1 - \frac{4}{x^2}$

B6. a)  $y = \frac{x^2}{1+x^2}$ ;

б)  $y = \frac{x^2+4x-12}{x-3}$

B21. a)  $y = x^3 + 15x^2 - x - 250$  б)  $y = \frac{x^2-1}{x}$

B7. a)  $y = \frac{x}{x^2+16}$ ;

б)  $y = \frac{x^2-x-20}{x+2}$

B22. a)  $y = \sqrt[3]{x+2}$  ; б)  $y = \frac{x}{x^2+9}$

B8. a)  $y = e^{\frac{x^2}{4}}$ ;

б)  $y = \frac{x^2+x-20}{x-2}$

B23. a)  $y = x^2 - 4x$  ;

б)  $y = 3x + \frac{3}{x} + 5$

B9. a)  $y = \frac{x}{x+1}$ ;

б)  $y = \frac{x^2-2x-15}{x+4}$

B24. a)  $y = 3x - x^3$  ;

б)  $y = \frac{x^2-2x-8}{x+1}$

B10. a)  $y = 2x - x^2$ ;

б)  $y = \frac{x^2+2x-15}{x-1}$

B25. a)  $y = \frac{2}{3}x^3 - 2x = 1$ ; б)  $y = -\frac{x}{x^2+9}$

B11. a)  $y = x^3 - 3x^2 + 4$  ; б)  $y = \frac{5-2x}{x^2-4}$

B26. a)  $y = 2x^2 - x^4$  ; б)  $y = \frac{1-x^2}{x}$

B12. a)  $y = -x^3 + 3x^2 - 2$  ;

б)  $y = \frac{x^2}{x^2-1}$

B27. a)  $y = 2x^2 - 8$  ;

б)  $y = \frac{x}{x^2-1}$

B13. a)  $y = x^3 - 12x + 6$  ; б)  $y = \frac{x}{x^2+4}$

B28. a)  $y = x^4 - 8x^2 + 3$  ; б)  $y = \frac{1}{x^2-1}$

$$B14. a) y = x^3 + 9x^2 + 24x + 12$$

$$б) y = \frac{6x^3 + 18}{x^2}$$

$$B15. a) y = -x^3 + 3x^2 - 2 ;$$

$$б) y = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$$

$$B29. a) y = \frac{3}{4-x^2};$$

$$б) y = \frac{x^2 + 3x - 10}{x + 3}$$

$$B30. a) y = x\sqrt{4-x};$$

$$б) y = \frac{x^2 - 2x - 8}{x + 3}$$

### Контрольные вопросы:

1. Что такое область определения функции?
2. Какие функции называются четными, нечетными, общего вида?
3. Виды точек разрыва.
4. Что такое нули функции?
5. Как определить промежутки выпуклости?
6. Виды асимптот.

## Практическая работа № 4

по теме «Решение практических задач с применением интегралов»

**Цель:** проверить умение находить неопределенные и определенные интегралы используя методы непосредственного интегрирования, интегрирование подстановкой и по частям.

**Время выполнения** 90 минут

**Материальное обеспечение**

1. Теоретические сведения

2. Задание

3. Лист А 4

4. Калькуляторы

**Порядок выполнения работы**

1. Изучить задание

2. Изучить теоретические сведения

3. Выполнить и оформить работу

4. Показать результаты преподавателю

**Домашнее задание**

1. Подготовить ответы на контрольные вопросы

**Ход работы**

**Теоретические сведения**

Определение Пусть  $f(x)$  -- функция, заданная на объединении интервалов вещественной оси. Набор всех первообразных для  $f(x)$  называется *неопределённым интегралом* от  $f(x)$  и обозначается  $\int f(x) dx$ . Операция нахождения неопределённого интеграла по заданной функции  $f(x)$  называется *интегрированием* этой функции; найти неопределённый интеграл означает *проинтегрировать* данную функцию. Функция  $f(x)$ , записанная после знака интеграла (или, как часто говорят, *под* знаком интеграла), называется *подынтегральной функцией*. Согласно доказанным выше теоремам о виде первообразных, неопределённый интеграл от функции  $f(x)$  состоит из функций вида  $F(x) + C$ , где  $F(x)$  -- какая-либо фиксированная первообразная для  $f(x)$ , а  $C$  -- величина, постоянная на каждом из непересекающихся интервалов, на которых задана функция  $f(x)$ . Поэтому можно написать такую формулу:

$$\int f(x) dx = F(x) + C.$$

### Таблица интегралов элементарных функций

1	$\int 0 \cdot dx = C$	11	$\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$
2	$\int 1 \cdot dx = x + C$	12	$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$
3	$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1).$	13	$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$
4	$\int \frac{1}{x} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln x  + C$	14	$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$
5	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$ $\int e^x dx = e^x + C$	15	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left  \frac{x-a}{x+a} \right  + C$
6	$\int \sin x dx = -\cos x + C$	16	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C = -\arccos \frac{x}{a} + C$
7	$\int \cos x dx = \sin x + C$	17	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \alpha}} = \ln \left  x + \sqrt{x^2 + \alpha} \right  + C$
8	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$	18	$\int \sqrt{x^2 + \alpha} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + \alpha} + \frac{\alpha}{2} \ln \left  x + \sqrt{x^2 + \alpha} \right $
9	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$	19	$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C$
10	$\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$	20	$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left  \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right  + C;$ $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left  \operatorname{tg} \frac{x + \pi/2}{2} \right  + C$

**Замена переменной в неопределённом интеграле (интегрирование подстановкой).**

Пусть  $\int f(x) dx = F(x) + C$ . Тогда  $\int f(t(x))t'(x) dx = F(t(x)) + C$ . Здесь  $t(x)$  - дифференцируемая монотонная функция.

При решении задач замену переменной можно выполнить двумя способами.

1. Если в подынтегральной функции удаётся сразу заметить оба сомножителя, и  $f(t(x))$ , и  $t'(x)$ , то замена переменной осуществляется подведением множителя  $t'(x)$  под знак дифференциала:  $t'(x)dx = dt$ , и задача сводится к вычислению интеграла  $\int f(t)dt$ . Например,

$$\int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{-\sin x dx}{\cos x} = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = \int \frac{dt}{t},$$

где  $t = \cos x$   $= -\ln |\cos x| + C$  (аналогично находится интеграл от  $\operatorname{ctg} x$ );

$$\int e^{\sin x} \cos x dx = \int e^{\sin x} d \sin x = \int e^t dt, \text{ где } t = \sin x$$

$$= e^{\sin x} + C.$$

В более сложных задачах операция подведения под знак дифференциала может выполняться несколько раз:

$$\int e^{\operatorname{arctg}^5 x^2} \operatorname{arctg}^4 x^2 \frac{x}{1+x^4} dx =$$

(самое неприятное в подынтегральной функции - пятая степень арккотангенса под знаком экспоненты; если дальше не найдётся дифференциал этой функции, то интеграл, возможно, взять вообще не удастся; в то же время следующий множитель  $(\operatorname{arctg}^4 x^2)$  - производная (с точностью до постоянного множителя) степенной функции; затем следуют производные (опять с точностью до постоянных множителей) функций  $\operatorname{arctg} x^2$  и  $x^2$  по своим аргументам)

$$= \frac{1}{2} \int e^{\operatorname{arctg}^5 x^2} \operatorname{arctg}^4 x^2 \frac{1}{1+x^4} (2x dx) = \frac{1}{2} \int e^{\operatorname{arctg}^5 x^2} \operatorname{arctg}^4 x^2 \frac{1}{1+x^4} dx^2 =$$

$$= -\frac{1}{2} \int e^{\operatorname{arctg}^5 x^2} \operatorname{arctg}^4 x^2 \left( \frac{-dx^2}{1+x^4} \right) = -\frac{1}{2} \int e^{\operatorname{arctg}^5 x^2} \operatorname{arctg}^4 x^2 d \operatorname{arctg} x^2 =$$

$$= -\frac{1}{2 \cdot 5} \int e^{\operatorname{arctg}^5 x^2} (5 \operatorname{arctg}^4 x^2 d \operatorname{arctg} x^2) = -\frac{1}{10} \int e^{\operatorname{arctg}^5 x^2} (d \operatorname{arctg}^5 x^2) = -\frac{1}{10} e^{\operatorname{arctg}^5 x^2} + C$$

2. Замену переменной можно осуществлять формальным сведением подынтегрального выражения к новой переменной. Так, в  $\int e^{\sin x} \cos x dx$  имеет смысл перейти к переменной (сделать подстановку)  $t = \sin x$ . Выражаем все множители подынтегрального выражения через переменную  $t$ :

$$x = \arcsin t, dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}; \cos x = \sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{1-t^2}$$

; в результате  $\int e^{\sin x} \cos x dx =$

$$= \int e^t \sqrt{1-t^2} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int e^t dt = e^t + C =$$

(возвращаемся к исходной переменной)

$$= e^{\sin x} + C.$$

Другие примеры:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x-5}(1+\sqrt[3]{x-5})}.$$

Подынтегральная функция содержит два множителя, ни один из которых не является производной другого, поэтому подводить их под знак дифференциала бесполезно. Попытаемся ввести новую переменную, такую,

чтобы корни извлекались:  $\int \frac{dx}{\sqrt{x-5}(1+\sqrt[3]{x-5})} = \left| \begin{array}{l} x-5 = t^6; t = \sqrt[6]{x-5}; \\ x = t^6 + 5; dx = 6t^5 dt \end{array} \right| =$

$$\int \frac{6t^5 dt}{t^3(1+t^2)} = 6 \int \frac{t^2 dt}{t^2+1} = 6 \int \frac{(t^2+1-1)dt}{t^2+1} =$$

$$= 6 \left( \int dt - \int \frac{dt}{t^2+1} \right) = 6(t - \arctg t) + C = 6(\sqrt[6]{x-5} - \arctg \sqrt[6]{x-5}) + C$$

Рассмотрим

$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$  (интеграл №19 из табл.). Здесь подынтегральная функция состоит из единственного множителя; можно опять попытаться сделать такую замену переменной, чтобы корень извлёкся. Структура подкоренного выражения подсказывает эту замену:  $x = a \sin t$  (или  $x = a \cos t$ ,  $a > 0$ ):

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \left| \begin{array}{l} x = a \sin t, dx = a \cos t dt, \\ \sqrt{a^2 - x^2} = a \sqrt{1 - \sin^2 t} = a \cos t \end{array} \right| = a^2 \int \cos^2 t \cdot dt$$

. Интеграл свёлся к

интегралу от квадрата косинуса. При интегрировании чётных степеней синуса и косинуса часто применяются формулы, выражающие  $\sin^2 t$  и  $\cos^2 t$  через

косинус двойного угла:  $\sin^2 t = \frac{1 - \cos 2t}{2}$ ;  $\cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2}$ . Поэтому

$$a^2 \int \cos^2 t \cdot dt = a^2 \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{a^2}{2} \left( \int dt + \int \cos 2t dt \right) = \frac{a^2}{2} \left( t + \frac{1}{2} \int \cos 2t \cdot d2t \right) =$$

$$= \frac{a^2}{2} \left( t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) + C = \frac{a^2}{2} \left( t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) + C = \frac{a^2}{2} (t + \sin t \cos t) + C = \left| \begin{array}{l} \sin t = \frac{x}{a}; \cos t = \\ \sqrt{1 - \sin^2 t} = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + C$$

Примеры: 1.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \left| \begin{array}{l} t = x + \sqrt{x^2 + a}; t - x = \sqrt{x^2 + a}; (t - x)^2 = x^2 + a; \\ t^2 - 2tx + x^2 = x^2 + a; x = \frac{t^2 - a}{2t}; \sqrt{x^2 + a} = t - \frac{t^2 - a}{2t} \\ = \frac{t^2 + a}{2t}; dx = \frac{t^2 + a}{2t^2} dt \end{array} \right| = \ln |t| + C = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a} \right| + C$$

$$2. \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \int \frac{2a}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \int \frac{(x+a) - (x-a)}{(x+a)(x-a)} dx = \frac{1}{2a} \int \left( \frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2a} \left( \int \frac{d(x-a)}{x-a} - \int \frac{d(x+a)}{x+a} \right) = \frac{1}{2a} (\ln |x-a| - \ln |x+a|) + C = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C.$$

### Интегрирование по частям.

Интегрирование по частям - приём, который применяется почти так же часто, как и замена переменной. Пусть  $u(x)$  и  $v(x)$  - функции, имеющие непрерывные частные производные. Тогда по формуле дифференцирования произведения  $d(uv) = u \cdot dv + v \cdot du \Rightarrow u \cdot dv = d(uv) - v \cdot du$ . Находим неопределённые интегралы для обеих частей этого равенства (при этом  $\int d(uv) = uv + C$ ):

$$\int u \cdot dv = uv - \int v \cdot du.$$

Эта формула и называется формулой интегрирования по частям. Часто ее записывают в производных ( $dv = v' \cdot dx$ ,  $du = u' \cdot dx$ ):

$$\int u \cdot v' dx = uv - \int v \cdot u' dx.$$

Примеры:

$$\int x \sin x dx = \left| \begin{array}{l} u = x; dv = \sin x dx; \\ du = dx; v = \int \sin x dx = -\cos x \end{array} \right| = x(-\cos x) - \int (-\cos x) dx = -x \cos x + \sin x + C.$$

$$\int \ln x dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x; dv = dx; \\ du = \frac{dx}{x}; v = x \end{array} \right| = x \ln x - \int x \frac{dx}{x} = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C.$$

Формула интегрирования по частям может применяться неоднократно. При наличии небольшого опыта в простых интегралах нет необходимости выписывать промежуточные выкладки ( $u = \dots$ ,  $dv = \dots$ ), можно сразу применять формулу, представив интеграл в виде  $\int u \cdot dv$ :

$$\begin{aligned} \int e^x x^3 dx &= \int x^3 (e^x dx) = \int x^3 de^x = x^3 e^x - \int e^x dx^3 = x^3 e^x - \int e^x 3x^2 dx = x^3 e^x - 3 \int x^2 (e^x dx) = \\ &= x^3 e^x - 3 \int x^2 de^x = x^3 e^x - 3(x^2 e^x - \int e^x dx^2) = x^3 e^x - 3(x^2 e^x - \int e^x 2x dx) = \\ &= x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6 \int x de^x = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6(xe^x - \int e^x dx) = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6xe^x - 6 \int e^x dx = \\ &= x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6xe^x - 6e^x + C = e^x (x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + C. \end{aligned}$$

Приведённые примеры показывают, для каких функций надо применять (или попытаться применить) формулу интегрирования по частям:

Интегралы вида  $\int P_n(x) \cdot \cos ax \cdot dx$ ,  $\int P_n(x) \cdot \sin ax \cdot dx$ ,  $\int P_n(x) \cdot a^x \cdot dx$ , где  $P_n(x)$  - многочлен  $n$ -ой степени. Так, для  $\int P_n(x) \cdot \cos ax \cdot dx$  имеем  $u = P_n(x)$ ,  $dv = \cos ax dx$ ,  $du = (P_n(x))' dx = P_{n-1}(x) dx$ ,  $v = (\sin ax)/a$ , и

$$\int P_n(x) \cdot \cos ax \cdot dx = P_n(x) \cdot (\sin ax)/a - 1/a \int P_{n-1}(x) \cdot \sin ax \cdot dx.$$

В результате мы получили интеграл того же типа с многочленом степени на единицу меньше. После  $n$ -кратного применения формулы степень многочлена уменьшится до



нуля, т.е. многочлен превратится в постоянную, и интеграл сведётся к табличному.

Интегралы  $\int P_n(x) \cdot f(x) \cdot dx$ , где  $f(x)$  - трансцендентная функция, имеющая дробно-рациональную или дробно-иррациональную производную ( $\ln x$ ,  $\operatorname{arctg} x$ ,  $\operatorname{arcsctg} x$ ,  $\arcsin x$ ,  $\arccos x$ ). В этом случае имеет смысл взять  $u = f(x)$ ,  $dv = P_n(x)dx$ , для того, чтобы в интеграле  $\int v du$  участвовала не  $f(x)$ , а её производная. Пример:

$$\begin{aligned} \int x \cdot \arcsin x \cdot dx &= \left| \begin{array}{l} u = \arcsin x; dv = x dx; \\ du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}; v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2} \arcsin x - \int \frac{x^2 dx}{2\sqrt{1-x^2}} = \left| \begin{array}{l} x = \sin t; dx = \cos t dt \\ \sqrt{1-x^2} = \cos t \end{array} \right| = \\ &= \frac{x^2}{2} \arcsin x - \frac{1}{2} \int \sin^2 t dt = \frac{x^2}{2} \arcsin x - \frac{1}{4} \int (1 - \cos 2t) dt = \frac{x^2}{2} \arcsin x - \frac{1}{4} \left( t - \frac{\sin 2t}{2} \right) + C = \\ &= \frac{x^2}{2} \arcsin x - \frac{t}{4} + \frac{\sin t \cos t}{4} + C = \frac{x^2}{2} \arcsin x - \frac{\arcsin x}{4} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{4} + C. \end{aligned}$$

Для некоторых функций применяется приём “сведения интеграла к самому себе”. С помощью интегрирования по частям (возможно, неоднократного) интеграл выражается через такой же интеграл; в результате получается уравнение относительно этого интеграла, решая которое, находим значение интеграла. Примеры:

Найти  $I = \int \sqrt{a^2 - x^2} dx$  (это интеграл №19 из табл. 10.3. неопределённых интегралов; в предыдущем параграфе мы вычислили этот интеграл с помощью тригонометрической подстановки  $x = a \sin t$ ).

$$\begin{aligned} I = \int \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \left| \begin{array}{l} u = \sqrt{a^2 - x^2}; dv = dx; \\ du = -\frac{x dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}; v = x \end{array} \right| = x \sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = x \sqrt{a^2 - x^2} - \int \frac{-x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \\ &= x \sqrt{a^2 - x^2} - \int \frac{(a^2 - x^2) - a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = x \sqrt{a^2 - x^2} - \int \frac{a^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx + \int \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \\ &= x \sqrt{a^2 - x^2} - \int \sqrt{a^2 - x^2} dx + a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = x \sqrt{a^2 - x^2} - I + a^2 \arcsin \frac{x}{a} \end{aligned}$$

В результате для искомого интеграла мы получили уравнение  $I = x \sqrt{a^2 - x^2} - I + a^2 \arcsin \frac{x}{a}$ ,

решая которое, получаем  $2I = x \sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a} + C$  (константа  $C$  появилась вследствие того, что интегралы  $I$  в правой и левой частях уравнения определены с точностью до произвольной постоянной) и

$$I = \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C \quad \left( \text{константа } \frac{C}{2} \text{ переобозначена через } C \right).$$

Сведение интеграла к самому себе – самый простой способ нахождения часто встречающихся интегралов вида  $\int e^{ax} \cos bx dx$  и  $\int e^{ax} \sin bx dx$  ( $a, b = \text{const}$ ). Например,

$$\begin{aligned} I = \int e^{ax} \cos bx \cdot dx &= \left| \begin{array}{l} u = \cos bx; dv = e^{ax} dx \\ du = -b \sin bx dx; v = e^{ax} / a \end{array} \right| = \frac{e^{ax}}{a} \cos bx + \frac{b}{a} \int e^{ax} \sin bx \cdot dx = \\ &= \left| \begin{array}{l} u = \sin bx; dv = e^{ax} dx \\ du = b \cos bx dx; v = e^{ax} / a \end{array} \right| = \frac{e^{ax}}{a} \cos bx + \frac{b}{a} \left( \frac{e^{ax}}{a} \sin bx - \frac{b}{a} \int e^{ax} \cos bx \cdot dx \right) = \\ &= \frac{e^{ax}}{a} \cos bx + \frac{be^{ax}}{a^2} \sin bx - \frac{b^2}{a^2} I. \end{aligned}$$

Итак, после двукратного интегрирования по частям получено уравнение относительно  $I$ :

$$I = \frac{e^{ax}}{a} \cos bx + \frac{be^{ax}}{a^2} \sin bx - \frac{b^2}{a^2} I,$$

решение которого

$$I = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos bx + b \sin bx) + C.$$

При нахождении этих интегралов не принципиально, положим ли мы  $u = \cos bx$ ,  $dv = e^{ax} dx$  или  $u = e^{ax}$ ,  $dv = \cos bx dx$ ; важно только при втором применении формулы интегрирования по частям загонять под знак дифференциала функцию того же типа, что и при первом (показательную или тригонометрическую).

Ещё один вид формул, которые обычно получаются с помощью интегрирования по частям, и используются для нахождения интегралов – **рекуррентные соотношения**. Если подынтегральная функция зависит от некоторого параметра  $n$ , и получено соотношение, которое выражает интеграл через аналогичный интеграл с меньшим значением  $n$ , то это соотношение и называется рекуррентным соотношением. Примеры:

$I_n = \int \cos^n x \cdot dx$ . Представим подынтегральную функцию в виде  $\cos^n x = \cos^{n-2} x \cdot \cos^2 x = \cos^{n-2} x \cdot (1 - \sin^2 x) = \cos^{n-2} x - \sin x \cos^{n-2} x \sin x$ ; интеграл от первого слагаемого аналогичен исходному с значением параметра  $n$  на две единицы меньше; к интегралу от второго слагаемого применим формулу интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} I_n = \int \cos^n x \cdot dx &= \int \cos^{n-2} x \cdot dx - \int \sin x \cos^{n-2} x \sin x dx = \left| \begin{array}{l} u = \sin x; dv = \cos^{n-2} x \sin x dx; \\ du = \cos x dx; v = -\frac{\cos^{n-1} x}{n-1}; \end{array} \right| = \\ &= I_{n-2} - \sin x \left( -\frac{\cos^{n-1} x}{n-1} \right) + \int \left( -\frac{\cos^{n-1} x}{n-1} \right) \cos x \cdot dx = I_{n-2} + \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n-1} - \frac{1}{n-1} \int \cos x^n \cdot dx = \\ &= I_{n-2} + \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n-1} - \frac{1}{n-1} I_n \Rightarrow \left( 1 + \frac{1}{n-1} \right) I_n = I_{n-2} + \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n-1} \Rightarrow I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} + \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n} \end{aligned}$$

Теперь, зная  $I_1 = \int \cos x \cdot dx = \sin x + C$ ,

$$I_2 = \int \cos^2 x \cdot dx = \int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \left( x + \frac{\sin 2x}{2} \right) + C,$$

мы можем выписать

$$I_3 = \int \cos^3 x \cdot dx = \frac{3-1}{3} I_1 + \frac{\sin x \cos^{3-1} x}{3} = \frac{2}{3} \sin x + \frac{\sin x \cos^2 x}{3} + C;$$

$$I_4 = \int \cos^4 x \cdot dx = \frac{4-1}{4} I_2 + \frac{\sin x \cos^{4-1} x}{4} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} (2x + \sin 2x) + \frac{\sin x \cos^3 x}{4} + C;$$

$$I_5 = \int \cos^5 x \cdot dx = \frac{5-1}{5} I_3 + \frac{\sin x \cos^{5-1} x}{5} = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{3} (2 \sin x + \sin x \cos^2 x) + \frac{\sin x \cos^4 x}{5} + C$$

и т.д.

**Задания практической работы** Найти неопределённые интегралы

### 1.

- |  |  |   |
|--|--|---|
| 1.1. $\int x^3(3x+1)^2 dx$   | 1.11. $\int 4x^2(4x+2)^2 dx$   | 1.21. $\int 3\sqrt{x}(2-3x)^2 dx$   |
| 1.2. $\int -2\sqrt{x}(4-3x)^2 dx$  | 1.12. $\int \frac{x^2-3x^3+2x^7}{x} dx$                                    | 1.22. $\int \frac{2x^3+3x^4-5x^6}{x^2} dx$                                |
| 1.3. $\int \frac{4x^3+x^4-8x^5}{x^3} dx$                                 | 1.13. $\int \frac{7x^4-4x^4+6x^4}{x^2} dx$                                 | 1.23. $\int \frac{x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{4}{7}}-x^{\frac{1}{2}}}{x} dx$ |
| 1.4. $\int \frac{x^{\frac{1}{4}}-x^{\frac{3}{7}}-x^{\frac{1}{3}}}{x} dx$ | 1.14. $\int \frac{x^{\frac{3}{4}}-x^{\frac{3}{5}}+x^{\frac{2}{3}}}{x} dx$  | 1.24. $\int \frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[4]{x^5}-\sqrt{x}}{x} dx$            |
| 1.5. $\int \frac{\sqrt[5]{x^2}+\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt{x}}{x} dx$           | 1.15. $\int \frac{3\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{x} dx$             | 1.25. $\int \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} dx$                                    |
| 1.6. $\int \frac{1}{\sqrt{3-x^2}} dx$                                    | 1.16. $\int \frac{3}{\sqrt{4-4x^2}} dx$                                    | 1.26. $\int \frac{3}{\sqrt{x^2+4}} dx$                                    |
| 1.7. $\int \frac{3}{1+x^2} dx$   | 1.17. $\int \frac{5}{25+x^2} dx$   | 1.27. $\int \frac{2}{2+3x^2} dx$  |
| 1.8. $\int \left( e^x + 2x - 4^x + 3x^{\frac{1}{2}} \right) dx;$         | 1.18. $\int \left( \frac{2}{x} + 8e^x + 5^x - x^{\frac{2}{3}} \right) dx;$ | 1.28. $\int \frac{2\sin^3 x + 3}{\sin^2 x} dx$                            |
| 1.9. $\int \frac{2\cos^3 x + 5}{\cos^2 x} dx$                            | 1.19. $\int \frac{2\cos^2 x - 4}{\cos^2 x} dx$                             | 1.29. $\int \frac{1+3\cos^2 x}{\cos^2 x} dx$                              |
| 1.10. $\int \frac{5}{3} \sqrt[3]{x^2} - 6 \cos x dx$                     | 1.20. $\int \frac{1}{2} \sin x + \sqrt[4]{x^7} dx$                         | 1.30. $\int (1-x)(2-\sqrt{x}) dx$   |

### 2.

- |  |   |                                  |
|--|---|----------------------------------|
| 2.1. $\int \frac{\sqrt{3}}{9x^2-3} dx$ | 2.11. $\int \frac{1}{\sqrt{5x^2+3}} dx$ | 2.21. $\int \frac{1}{3x^2-2} dx$ |
| 2.2. $\int \frac{1}{\sqrt{9x^2+3}} dx$ | 2.12. $\int \frac{1}{\sqrt{4-7x^2}} dx$ | 2.22. $\int \frac{1}{4x^2+3} dx$ |

$$2.3. \int \frac{1}{9x^2 + 3} dx$$

$$2.4. \int \frac{9}{\sqrt{9x^2 - 3}} dx$$

$$2.5. \int \frac{1}{\sqrt{3 - 9x^2}} dx$$

$$2.6. \int \frac{1}{7x^2 - 4} dx$$

$$2.7. \int \frac{3}{\sqrt{7x^2 - 4}} dx$$

$$2.8. \int \frac{1}{5x^2 + 3} dx$$

$$2.9. \int \frac{1}{5x^2 - 3} dx$$

$$2.10. \int \frac{1}{\sqrt{3 - 5x^2}} dx$$

$$2.13. \int \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3 - 4x^2}} dx$$

$$2.14. \int \frac{1}{\sqrt{2x^2 - 9}} dx$$

$$2.15. \int \frac{1}{2x^2 + 7} dx$$

$$2.16. \int \frac{1}{\sqrt{3x^2 + 1}} dx$$

$$2.17. \int \frac{1}{3x^2 + 2} dx$$

$$2.18. \int \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7 - 2x^2}} dx$$

$$2.19. \int \frac{\sqrt{14}}{2x^2 - 7} dx$$

$$2.20. \int \frac{1}{8x^2 + 9} dx$$

$$2.23. \int \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 3}} dx$$

$$2.24. \int \frac{1}{\sqrt{3 - 4x^2}} dx$$

$$2.25. \int \frac{1}{4x^2 - 3} dx$$

$$2.26. \int \frac{2}{4 + 3x^2} dx$$

$$2.27. \int \frac{2}{\sqrt{4x^2 - 3}} dx$$

$$2.28. \int \frac{1}{4x^2 + 7} dx$$

$$2.29. \int \frac{1}{8x^2 - 9} dx$$

$$2.30. \int \frac{1}{\sqrt{9 - 8x^2}} dx$$

### 3.

$$3.1. \int \frac{dx}{(2x+1)\sqrt[3]{\ln^2(2x+1)}}$$

$$3.2. \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt[3]{\ln^2(x+1)}}$$

$$3.3. \int \frac{dx}{(1-x)\sqrt[3]{\ln^2(1-x)}}$$

$$3.4. \int \frac{\sqrt[3]{\ln^2(1-x)}}{(1-x)} dx$$

$$3.5. \int \frac{\sqrt[5]{\ln^2(1+x)}}{(1+x)} dx$$

$$3.6. \int \frac{\sqrt[7]{\ln^2(1+x)}}{(1+x)} dx$$

$$3.7. \int \frac{\sqrt{\ln^5(1+x)}}{(1+x)} dx$$

$$3.8. \int \frac{\sqrt[3]{\ln(1+3x)}}{(1+3x)} dx$$

$$3.9. \int \frac{\sqrt{\ln^3(3+x)}}{(3+x)} dx$$

$$3.11. \int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{\ln^3(1-x)}}$$

$$3.12. \int \frac{\sqrt{\ln^3(1+x)}}{(1+x)} dx$$

$$3.13. \int \frac{\sqrt{\ln(2x-1)}}{(2x-1)} dx$$

$$3.14. \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt[3]{\ln(x+1)}}$$

$$3.15. \int \frac{\sqrt{\ln^3(6+x)}}{(6+x)} dx$$

$$3.16. \int \frac{\sqrt[3]{\ln(x+4)}}{(x+4)} dx$$

$$3.17. \int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{\ln(x+2)}}$$

$$3.18. \int \frac{\sqrt{\ln^7(1+x)}}{(1+x)} dx$$

$$3.19. \int \frac{\ln^3(1-x)}{(1-x)} dx$$

$$3.21. \int \frac{\ln^7(x-7)}{(x-7)} dx$$

$$3.22. \int \frac{\ln^5(x-8)}{(x-8)} dx$$

$$3.23. \int \frac{\ln^6(x+9)}{(x+9)} dx$$

$$3.24. \int \frac{\ln(3x+5)}{(3x+5)} dx$$

$$3.25. \int \frac{\ln^4(3x+1)}{(3x+1)} dx$$

$$3.26. \int \frac{dx}{(x+1)\ln^2(x+1)}$$

$$3.27. \int \frac{dx}{(x-3)\ln^4(x-3)}$$

$$3.28. \int \frac{dx}{(x+3)\ln^4(x+3)}$$

$$3.29. \int \frac{dx}{(x-4)\ln^5(x-4)}$$

$$3.10. \int \frac{\sqrt[3]{\ln^4(x-5)}}{(x-5)} dx$$

$$3.20. \int \frac{\ln^3(x-5)}{(x-5)} dx$$

$$3.30. \int \frac{dx}{(x+5)\ln^3(x+5)}$$

#### 4

$$4.1. \int \sin^4 2x \cdot \cos 2x dx$$

$$4.11. \int \frac{\cos x}{\sqrt{(\sin x - 4)^3}} dx$$

$$4.21. \int \frac{\sin 3x}{\cos^2 3x} dx$$

$$4.2. \int \cos^7 2x \cdot \sin 2x dx$$

$$4.12. \int \frac{\sin 5x}{\sqrt{\cos 5x}} dx$$

$$4.22. \int \frac{\cos 4x}{\sin^3 4x} dx$$

$$4.3. \int \sin^3 4x \cdot \cos 4x dx$$

$$4.13. \int \sqrt[3]{\cos 2x} \cdot \sin 2x dx$$

$$4.23. \int \sqrt{\cos^3 2x} \cdot \sin 2x dx$$

$$4.4. \int \frac{\cos 2x}{\sin^3 2x} dx$$

$$4.14. \int \sin^3 5x \cdot \cos 5x dx$$

$$4.24. \int \frac{\sin 5x}{\cos^4 5x} dx$$

$$4.5. \int \frac{\sin 3x}{\cos^4 3x} dx$$

$$4.15. \int \frac{\cos 5x}{\sqrt{\sin^3 5x}} dx$$

$$4.25. \int \frac{\sin 4x}{\sqrt[3]{\cos^2 4x}} dx$$

$$4.6. \int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x}} dx$$

$$4.16. \int \sqrt{\cos 7x} \cdot \sin 7x dx$$

$$4.26. \int \sin^6 3x \cdot \cos 3x dx$$

$$4.7. \int \frac{\sin x}{\cos^5 x} dx$$

$$4.17. \int \sqrt{\cos^3 2x} \cdot \sin 2x dx$$

$$4.27. \int \sin^4 8x \cdot \cos 8x dx$$

$$4.8. \int \frac{\cos x}{3 - \sin x} dx$$

$$4.18. \int \frac{\cos 6x}{\sin^7 6x} dx$$

$$4.28. \int \sin^5 4x \cdot \cos 4x dx$$

$$4.9. \int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x + 3}} dx$$

$$4.19. \int \frac{\sin 4x}{\sqrt[3]{\cos 4x}} dx$$

$$4.29. \int \frac{\sin 2x}{\sqrt[3]{\cos^4 2x}} dx$$

$$4.10. \int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x + 1}} dx$$

$$4.20. \int \frac{\cos 6x}{\sin^4 6x} dx$$

$$4.30. \int \frac{\cos 6x}{\sqrt{\sin^3 6x}} dx$$

#### 5.

$$5.1. \int \frac{\sqrt{\arctg^6 3x}}{1 + 9x^2} dx$$

$$5.11. \int \frac{\arctg^7 3x}{1 + 9x^2} dx$$

$$5.20. \int \frac{dx}{(1 + x^2)\sqrt{\arctg x}}$$

$$5.2. \int \frac{\sqrt{\arctg^2 x}}{1 + x^2} dx$$

$$5.12. \int \frac{\arccos^6 3x}{1 + 9x^2} dx$$

$$5.22. \int \frac{dx}{(1 + x^2)\arctg^5 x}$$

$$5.3. \int \frac{\sqrt{\arctg^3 x}}{1 + x^2} dx$$

$$5.13. \int \frac{\arcsin^3 2x}{\sqrt{1 - 4x^2}} dx.$$

$$5.23. \int \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)}\arcsin^4 x}$$

$$5.4. \int \frac{\sqrt[3]{\arcsin x}}{\sqrt{1 - x^2}} dx$$

$$5.14. \int \frac{\arcsin^4 x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$$

$$5.24. \int \frac{\sqrt[3]{\arctg 2x}}{1 + 4x^2} dx$$

$$5.5. \int \frac{\sqrt[3]{\arccos^2 x}}{\sqrt{1 + x^2}} dx$$

$$5.15. \int \frac{\arccos 4x}{\sqrt{1 - 16x^2}} dx$$

$$23. \int \frac{\sqrt[3]{\arccos 2x}}{\sqrt{1 - 4x^2}} dx$$

$$5.6. \int \frac{\arccos^2 3x}{\sqrt{1 - 9x^2}} dx$$

$$5.16. \int \frac{\arccos^7 x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$$

$$5.26. \int \frac{dx}{\sqrt{(1 - 25x^2)}\arcsin 5x}$$

$$5.7. \int \frac{\arccos^3 x}{\sqrt{1 - 9x^2}} dx$$

$$5.17. \int \frac{\arctg^4 5x}{1 + 25x^2} dx$$

$$5.27. \int \frac{\arctg^8 3x}{1 + 9x^2} dx$$

$$5.8. \int \frac{\arctg^3 2x}{1+4x^2} dx$$

$$5.9. \int \frac{\arcsin^5 2x}{\sqrt{1-4x^2}} dx$$

$$5.10. \int \frac{\arccos^3 2x}{\sqrt{1-4x^2}} dx$$

$$5.18. \int \frac{\arcsin^2 5x}{\sqrt{1-25x^2}} dx$$

$$5.19. \int \frac{1}{(1+x^2)\arctg^3 x} dx$$

$$5.20. \int \frac{1}{(1+x^2)\arctg^7 x} dx$$

$$5.12. \int \frac{\arccos^2 7x}{\sqrt{1-49x^2}} dx$$

$$5.29. \int \frac{\sqrt[5]{\arctg^3 x}}{1+x^2} dx$$

$$5.30. \int \frac{\arctg^4 8x}{1+64x^2} dx$$

**6.**

$$6.1. \int \frac{x-1}{7x^2+4} dx$$

$$6.2. \int \frac{1-2x}{5x^2-1} dx$$

$$6.3. \int \frac{2x+1}{5x^2+1} dx$$

$$6.4. \int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+4}} dx$$

$$6.5. \int \frac{3x-2}{2x^2+7} dx$$

$$6.6. \int \frac{5-x}{3x^2+1} dx$$

$$6.7. \int \frac{x+5}{3x^2+1} dx$$

$$6.8. \int \frac{2x-5}{\sqrt{7x^2+3}} dx$$

$$6.9. \int \frac{2x-3}{\sqrt{x^2+9}} dx$$

$$6.10. \int \frac{3x-2}{3x^2+1} dx$$

$$6.11. \int \frac{x-1}{5-2x^2} dx$$

$$6.12. \int \frac{2x+3}{5x^2+2} dx$$

$$6.13. \int \frac{x-3}{1-4x^2} dx$$

$$6.14. \int \frac{5x-2}{x^2+9} dx$$

$$6.15. \int \frac{1-2x}{\sqrt{3x^2+2}} dx$$

$$6.16. \int \frac{2x-3}{\sqrt{4-x^2}} dx$$

$$6.17. \int \frac{3x+4}{5-2x^2} dx$$

$$6.18. \int \frac{5x+2}{\sqrt{x^2+9}} dx$$

$$6.19. \int \frac{x-5}{8-4x^2} dx$$

$$6.20. \int \frac{3x+2}{\sqrt{2x^2-1}} dx$$

$$6.21. \int \frac{2x+3}{1-3x^2} dx$$

$$6.22. \int \frac{x-3}{4x^2+1} dx$$

$$6.23. \int \frac{3x-1}{4-x^2} dx$$

$$6.24. \int \frac{2x+5}{\sqrt{5x^2+1}} dx$$

$$6.25. \int \frac{2x-4}{x^2+16} dx$$

$$6.26. \int \frac{2x-1}{\sqrt{5-3x^2}} dx$$

$$6.27. \int \frac{3x-3}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$6.28. \int \frac{3-2x}{x^2-8} dx$$

$$6.29. \int \frac{x+4}{7x^2+3} dx$$

$$6.30. \int \frac{x-5}{\sqrt{4-9x^2}} dx$$

**7.**

$$7.1. \int \frac{\sin x dx}{1+\cos^2 x}$$

$$7.2. \int \sqrt[3]{(1+2x)^2} dx$$

$$7.3. \int \frac{1}{\sqrt[4]{(1-4x)^3}} dx$$

$$7.4. \int (8x+5)^{10} dx$$

$$7.5. \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

$$7.6. \int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$$

$$7.11. \int \sin^2 x \cdot \cos x dx$$

$$7.12. \int \sqrt[5]{(7-3x)^2} dx$$

$$7.13. \int \frac{1}{\sqrt[4]{(2+5x)}} dx$$

$$7.14. \int 2(3x-5)^5 dx$$

$$7.15. \int \frac{x^2}{\sqrt{2+x^3}} dx$$

$$7.16. \int x^2 \cos(4-x^3) dx$$

$$7.21. \int x^2 \sin x^3 dx$$

$$7.22. \int \sqrt[4]{(1-4x)^3} dx$$

$$7.23. \int \frac{1}{\sqrt[3]{(1-6x)^2}} dx$$

$$7.24. \int 3(5x-8)^4 dx$$

$$7.25. \int \frac{x^3}{\sqrt{2-x^4}} dx$$

$$7.26. \int x^2 \cos(x^3+5) dx$$

7.7.  $\int x^3 \sin 3x^4 dx$

7.17.  $\int x^2 \sin 2x^3 dx$

7.27.  $\int \frac{\sin 3x}{2 + \cos 3x} dx$

7.8.  $\int \frac{\sin 2x}{1 - \cos 2x} dx$

7.18.  $\int (2x^3 + 1)^4 x^2 dx$

7.28.  $\int (3x^3 - 1)^5 x^2 dx$

7.9.  $\int (2x^3 + 1)^4 x^2 dx$

7.19.  $\int e^{-3x^2+1} \cdot x dx$

7.29.  $\int e^{x^3+1} \cdot x^2 dx$

7.10.  $\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

7.20.  $\int \frac{e^x}{(e^x + 1)} dx$

7.30.  $\int \frac{e^{3x}}{(e^{3x} - 1)} dx$

**8.**

1.  $\int x \cos 6x dx$

11.  $\int x \cos (x - 7) dx$

1.21.  $\int \arctg \frac{x}{5} dx$

2.  $\int x \sin (x - 5) dx$

12.  $\int \ln (x + 12) dx$

22.  $\int \arcsin \frac{x}{5} dx$

3.  $\int \arcsin 3x dx$

13.  $\int (x - 4) e^x dx$

23.  $\int \arccos 2x dx$

4.  $\int \arctg 8x dx$

14.  $\int x e^{-6x} dx$

1.24.  $\int \ln (2x - 1) dx$

5.  $\int x \sin (x - 2) dx$

15.  $\int \arctg 7x dx$

1.25.  $\int \ln (2x + 3) dx$

6.  $\int \arcsin 8x dx$

1.16.  $\int \arcsin 5x dx$

1.26.  $\int \arccos \frac{x}{5} dx$

7.  $\int x \sin (x + 3) dx$

1.17.  $\int \ln (x - 7) dx$

1.27.  $\int \arctg \frac{x}{4} dx$

8.  $\int x \cos (x + 4) dx$

1.18.  $\int x \cos (x + 6) dx$

1.28.  $\int \arcsin \frac{x}{7} dx$

9.  $\int \arccos 7x dx$

1.19.  $\int \arctg \frac{x}{2} dx$

1.29.  $\int \arctg 6x dx$

10.  $\int \ln (2x - 4) dx$

1.20.  $\int \ln (x + 8) dx$

1.30.  $\int \arccos \frac{x}{3} dx$

2. Найти интеграл  $\int (\kappa x + \kappa) e^{\kappa x} dx$ , где  $\kappa$  – порядковый номер в журнале

3. Найти интеграл  $\int (\kappa x - 4) \sin \kappa x dx$ , где  $\kappa$  – порядковый номер в журнале

**Контрольные вопросы:**

1. Таблица интегралов .

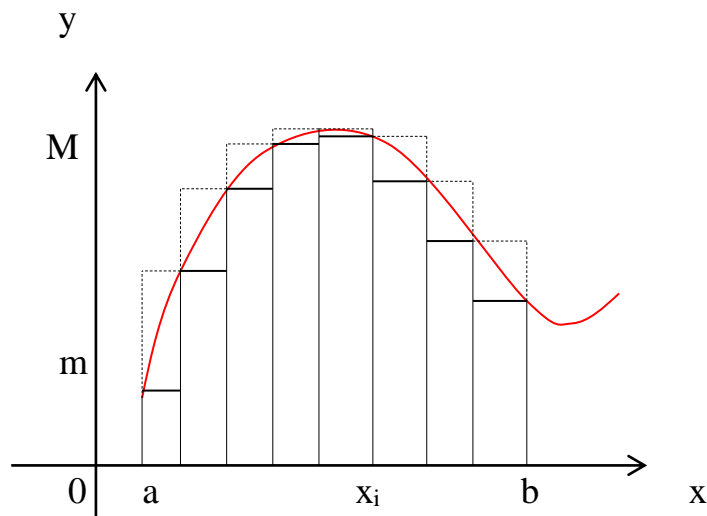
2. В чем суть метода добавочного коэффициента?

3. Метод подстановки.

4. Метод интегрирования по частям.

**Теоретические сведения*****Определенный интеграл.***

Пусть на отрезке  $[a, b]$  задана непрерывная функция  $f(x)$ .



Обозначим  $m$  и  $M$  наименьшее и наибольшее значение функции на отрезке  $[a, b]$

Разобьем отрезок  $[a, b]$  на части (не обязательно одинаковые)  $n$  точками.

$$x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$$

Тогда  $x_1 - x_0 = \Delta x_1$ ,  $x_2 - x_1 = \Delta x_2$ , ...,  $x_n - x_{n-1} = \Delta x_n$ ;

На каждом из полученных отрезков найдем наименьшее и наибольшее значение функции.

$$[x_0, x_1] \rightarrow m_1, M_1; \quad [x_1, x_2] \rightarrow m_2, M_2; \quad \dots \quad [x_{n-1}, x_n] \rightarrow m_n, M_n.$$

Составим суммы:

$$\underline{S}_n = m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + \dots + m_n \Delta x_n = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i$$

$$\bar{S}_n = M_1 \Delta x_1 + M_2 \Delta x_2 + \dots + M_n \Delta x_n = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i$$

Сумма  $\underline{S}$  называется **нижней интегральной суммой**, а сумма  $\bar{S}$  – **верхней интегральной суммой**.

$$\text{Т.к. } m_i \leq M_i, \text{ то } \underline{S}_n \leq \bar{S}_n, \quad \text{а} \quad m(b-a) \leq \underline{S}_n \leq \bar{S}_n \leq M(b-a)$$

Внутри каждого отрезка выберем некоторую точку  $\varepsilon$ .

$$x_0 < \varepsilon_1 < x_1, \quad x_1 < \varepsilon_2 < x_2, \quad \dots, \quad x_{n-1} < \varepsilon_n < x_n.$$

Найдем значения функции в этих точках и составим выражение, которое называется **интегральной суммой** для функции  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$ .

$$S_n = f(\varepsilon_1) \Delta x_1 + f(\varepsilon_2) \Delta x_2 + \dots + f(\varepsilon_n) \Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(\varepsilon_i) \Delta x_i$$

$$\text{Тогда можно записать: } m_i \Delta x_i \leq f(\varepsilon_i) \Delta x_i \leq M_i \Delta x_i$$

$$\text{Следовательно, } \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n f(\varepsilon_i) \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i$$



$$\underline{S}_n \leq S_n \leq \overline{S}_n$$

Геометрически это представляется следующим образом: график функции  $f(x)$  ограничен сверху описанной ломаной линией, а снизу – вписанной ломаной.

Обозначим  $\max \Delta x_i$  – наибольший отрезок разбиения, а  $\min \Delta x_i$  – наименьший. Если  $\max \Delta x_i \rightarrow 0$ , то число отрезков разбиения отрезка  $[a, b]$  стремится к бесконечности.

Если  $S_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ , то  $\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = S$ .

**Определение:** Если при любых разбиениях отрезка  $[a, b]$  таких, что  $\max \Delta x_i \rightarrow 0$  и произвольном выборе точек  $\xi_i$  интегральная сумма  $S_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$  стремится к пределу  $S$ , который называется определенным интегралом от  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$ .

$$\text{Обозначение : } \int_a^b f(x) dx.$$

$a$  – нижний предел,  $b$  – верхний предел,  $x$  – переменная интегрирования,  $[a, b]$  – отрезок интегрирования.

**Определение:** Если для функции  $f(x)$  существует предел  $\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx$ , то функция называется **интегрируемой** на отрезке  $[a, b]$ .

Также верны утверждения:

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx$$

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx$$

**Теорема:** Если функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , то она интегрируема на этом отрезке.

Свойства определенного интеграла.

$$1) \int_a^b A f(x) dx = A \int_a^b f(x) dx;$$

$$2) \int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x)) dx = \int_a^b f_1(x) dx \pm \int_a^b f_2(x) dx$$

$$3) \int_a^a f(x) dx = 0$$

$$4) \text{ Если } f(x) \leq \varphi(x) \text{ на отрезке } [a, b] \text{ } a < b, \text{ то } \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b \varphi(x) dx$$

5) Для произвольных чисел  $a, b, c$  справедливо равенство:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Разумеется, это равенство выполняется, если существует каждый из входящих в него интегралов.

$$б) \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

### ***Вычисление определенного интеграла.***

Пусть в интеграле  $\int_a^b f(x)dx$  нижний предел  $a = \text{const}$ , а верхний предел  $b$  изменяется. Очевидно, что если изменяется верхний предел, то изменяется и значение интеграла.

Обозначим  $\int_a^x f(t)dt = \Phi(x)$ . Найдем производную функции  $\Phi(x)$  по переменному верхнему пределу  $x$ .

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x)$$

Аналогичную теорему можно доказать для случая переменного нижнего предела.

**Теорема:** Для всякой функции  $f(x)$ , непрерывной на отрезке  $[a, b]$ , существует на этом отрезке первообразная, а значит, существует неопределенный интеграл.

**Теорема:** (Теорема Ньютона – Лейбница)

Если функция  $F(x)$  – какая-либо первообразная от непрерывной функции  $f(x)$ , то

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

это выражение известно под названием формулы Ньютона – Лейбница.

Иногда применяют обозначение  $F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b$ .

Формула Ньютона – Лейбница представляет собой общий подход к нахождению определенных интегралов.

Что касается приемов вычисления определенных интегралов, то они практически ничем не отличаются от всех тех приемов и методов, которые были рассмотрены выше при нахождении неопределенных интегралов.

Точно так же применяются методы подстановки (замены переменной), метод интегрирования по частям, те же приемы нахождения первообразных для тригонометрических, иррациональных и трансцендентных функций. Особенностью является только то, что при применении этих приемов надо распространять преобразование не только на подынтегральную функцию, но и

на пределы интегрирования. Заменяя переменную интегрирования, не забыть изменить соответственно пределы интегрирования.

### **Замена переменных.**

Пусть задан интеграл  $\int_a^b f(x)dx$ , где  $f(x)$  – непрерывная функция на отрезке  $[a, b]$ .

Введем новую переменную в соответствии с формулой  $x = \varphi(t)$ .

Тогда если

- 1)  $\varphi(\alpha) = a, \quad \varphi(\beta) = b$
- 2)  $\varphi(t)$  и  $\varphi'(t)$  непрерывны на отрезке  $[\alpha, \beta]$
- 3)  $f(\varphi(t))$  определена на отрезке  $[\alpha, \beta]$ , то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

$$\text{Тогда } \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = F[\varphi(t)] \Big|_{\alpha}^{\beta} = F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] = F(b) - F(a)$$

### **Пример.**

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx &= \left\{ \begin{array}{l} x = \sin t; \\ \alpha = 0; \beta = \pi/2 \end{array} \right\} = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t) dt = \\ &= \frac{1}{2} \left( t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} \sin \pi = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

При замене переменной в определенном интеграле следует помнить о том, что вводимая функция (в рассмотренном примере это функция  $\sin$ ) должна быть непрерывна на отрезке интегрирования. В противном случае формальное применение формулы приводит к абсурду.

### **Пример.**

$\int_0^{\pi} dx = x \Big|_0^{\pi} = \pi$ , с другой стороны, если применить тригонометрическую подстановку,

$$\int_0^{\pi} dx = \int_0^{\pi} \frac{dx}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \int_0^{\pi} \frac{dx}{\cos^2 x (1 + \tan^2 x)} = \{ \tan x = t \} = \int_0^0 \frac{dt}{1+t^2} = 0$$

Т.е. два способа нахождения интеграла дают различные результаты. Это произошло из-за того, что не был учтен тот факт, что введенная переменная  $\tan x$  имеет на отрезке интегрирования разрыв (в точке  $x = \pi/2$ ). Поэтому в данном случае такая подстановка неприменима. При замене переменной в определенном интеграле следует внимательно следить за выполнением перечисленных выше условий.

### **Интегрирование по частям.**

Если функции  $u = \varphi(x)$  и  $v = \psi(x)$  непрерывны на отрезке  $[a, b]$ , а также непрерывны на этом отрезке их производные, то справедлива формула интегрирования по частям:

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Вывод этой формулы абсолютно аналогичен выводу формулы интегрирования по частям для неопределенного интеграла, который был весьма подробно рассмотрен выше, поэтому здесь приводить его нет смысла.

**Задания практической работы** Вычислить определенный интеграл

1.

$$1. \quad a) \int_1^2 (3x^2 - 2x) dx$$

$$b) \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\cos x}{6} dx$$

$$2. \quad a) \int_{-2}^1 (x^2 - x) dx$$

$$b) \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \frac{6dx}{\cos^2 2x}$$

$$3. \quad a) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 3 \cos x dx$$

$$b) \int_0^2 (1 - \frac{x}{2})^4 dx$$

$$4. \quad a) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{3}{\cos^2 x} dx$$

$$b) \int_{-1}^4 (1 + \frac{x}{2})^8 dx$$

$$5. \quad a) \int_1^2 (4x^3 + 2x) dx$$

$$b) \int_0^{\pi} \frac{3dx}{\cos^2(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3})}$$

$$6. \quad a) \int_0^{\frac{\pi}{4}} (4 \cos 2x) dx$$

$$b) \int_1^5 \sqrt{9x-1} dx$$

$$7. \quad a) \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (6 \sin 2x) dx$$

$$b) \int_1^2 (3-2x)^4 dx$$

$$11. \quad a) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3}{\cos^2 \frac{1}{2}x} dx$$

$$b) \int_2^3 (1-x)^4 dx$$

$$12. \quad a) \int_0^{\frac{3}{2}\pi} \cos \frac{1}{3}x dx$$

$$b) \int_{-1}^4 (1 + \frac{x}{2})^8 dx$$

$$13. \quad a) \int_2^3 (3x^2 - 2x) dx$$

$$b) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 3 \sin x dx$$

$$14. \quad a) \int_0^{\pi} \left( 3 \sin \frac{1}{2}x \right) dx$$

$$b) \int_1^0 (1-2x)^4 dx$$

$$15. \quad a) \int_0^{\frac{\pi}{4}} (36 \cos 2x) dx$$

$$b) \int_{-2}^3 \frac{2dx}{(3-x^2)}$$

$$16. \quad a) \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos x dx$$

$$b) \int_2^3 (1-2x)^4 dx$$

$$17. \quad a) \int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{36}{\cos^2 2x} dx$$

$$b) \int_2^3 (3-x^2) dx$$

$$21. \quad a) \int_1^2 (4x^3 - 3x^2) dx$$

$$b) \int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x+3}}$$

$$22. \quad a) \int_0^{\frac{\pi}{9}} (2 \cos 3x) dx$$

$$b) \int_0^2 (1 - \frac{x}{2})^4 dx$$

$$23. \quad a) \int_0^{\frac{\pi}{12}} (108 \sin 6x) dx$$

$$b) \int_{-1}^1 (7-5x) dx$$

$$24. \quad a) \int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{4}{\cos^2 2x} dx$$

$$b) \int_{-2}^1 (4x^3 + 6x) dx$$

$$25. \quad a) \int_1^2 (5x^4 - 6x^2) dx$$

$$b) \int_1^9 \sqrt{8x-5} dx$$

$$26. \quad a) \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{5}{\sin^2 x} dx$$

$$b) \int_{-2}^0 (x^5 - 3x^2)$$

$$27. \quad a) \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2 \sin x) dx$$

$$b) \int_1^2 (\frac{x^2}{2} - \frac{2}{x^3}) dx$$

$$8. \quad a) \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{5}{\cos^2 x} dx$$

$$b) \int_{-3}^1 \frac{dx}{5-3x}$$

$$9. \quad a) \int_0^2 (x^3 - x^2 + 3) dx$$

$$b) \int_1^2 e^{2x+3} dx$$

$$10. \quad a) \int_1^2 (x^4 - x^3 + 2) dx$$

$$b) \int_0^1 5^{4-3x} dx$$

$$18. \quad a) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 \sin x) dx$$

$$b) \int_0^4 (x^2 + 1) dx$$

$$19. \quad a) \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x dx$$

$$b) \int_2^3 (7-2x)^4 dx$$

$$20. \quad a) \int_0^2 (x^3 - x) dx$$

$$b) \int_0^{\pi/3} 3 \sin 3x dx$$

$$28. \quad a) \int_1^3 (3x^2 + 4x^3) dx$$

$$b) \int_{\pi/4}^{\pi/8} \frac{\cos 4x}{2} dx$$

$$29. \quad a) \int_2^3 (2x^3 - 2x) dx$$

$$b) \int_0^{\pi/6} \frac{4dx}{\cos^2 2x}$$

$$30. \quad a) \int_{\frac{\pi}{18}}^{\frac{\pi}{6}} (2 \sin 3x) dx$$

$$b) \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 4}$$

## 2.

$$1. \quad \int_0^{\sqrt{3}} x^3 \sqrt{1+x^2} dx$$

$$2. \quad \int_0^{1/2} \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$3. \quad \int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx$$

$$4. \quad \int_{-\infty}^0 \frac{x dx}{\sqrt{(x^2+4)^3}}$$

$$5. \quad \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt[4]{(16+x^2)^5}}$$

$$6. \quad \int_{3/4}^1 \frac{dx}{\sqrt[5]{3-4x}}$$

$$7. \quad \int_0^1 \frac{x^4 dx}{\sqrt[3]{1-x^5}}$$

$$8. \quad \int_0^4 \frac{10x dx}{\sqrt[4]{(16-x^2)^3}}$$

$$9. \quad \int_0^2 \frac{x^3 dx}{\sqrt{(x^4+4)}}$$

$$10. \quad \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$11. \quad \int_0^1 x^3 \sqrt{4+5x^4} dx$$

$$12. \quad \int_1^e \frac{1+\ln x}{x} dx$$

$$13. \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{2-4x}}$$

$$14. \quad \int_{1/3}^1 \frac{\ln(3x-1)}{3x-1} dx$$

$$15. \quad \int_0^{2/3} \frac{\sqrt[3]{\ln(2-3x)}}{2-3x} dx$$

$$16. \quad \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin x dx}{\sqrt[7]{\cos^2 x}}$$

$$17. \quad \int_{1/2}^1 \frac{dx}{\sqrt[9]{1-2x}}$$

$$18. \quad \int_0^{1/4} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-4x}}$$

$$19. \quad \int_1^e \frac{1+\ln x}{x} dx$$

$$20. \quad \int_1^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x \sqrt{1-\ln^2 x}}$$

$$21. \quad \int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2} dx$$

$$22. \quad \int_1^{\sqrt{2}} \frac{x dx}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$23. \quad \int_0^1 \frac{x^3 dx}{\sqrt{16x^4+1}}$$

$$24. \quad \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{(x^3+8)^4}}$$

$$25. \quad \int_0^{\pi/6} \frac{\cos 3x}{\sqrt[6]{(1-\sin 3x)^5}} dx$$

$$26. \quad \int_{-3/4}^0 \frac{dx}{\sqrt{4x+3}}$$

$$27. \quad \int_1^5 \frac{x^2 dx}{\sqrt{31(x^3-1)}}$$

$$28. \quad \int_0^{1/2} \frac{dx}{(2x-1)^2}$$

$$29. \quad \int_0^1 x^3 \sqrt{4+5x^4} dx$$

$$30. \quad \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin x dx}{\sqrt[7]{\cos^2 x}}$$

## 3.

1.  $\int_0^1 \frac{3x^4 + 3x^2 + 1}{x^2 + 1} dx$
2.  $\int_2^3 \frac{2x^4 - 5x^2 + 3}{x^2 - 1} dx$
3.  $\int_2^3 \frac{x+2}{x^2(x-1)} dx$
4.  $\int_2^3 \frac{dx}{x^2(x-1)}$
5.  $\int_{-1}^1 \frac{y^5 dy}{y+2}$
6.  $\int_2^3 \frac{3x^2 + 2x - 3}{x^3 - x} dx$
7.  $\int_{1/3}^{1/2} \frac{x dx}{(x-1)^3}$
8.  $\int_4^5 \frac{dx}{(x-1)(x+2)}$
9.  $\int_3^4 \frac{dx}{(x+1)(x-2)}$
10.  $\int_0^1 \frac{(2x+3)dx}{(x-3)^3}$
11.  $\int_2^3 \frac{dx}{(x-1)^2(x+1)}$
12.  $\int_3^5 \frac{(x^2+2)dx}{(x^2+1)(x-1)}$
13.  $\int_0^1 \frac{x^4 + 3x^3 - 1}{(x+1)^2} dx$
14.  $\int_0^1 \frac{x dx}{x^2 + 3x + 2}$
15.  $\int_8^{10} \frac{(x^2+3)dx}{x^3 - x^2 - 6x}$
16.  $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^4 + x^2}$
17.  $\int_2^3 \frac{x^7 dx}{1-x^4}$
18.  $\int_2^3 \frac{dx}{x^4 - 1}$
19.  $\int_{-1}^0 \frac{x dx}{x^3 - 1}$
20.  $\int_0^{\sqrt{3}/3} \frac{2x^2 + 4}{x^3 - x^2 + x + 1} dx$
21.  $\int_4^5 \frac{dx}{x^2(x-1)}$
22.  $\int_0^2 \frac{dx}{(x+1)(x^2+4)}$
23.  $\int_7^9 \frac{x^2 - x + 2}{x^4 - 5x^2 + 4} dx$
24.  $\int_4^6 \frac{x dx}{x^3 - 6x^2 + 16 - 6}$
25.  $\int_1^2 \frac{dx}{x^3 + 1}$
26.  $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{x^5 + 1}{x^6 + x^4} dx$
27.  $\int_2^3 \frac{x^3 + x^2 + 2}{x(x^2 - 1)^2} dx$
28.  $\int_3^5 \frac{x^3 - 2x^2 + 4}{x^3(x-2)^2} dx$
29.  $\int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{x^2 dx}{x^4 - 1}$
30.  $\int_{-1}^0 \frac{x^5 - 2x^2 + 3}{(x-2)^2} dx$

#### 4.

- 1.1 a)  $\int_0^{\sqrt{3}} x^3 \sqrt{1+x^2} dx$   
b)  $\int_0^2 (2-x)^2 dx$
- 1.2 a)  $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{(3-x)^3}}$   
b)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{(3-\sin x)^2}$
- 1.3 a)  $\int_{-1/3}^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{1+3x}}$   
b)  $\int_1^2 \frac{(2x^2+1)dx}{x}$
- 1.11 a)  $\int_{-1}^2 \frac{6x^2 dx}{(x^3-5)^2}$   
b)  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{2} \cos x dx$
- 1.12 a)  $\int_0^1 \frac{x^3 dx}{\sqrt{16x^4+1}}$   
b)  $\int_0^{\sqrt{3}} x \sqrt{25-3x^2} dx$
- 1.13 a)  $\int_0^1 x^3 \sqrt{4+5x^4} dx$   
b)  $\int_1^2 \frac{(x-1)dx}{x^3}$
- 1.21 a)  $\int_{2\sqrt{2}}^4 3x \sqrt{x^2-7} dx$   
b)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin x dx$
- 1.22 a)  $\int_{1/2}^1 \frac{dx}{\sqrt[9]{1-2x}}$   
b)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{(8-7 \sin x)^2}$
- 1.23 a)  $\int_1^{\sqrt{2}} \frac{x dx}{\sqrt{4-x^2}}$   
b)  $\int_1^{e^{e^3}} \frac{dx}{x \sqrt{1+\ln x}}$

1.4	$a) \int_{3/4}^1 \frac{dx}{\sqrt[5]{3-4x}}$ $b) \int_1^2 \frac{xdx}{(2x^2+4)^4}$	1.14	$a) \int_0^3 6x^3(3x^4-1)^2 dx$ $b) \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{8-7x^3}}$	1.24	$a) \int_{-1}^0 \frac{dx}{4x^2-9}$ $b) \int_1^3 \sqrt{(2x+1)^3} dx$
1.5	$a) \int_0^1 \frac{x^4 dx}{\sqrt[3]{1-x^5}}$ $b) \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{(5-\sin x)^2}$	1.15	$a) \int_0^1 (2x^3+1)^4 x^2 dx$ $b) \int_0^2 \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{9+2x^3}}$	1.25	$a) \int_0^{1/4} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-4x}}$ $b) \int_4^5 (4-x)^3 dx$
1.6	$a) \int_{3/4}^{4/3} \frac{dx}{x^2+1}$ $b) \int_0^{\sqrt{3}} x^5 \sqrt{1+x^2} dx$	1.16	$a) \int_0^{1/2} \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$ $b) \int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}} dx$	1.26	$a) \int_0^{1/2} \frac{dx}{(2x-1)^2}$ $b) \int_1^e \frac{5 \ln^2 x}{x} dx$
1.7	$a) \int_0^{-3} \frac{dx}{\sqrt{25+3x}}$ $b) \int_0^{\pi/6} \frac{\cos 3x}{\sqrt[6]{(1-\sin 3x)^5}} dx$	1.17	$a) \int_0^1 (e^x-1)^4 e^x dx$ $b) \int_0^{1/4} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-4x}}$	1.27	$a) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-3x}}$ $b) \int_0^1 (x^3-4) dx$
1.8	$a) \int_0^2 \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^4+4}}$ $b) \int_0^{\pi/2} 3 \cos 2x dx$	1.18	$a) \int_{-3/4}^0 \frac{dx}{\sqrt{4x+3}}$ $b) \int_0^4 \frac{10x dx}{\sqrt[4]{(16-x^2)^3}}$	1.28	$a) \int_3^8 \sqrt{x+1} dx$ $b) \int_0^2 \frac{xdx}{(x^2-1)^3}$
1.9	$a) \int_1^e \frac{3 \ln^2 x}{x} dx$ $b) \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt[5]{8-7x^3}}$	1.19	$a) \int_0^1 (4x^3+1)^5 x^2 dx$ $b) \int_0^1 x^2 e^{x^3+1} dx$	1.29	$a) \int_0^4 \frac{10x dx}{\sqrt[4]{(16-x^2)^3}}$ $b) \int_{\frac{2\pi}{9}}^{\frac{\pi}{3}} \sin \left( 3x - \frac{\pi}{2} \right) dx$
1.10	$a) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{2-4x}}$ $b) \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{(8-\sin x)^2}$	1.20	$a) \int_0^{\pi/6} \frac{\cos 3x}{\sqrt[6]{(1-\sin 3x)^5}} dx$ $b) \int_1^{\sqrt{3}} \frac{32x dx}{(x^2+1)^5}$	1.30	$a) \int_1^5 \frac{x^2 dx}{\sqrt{31(x^3-1)}}$ $b) \int_0^1 e^{x^2} x dx$

## 5.

2.1	$\int_2^3 x \ln(x-1) dx$		$\int_1^{e^2} \sqrt{x} \ln x dx$		$\int_2^3 (3-x)e^x dx$
2.2	$\int_{-2}^0 x^2 e^{-x/2} dx$		$\int_0^1 \arctg \sqrt{x} dx$		$\int_{1/2}^1 \arcsin(1-x) dx$
2.3	$\int_0^{\pi/2} x \cos x dx$		$\int_0^{\pi} (x+2) \cos \frac{x}{2} dx$		$\int_1^{\sqrt{3}} \arctg \frac{1}{x} dx$

$$2.4 \int_0^{\pi/2} x^2 \sin x dx$$

$$\int_0^{\pi/8} x^2 \sin 4x dx$$

$$\int_{-1}^0 x \ln(1-x) dx$$

$$2.5 \int_{-1/2}^{1/2} \arccos 2x dx$$

$$\int_1^2 x^2 \ln x dx$$

$$\int_0^{\pi/6} e^{\sin x} \cos x dx$$

$$2.6 \int_1^2 (x-1) \ln x dx$$

$$\int_1^e (x+1) \ln x dx$$

$$\int_{-1}^0 (2x+3)e^{-x} dx$$

$$2.7 \int_{-1/2}^0 x e^{-2x} dx$$

$$\int_{3/2}^2 \arctg(2x-3) dx$$

$$\int_{-1}^0 (x+1)e^{-2x} dx$$

$$2.8 \int_1^2 x e^x dx$$

$$\int_0^{\pi/2} (x+3) \sin x dx$$

$$\int_{-1/2}^{1/2} \arccos 2x dx$$

$$2.9 \int_{-1/3}^{-2/3} \frac{x}{e^{3x}} dx$$

$$\int_0^{\ln 2} x e^{-x} dx$$

$$\int_0^1 x \arctg x dx$$

$$2.10 \int_1^e \frac{\ln^2 x}{x^2} dx$$

$$\int_{-3}^0 (x-2)e^{-x/3} dx$$

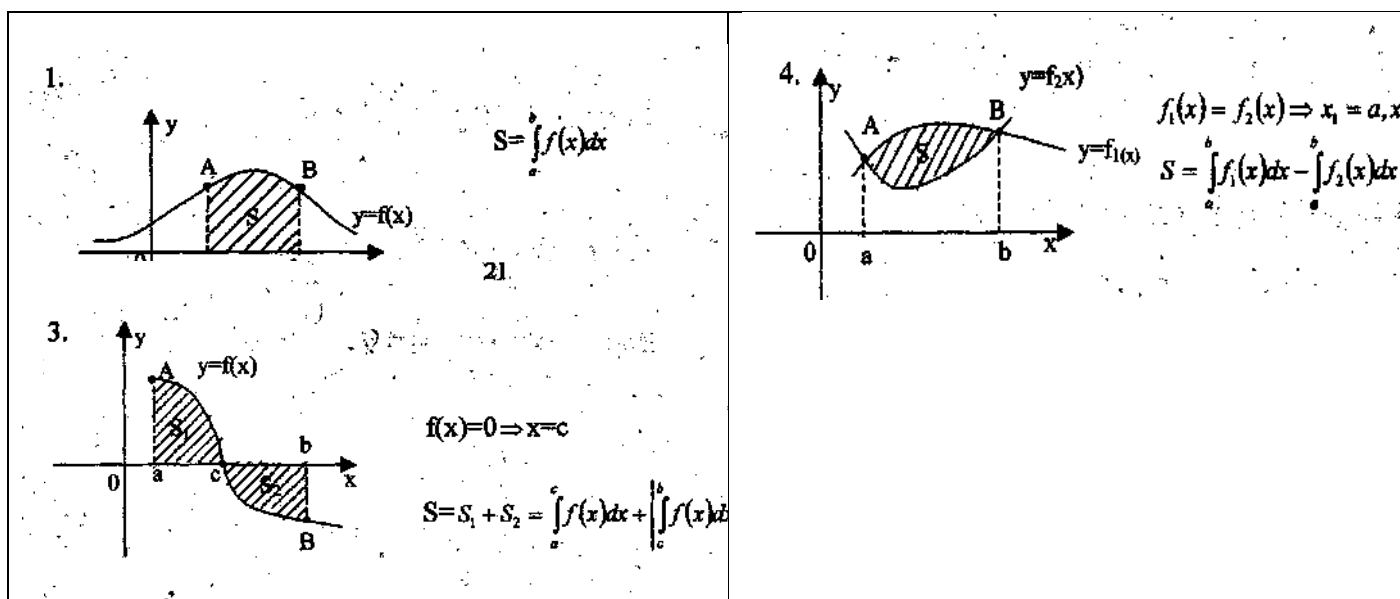
$$\int_1^2 \ln(3x+2) dx$$

## Контрольные вопросы

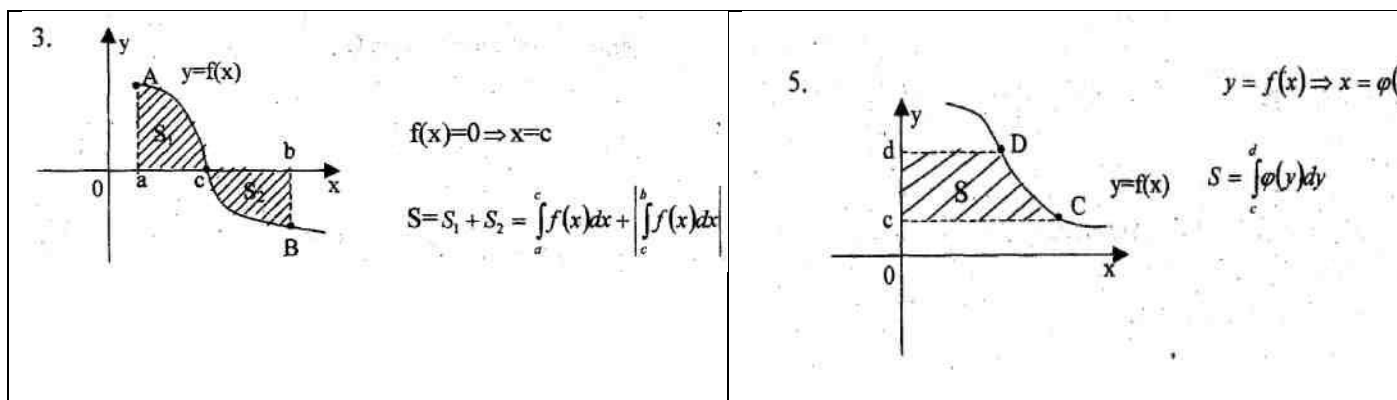
1. Что называют определенным интегралом функции  $f(x)$ ?
2. В чем состоит геометрический смысл определенного интеграла?
3. Сформулируйте необходимое условие интегрируемости функции  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$ .
4. Сформулируйте необходимое и достаточное условия интегрируемости функции  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$ .
5. Запишите свойства определенного интеграла.
6. Запишите формулу Ньютона-Лейбница.
7. Расскажите об основных методах интегрирования определенного интеграла.

## Теоретические сведения

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной кривой  $y=f(x)$ , двумя прямыми  $x=a$  и  $x=b$  и осью абсцисс, вычисляется с помощью определенного интеграла по формулам:

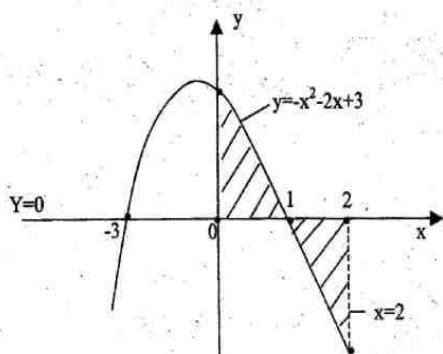






**Пример 4:** Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = -x^2 - 2x + 3$ , осями координат и прямой  $x=2$ .

Решение: Построим данные линии



Найдем точки пересечения графика функции с осью Ох:  $y = -x^2 - 2x + 3$ ,  
 $-x^2 - 2x + 3 = 0$ ,  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = -3$

$$S = \int_0^1 (-x^2 - 2x + 3) dx - \int_1^2 (-x^2 - 2x + 3) dx = \left( -\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x \right) \Big|_0^1 + \left( -\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x \right) \Big|_1^2 =$$

$$= -\frac{1}{3} - 1 + 3 - \left( -\frac{8}{3} - 4 + 6 \right) + \left( -\frac{1}{3} - 1 + 3 \right) = \frac{5}{3} + \frac{2}{3} + \frac{5}{3} = \frac{12}{3} = 4 (\text{кв.ед.})$$

**Задания практической работы** Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями

Задание 1

- 1,11,21.  $y = 8x - x^2 - 7$  и осью ОХ
- 2,12,22.  $y = x^3 - 1$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$
- 3,13,23.  $y = x^2 - 3x - 4$  и осью ОХ
- 4,14,24.  $y^2 = 4x$  и  $x^2 = 4y$
- 5,15,25.  $y = 5x - x^2 + 6$  и осью ОХ
- 6,16,26.  $y = x^3$ ,  $y = x^2$ ,  $x = -1$ ,  $x = 0$

7,17,27.  $y = x^2 - 6x + 8$  и осью ОХ

8,18,28.  $y = x^2$  и  $y = x + 2$

9,19,29  $y = x^2 - 4x - 5$  и осью ОХ

10,20,30.  $y = 6x - 3x^2$  и осью ОХ

Задание 2

1,11,21.  $y = x^2 + 2$  и  $y = 2x + 2$

2,12,22.  $y = x^2$  и  $y = 2 - x^2$

3,13,23.  $xy = 6$  и  $y + x - 7 = 0$

4,14,24.  $y = 2^x$ ,  $y = 2x - x^2$ ,  $x = 0$ ,  $x = 1$

5,15,25.  $y = \ln x$ ,  $x = e$ ,  $y = 0$

6,16,26.  $y = \frac{4}{x^2}$ ,  $x = 1$ ,  $y = x - 1$

7,17,27.  $y = x^2 + x$ ,  $y = 1 - x^2$ ,  $x = 0$ ,  $x = 1$

8,18,28.  $y = x^3$ ,  $x = 2$

9,19,29.  $y = \cos x$ ,  $x = 0$ ,  $x = 2\pi$ ,  $y = 0$

10,20,30.  $y = \sqrt{x}$ ,  $y = 2$ ,  $x = 0$

Задание 3

1,11,21.  $x - y + 3 = 0$ ,  $x + y - 1 = 0$ ,  $y = 0$

2,12,22.  $2x - 3y + 6 = 0$ ,  $y = 0$  и  $x = 3$

3,13,23.  $y = x^2 - 2x + 3$  и  $y = 3x - 1$

4,14,24.  $x - y + 2 = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x = -1$ ,  $x = 2$

5,15,25.  $y^2 = 4x$ ,  $x = 1$  и осью ОХ

6,16,36.  $y = x^2$  и  $y = -3x$

7,17,37.  $x - y + 3 = 0$ ,  $x + y - 1 = 0$ ,  $y = 0$

8,18,28.  $x^2 = 3y$  и  $y = x$

9,19,29.  $x - y - 2 = 0$ ,  $x + y + 1 = 0$ ,  $y = 0$

10,20,30.  $y^2 = 9x$ ,  $x = 3$  и осью ОХ

### Контрольные вопросы

1. Что такое криволинейная трапеция?

2. Формула Ньютона-Лейбница

3. Графики элементарных функций.

4. Различные виды плоских фигур и способы вычисления их площадей.

## **Практическая работа № 5**

### **по теме «Решение дифференциальных уравнений»**

**Цель:** проверить умение решать дифференциальные уравнения первого порядка с разделенными и разделяющимися переменными.

**Время выполнения** 90 минут

#### **Материальное обеспечение**

1. Теоретические сведения
2. Задание
3. Лист А 4
4. Калькуляторы

#### **Порядок выполнения работы**

1. Изучить задание
2. Изучить теоретические сведения
3. Выполнить и оформить работу
4. Показать результаты преподавателю

#### **Домашнее задание**

1. Подготовить ответы на контрольные вопросы

#### **Теоретический материал**

*Дифференциальным уравнением* называется уравнение, связывающее между собой независимую переменную  $x$ , искомую функцию  $y$  и ее производные или дифференциалы.

Символически дифференциальное уравнение записывается так:

$$F(x, y, y') = 0, F(x, y, y'') = 0, F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Дифференциальное уравнение называется *обыкновенным*, если искомая функция зависит от одного независимого переменного.

*Порядком* дифференциального уравнения называется порядок старшей производной (или дифференциала), входящей в данное уравнение.

*Решением* (или *интегралом*) дифференциального уравнения называется такая функция, которая обращает это уравнение в тождество.

*Общим решением* (или *общим интегралом*) дифференциального уравнения называется такое решение, в которое входит столько независимых произвольных постоянных, каков порядок уравнения. Так, общее решение дифференциального уравнения первого порядка содержит одну произвольную постоянную.

*Частным решением* дифференциального уравнения называется решение, полученное из общего при различных числовых значениях произвольных постоянных. Значения произвольных постоянных находятся при определенных начальных значениях аргумента и функции.

*Дифференциальным уравнением первого порядка* называется уравнение, в которое входят производные (или дифференциалы) не выше первого порядка.

Дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными называется уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot \varphi(y).$$

Для решения этого уравнения нужно сначала разделить переменные:

$$\frac{dy}{\varphi(y)} = f(x)dx,$$

а затем проинтегрировать обе части полученного равенства:

$$\int \frac{dy}{\varphi(y)} = \int f(x)dx.$$

### Примеры

**Задание 1:** Найдите общее решение уравнения  $x \cdot (1 + y^2)dx = ydy$ .

**Решение:** Разделив переменные, имеем  $x dx = \frac{y dy}{1 + y^2}$ . Интегрируем обе части полученного уравнения:

$$\int x dx = \int \frac{y dy}{1 + y^2}; \quad \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2} \ln(1 + y^2) + \frac{1}{2} \ln C.$$

Так как произвольная постоянная  $C$  может принимать любые числовые значения, то для удобства дальнейших преобразований вместо  $C$  мы написали  $\frac{1}{2} \ln C$ . Потенцируя последнее равенство, получим  $x^2 = \ln[C \cdot (1 + y^2)]$ .

Это и есть общее решение данного уравнения.

**Задание 2:** Найти частное решение уравнения  $s \cdot \operatorname{tg} t dt + ds = 0$ , удовлетворяющее начальным условиям  $s = 4$  при  $t = \frac{\pi}{3}$ .

**Решение:** Разделив переменные, имеем  $\operatorname{tg} t dt + \frac{ds}{s} = 0$ . Проинтегрируем обе части полученного уравнения:

$$\int \operatorname{tg} t dt + \int \frac{ds}{s} = \ln C; \quad -\ln \cos t + \ln s = \ln C,$$

$$\text{Или } \ln s = \ln C + \ln \cos t, \quad s = C \cos t.$$

Это общее решение данного уравнения. Для нахождения значения произвольной постоянной  $C$  подставим значения  $t = \frac{\pi}{3}$  и  $s = 4$  в выражение для

общего решения:  $4 = C \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ , или  $4 = \frac{C}{2}$ , откуда  $C = 8$ .

Следовательно, искомое частное решение, удовлетворяющее указанным начальным условиям, имеет вид  $s = 8 \cos t$ .

### Задания практической работы

**Задание 1.** Найти общее решение уравнений а), б).

**Задание 2.** Найти частное решение уравнения с разделяющимися переменными

**B1.1.** а)  $x^2 dx = 3y^2 dy$

б)  $y(1+x)dx + x(1-y) dy = 0$

2.  $y^2 dx = e^{-x} dy$ ;  $y = 1$  при  $x = 0$

**B16.1.** а)  $x^2 dx = 3y^2 dy$

б)  $y(1+x)dx + x(1-y) dy = 0$

2.  $dx = e^{-x} dy$ ;  $y = 1$  при  $x = 0$

**B2.** 1. а)  $\frac{1}{\sqrt{x}} dy = \frac{3}{\sqrt{y}} dx$

б)  $y^2 dx + (x-2) dy = 0$

2.  $\frac{1}{y^2} dx = \frac{1}{x^2} dy$ ,  $y = 2$  при  $x = 0$

**B17.** 1. а)  $\frac{1}{\sqrt{x}} dy = \frac{3}{\sqrt{y}} dx$

б)  $y^2 dx + (x-2) dy = 0$

2.  $dx = \frac{1}{x^2} dy$ ,  $y = 2$  при  $x = 0$

**B3** 1. а)  $\sqrt{x} dx = \sqrt{y} dy$

б)  $(1+y^2)dx - \sqrt{x} dy = 0$

2.  $(1+y) dx = (1-x) dy$ ,

$y = 3$  при  $x = -2$

**B18.** 1. а)  $\sqrt{x} dx = \sqrt{y} dy$

б)  $(1+y^2)dx - \sqrt{x} dy = 0$

2.  $(1+y) dx = (1-x) dy$ ,

$y = 3$  при  $x = -2$

**B4.** 1. а)  $(3x^2 - 2x) dx = dy$

б)  $-(2xy+3y)dx + x^2 dy = 0$

2.  $y dx = x dy$ ,  $y = 6$  при  $x = 2$

**B19.** 1. а)  $(3x^2 - 2x) dx = dy$

б)  $-(2xy+3y)dx + x^2 dy = 0$

2.  $y dx = x dy$ ,  $y = 6$  при  $x = 2$

**B5.** 1. а)  $(4x - 3) dx = dy$

б)  $(xy+x)\frac{dx}{dy}=1$

2.  $\frac{2x-1}{y+1} = \frac{dx}{dy}$ ,  $y = 0$  при  $x = 5$

**B20.** 1. а)  $(4x - 3) dx = dy$

б)  $(xy+x)\frac{dx}{dy}=1$

2.  $\frac{2x-1}{y+1} = \frac{dx}{dy}$ ,  $y = 0$  при  $x = 5$

**B6.** 1. а)  $x dx = dy$

б)  $2(xy+y)dx = x dy$

2.  $(y+1) dx - (1-x) dy = 0$ ,

$y = 1$  при  $x = 0$

**B21.** 1. а)  $x dx = dy$

б)  $2(xy+y)dx = x dy$

2.  $(y+1) dx - (1-x) dy = 0$ ,

$y = 1$  при  $x = 0$

**B7.1.** а)  $x^2 dx = 3y^2 dy$

б)  $y(1+x)dx + x(1-y) dy = 0$

2.  $y^2 dx = e^{-x} dy$ ;  $y = 1$  при  $x = 0$

**B22.** 1. а)  $x^2 dx = 3y^2 dy$

б)  $y(1+x)dx + x(1-y) dy = 0$

2.  $y^2 dx = e^{-x} dy$ ;  $y = 1$  при  $x = 0$

**B8.1.** а)  $\frac{1}{\sqrt{x}} dy = \frac{3}{\sqrt{y}} dx$

б)  $y^2 dx + (x-2) dy = 0$

2.  $\frac{1}{y^2} dx = \frac{1}{x^2} dy$ ,  $y = 2$  при  $x = 0$

**B23.** 1. а)  $\frac{1}{\sqrt{x}} dy = \frac{3}{\sqrt{y}} dx$

б)  $y^2 dx + (x-2) dy = 0$

2.  $\frac{1}{y^2} dx = \frac{1}{x^2} dy$ ,  $y = 2$  при  $x = 0$

**B9.** 1. а)  $\sqrt{x} dx = \sqrt{y} dy$

б)  $(1+y^2)dx - \sqrt{x} dy = 0$

2.  $(1+y) dx = (1-x) dy$ ,

**B24.** 1. а)  $\sqrt{x} dx = \sqrt{y} dy$

б)  $(1+y^2)dx - \sqrt{x} dy = 0$

2.  $(1+y) dx = (1-x) dy$ ,

$$y = 3 \text{ при } x = -2$$

$$y = 3 \text{ при } x = -2$$

$$\mathbf{B10} \quad 1.a)(3x^2 - 2x) dx = dy$$

$$\quad б) -(2xy+3y)dx + x^2 dy = 0$$

$$2.y dx = x dy, y = 6 \text{ при } x = 2$$

$$\mathbf{B11.1.a)}(4x - 3) dx = dy$$

$$\quad б) (xy+x)\frac{dx}{dy}=1$$

$$2.\frac{2x-1}{y+1} = \frac{dx}{dy}, \quad y = 0 \text{ при } x = 5$$

$$\mathbf{B12.1.a)}x dx = dy$$

$$\quad б) 2(xy+y)dx = x dy$$

$$2.(y + 1) dx - (1 - x) dy = 0,$$

$$y = 1 \text{ при } x = 0$$

$$\mathbf{B13.1.a)}x^2 dx = 3y^2 dy$$

$$\quad б) y(1+x)dx + x(1 - y) dy = 0$$

$$2.y^2 dx = e^{-x} dy;$$

$$y = 1 \text{ при } x = 0$$

$$\mathbf{B14.} \quad 1.a)\frac{1}{\sqrt{x}} dy = \frac{3}{\sqrt{y}} dx$$

$$\quad б) y^2 dx + (x - 2) dy = 0$$

$$2.\frac{1}{y^2} dx = \frac{1}{x^2} dy, y = 2 \text{ при } x = 0$$

$$\mathbf{B15.1.a)}\sqrt{x} dx = \sqrt{y} dy$$

$$\quad б) (1+y^2)dx - \sqrt{x} dy = 0$$

$$2.(1 + y) dx = (1 - x) dy,$$

$$y = 3 \text{ при } x = -2$$

$$\mathbf{B25.1.a)}(3x^2 - 2x) dx = dy$$

$$\quad б) -(2xy+3y)dx + x^2 dy = 0$$

$$2. y dx = x dy, y = 6 \text{ при } x = 2$$

$$\mathbf{B26.1.a)}(4x - 3) dx = dy$$

$$\quad б) (xy+x)\frac{dx}{dy}=1$$

$$2.\frac{2x-1}{y+1} = \frac{dx}{dy}, \quad y = 0 \text{ при } x = 5$$

$$\mathbf{B27.} \quad 1.a)x dx = dy$$

$$\quad б) 2(xy+y)dx = x dy$$

$$2.(y + 1) dx - (1 - x) dy = 0,$$

$$y = 1 \text{ при } x = 0$$

$$\mathbf{B28.1.a)}x^2 dx = 3y^2 dy$$

$$\quad б) y(1+x)dx + x(1 - y) dy = 0$$

$$2.y^2 dx = e^{-x} dy; y = 1 \text{ при } x =$$

$$0$$

$$\mathbf{B29.} \quad 1.a)\frac{1}{\sqrt{x}} dy = \frac{3}{\sqrt{y}} dx$$

$$\quad б) y^2 dx + (x - 2) dy = 0$$

$$2.\frac{1}{y^2} dx = \frac{1}{x^2} dy, y = 2 \text{ при } x = 0$$

$$\mathbf{B30.1.a)}\sqrt{x} dx = \sqrt{y} dy$$

$$\quad б) (1+y^2)dx - \sqrt{x} dy = 0$$

$$2.(1 + y) dx = (1 - x) dy,$$

$$y = 3 \text{ при } x = -2$$

### Контрольные вопросы:

1. Какое уравнение называется дифференциальным?
2. Что называется решением дифференциального уравнения?
3. Какое решение дифференциального уравнения называется общим?
4. Какое решение дифференциального уравнения называется частным?
5. Какие дифференциальные уравнения называются уравнениями первого порядка?
6. Какие дифференциальные уравнения называются уравнениями с разделяющимися переменными?

### Теоретические сведения

Уравнение, содержащее производные (или дифференциалы) не выше второго порядка, называется *дифференциальным уравнением второго порядка*. В общем виде уравнение второго порядка записывается следующим образом:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right).$$

Общее решение дифференциального уравнения второго порядка содержит две произвольные постоянные.

*Линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами* называется уравнение вида:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + p \frac{dy}{dx} + qy = 0, \quad (1)$$

где  $p$  и  $q$  - постоянные величины.

Для отыскания общего решения уравнения (1) составляется *характеристическое уравнение*

$$r^2 + pr + q = 0, \quad (2)$$

которое получается из уравнения (1) заменой  $\frac{d^2 y}{dx^2}$ ,  $\frac{dy}{dx}$  и  $y$  на соответствующие степени  $r$ , причем сама функция  $y$  заменяется единицей.

Тогда общее решение дифференциального уравнения (1) строится в зависимости от корней  $r_1$  и  $r_2$  характеристического уравнения (2). Здесь возможны три случая.

I случай: Корни  $r_1$  и  $r_2$  - действительные и различные. В этом случае общее решение уравнения (1) имеет вид

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}. \quad (3)$$

II случай: Корни  $r_1$  и  $r_2$  - действительные и равные:  $r_1 = r_2 = r$ . Тогда общее решение уравнения (1) записывается так:

$$y = (C_1 + C_2 x) \cdot e^{rx}. \quad (4)$$

III случай: Корни  $r_1$  и  $r_2$  - комплексно - сопряженные:  $r_1 = \alpha + \beta \cdot i$ ,  $r_2 = \alpha - \beta \cdot i$ . В этом случае общее решение уравнения (1) записывается следующим образом:

$$y = e^{\alpha x} \cdot (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x). \quad (5)$$

### Примеры

**Задание 1:** Решить уравнение:  $\frac{d^2 y}{dx^2} - 7 \frac{dy}{dx} + 10y = 0$ .

**Решение:** Составим характеристическое уравнение и найдем его корни:  $r^2 - 7r + 10 = 0$ . Отсюда следует, что  $r_1 = 2$ ,  $r_2 = 5$ . Так как корни характеристического уравнения действительные и разные, то общее решение данного дифференциального уравнения согласно формуле (3) запишется так:  $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{5x}$ .

**Задание 2:** Найти частное решение уравнения  $\frac{d^2 y}{dx^2} - 5 \frac{dy}{dx} = 0$ , если  $y = 1$  и  $\frac{dy}{dx} = -1$  при  $x = 0$ .

**Решение:** Составим характеристическое уравнение  $r^2 - 5r = 0$ . Решая его, получим,  $r_1 = 0$ ,  $r_2 = 5$ . Так как корни характеристического уравнения действительные и различные, то общее решение дифференциального уравнения имеет вид:  $y = C_1 e^{0 \cdot x} + C_2 e^{5x}$ , то есть  $y = C_1 + C_2 e^{5x}$ .

Для нахождения искомого частного решения нужно определить значения постоянных  $C_1$  и  $C_2$ . Подставив в общее решение значения  $x = 0$  и  $y = 1$ , получим  $1 = C_1 + C_2$ .

Продифференцировав общее решение и подставив в полученное выражение значения  $x = 0$  и  $\frac{dy}{dx} = -1$ , имеем  $\frac{dy}{dx} = 5C_2 e^{5x}$ , отсюда следует, что  $-1 = 5C_2$ . Из

данного выражения находим:  $C_2 = -\frac{1}{5}$ ,  $C_1 = 1 - C_2 = 1 - \left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{6}{5}$ .

Таким образом, искомое частное решение имеет вид  $y = \frac{6}{5} - \frac{1}{5} e^{5x}$ .

**Задание 3:** Решить уравнение  $\frac{d^2 y}{dx^2} - 8 \frac{dy}{dx} + 16y = 0$ .

**Решение:** Составим характеристическое уравнение и найдем его корни:  $r^2 - 8r + 16 = 0$ ,  $r_1 = r_2 = 4$ . Характеристическое уравнение имеет равные действительные корни; поэтому согласно формуле (4) общее решение данного дифференциального уравнения записывается в виде  $y = (C_1 + C_2 x) \cdot e^{4x}$ .

**Задание 4:** Найдите частное решение уравнения  $y'' + 8y' + 16y = 0$ , если  $y = 1$  и  $y' = 1$  при  $x = 0$ .

**Решение:** Так как характеристическое уравнение  $r^2 + 8r + 16 = 0$  имеет равные действительные корни  $r_1 = r_2 = -4$ , то общее решение данного дифференциального уравнения записывается в виде

$$y = (C_1 + C_2 x) \cdot e^{-4x} = C_1 e^{-4x} + C_2 x e^{-4x}.$$

Дифференцируя общее решение, имеем

$$y' = -4C_1 e^{-4x} + C_2 e^{-4x} - 4C_2 x e^{-4x}.$$

Подставив начальные данные в выражение для  $y$  и  $y'$ , получим систему уравнений

$$\begin{cases} 1 = C_1 e^0 + C_2 \cdot 0 \cdot e^0 \\ 1 = -4C_1 e^0 + C_2 e^0 - 4C_2 \cdot 0 \cdot e^0 \end{cases}, \quad \text{или} \quad \begin{cases} 1 = C_1 \\ 1 = -4C_1 + C_2 \end{cases}, \quad \text{откуда} \quad C_1 = 1 \quad \text{и} \quad C_2 = 5.$$

Следовательно, искомое частное решение имеет вид  $y = e^{-4x} + 5x e^{-4x}$ .

**Задания практической работы**



**Задания** Решить однородные линейные дифференциальные уравнения второго порядка. В пункте а) найти частное решение при заданных начальных условиях

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(0) = y'_0.$$

$$1,10. \text{ а) } y'' + y' - 2y = 0 \quad y(0) = 1 \quad y'(0) = 3 \quad \text{б) } y'' + 12y' + 36y = 0$$

$$\text{в) } 4y'' + 9y = 0$$

$$2,12. \text{ а) } 3y'' - 2y' - 8y = 0 \quad y(0) = 1 \quad y'(0) = 1$$

$$\text{б) } y'' - 6y' + 9y = 0 \quad \text{в) } y'' - 8y' + 17y = 0$$

$$3,13. \text{ а) } y'' - 4y' + 3y = 0 \quad y(0) = 6 \quad y'(0) = 10$$

$$\text{б) } y'' + 8y' + 16y = 0 \quad \text{в) } 4y'' - 20y' + 25y = 0$$

$$4,14. \text{ а) } y'' - 7y' + 6y = 0 \quad y(0) = 2 \quad y'(0) = -1$$

$$\text{б) } y'' + 10y' + 25y = 0 \quad \text{в) } y'' + 2y' + 5y = 0$$

$$5,15. \text{ а) } 2y'' + y' - y = 0 \quad y(0) = 1 \quad y'(0) = -1$$

$$\text{б) } 4y'' - 4y' + y = 0 \quad \text{в) } y'' - 2y' + 10y = 0$$

$$6,16. \text{ а) } 2y'' + 5y' = 0 \quad y(0) = 1 \quad y'(0) = 4$$

$$\text{б) } y'' - 14y' + 49y = 0 \quad \text{в) } y'' + 4y = 0$$

$$7,17. \text{ а) } 12y'' + 5y' = 0 \quad y(0) = 2 \quad y'(0) = 2$$

$$\text{б) } 9y'' - 6y' + y = 0 \quad \text{в) } 5y'' - 6y' + 5y = 0$$

$$8,18. \text{ а) } y'' - 6y' + 8y = 0 \quad y(0) = 2 \quad y'(0) = -4$$

$$\text{б) } 16y'' + 8y' + y = 0 \quad \text{в) } y'' - 6y' + 13y = 0$$

$$9,19. \text{ а) } y'' - 4y' - 5y = 0 \quad y(0) = 2 \quad y'(0) = -3$$

$$\text{б) } 16y'' + 24y' + 9y = 0 \quad \text{в) } y'' - 4y' + 13y = 0$$

$$10,20. \text{ а) } y'' - 3y' + 2y = 0 \quad y(0) = 1 \quad y'(0) = 6$$

$$\text{б) } 9y'' + 6y' + y = 0 \quad \text{в) } y'' + 9y = 0$$

### Контрольные вопросы

1. Дайте определение дифференциального уравнения.
2. Что называют порядком дифференциального уравнения?
3. Дайте определение общего решения дифференциального уравнения.

4. Что называют условиями Коши?
5. Что называют задачей Коши?
6. Дайте определение частного решения дифференциального уравнения.
7. Какие уравнения называются дифференциальными уравнениями II порядка?
8. Понятие характеристического уравнения.
9. Общее решение уравнения характеристического уравнения.

## **Практическая работа № 6**

по теме «Численное решение дифференциального уравнения»

**Цель:** научиться решать линейные дифференциальные уравнения первого порядка.

**Время выполнения** 90 минут

**Материальное обеспечение**

1. Теоретические сведения

2. Задание

3. Лист А 4

4. Калькуляторы

**Порядок выполнения работы**

1. Изучить задание

2. Изучить теоретические сведения

3. Выполнить и оформить работу

4. Показать результаты преподавателю

**Домашнее задание**

1. Подготовить ответы на контрольные вопросы

**Теоретические сведения**

**Определение.** Дифференциальное уравнение называется **линейным** относительно неизвестной функции и ее производной, если оно может быть записано в виде:

$$y' + P(x)y = Q(x),$$

при этом, если правая часть  $Q(x)$  равна нулю, то такое уравнение называется **линейным однородным** дифференциальным уравнением, если правая часть  $Q(x)$  не равна нулю, то такое уравнение называется **линейным неоднородным** дифференциальным уравнением.

$P(x)$  и  $Q(x)$ - функции непрерывные на некотором промежутке  $a < x < b$ .

***Линейные однородные дифференциальные уравнения.*** Рассмотрим методы нахождения общего решения линейного однородного дифференциального уравнения первого порядка вида

$$y' + P(x)y = 0.$$

Для этого типа дифференциальных уравнений разделение переменных не представляет сложностей.

$$\frac{dy}{y} = -P(x)dx$$

$$\ln|y| = -\int P(x)dx + \ln|C|;$$

$$\ln\left|\frac{y}{C}\right| = -\int P(x)dx;$$

Общее решение:

$$y = Ce^{-\int P(x)dx}$$

***Линейные неоднородные дифференциальные уравнения.***

Для интегрирования линейных неоднородных уравнений ( $Q(x) \neq 0$ ) применяются в основном два метода: метод Бернулли и метод Лагранжа.

### **Метод Бернулли.**

(Якоб Бернулли (1654-1705) – швейцарский математик.)

Суть метода заключается в том, что искомая функция представляется в виде произведения двух функций  $y = uv$ .

При этом очевидно, что  $y' = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx}$  - дифференцирование по частям.

Подставляя в исходное уравнение, получаем:

$$u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} + P(x)uv = Q(x)$$

$$u \frac{dv}{dx} + v \left( \frac{du}{dx} + P(x)u \right) = Q(x)$$

Далее следует важное замечание – т.к. первоначальная функция была представлена нами в виде произведения, то каждый из сомножителей, входящих в это произведение, может быть произвольным, выбранным по нашему усмотрению.

Например, функция  $y = 2x^2$  может быть представлена как  $y = 1 \cdot 2x^2$ ;  $y = 2 \cdot x^2$ ;  $y = 2x \cdot x$ ; и т.п.

Таким образом, можно одну из составляющих произведение функций выбрать так, что выражение  $\frac{du}{dx} + P(x)u = 0$ .

Таким образом, возможно получить функцию  $u$ , проинтегрировав, полученное соотношение как однородное дифференциальное уравнение по описанной выше схеме:

$$\frac{du}{u} = -P(x)dx; \quad \int \frac{du}{u} = -\int P(x)dx; \quad \ln|u| = -\int P(x)dx;$$

$$\ln|C_1| + \ln|u| = -\int P(x)dx; \quad u = Ce^{-\int P(x)dx}; \quad C = 1/C_1;$$

Для нахождения второй неизвестной функции  $v$  подставим полученное выражение для функции  $u$  в исходное уравнение  $u \frac{dv}{dx} + v \left( \frac{du}{dx} + P(x)u \right) = Q(x)$  с учетом того, что выражение, стоящее в скобках, равно нулю.

$$Ce^{-\int P(x)dx} \frac{dv}{dx} = Q(x); \quad Cdv = Q(x)e^{\int P(x)dx} dx;$$

Интегрируя, можем найти функцию  $v$ :

$$Cv = \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C_1; \quad v = \frac{1}{C} \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C_2;$$

Т.е. была получена вторая составляющая произведения  $y = uv$ , которое и определяет искомую функцию.

Подставляя полученные значения, получаем:

$$y = uv = Ce^{-\int P(x)dx} \cdot \frac{1}{C} \left( \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C_2 \right)$$

Окончательно получаем формулу:

$$y = e^{-\int P(x)dx} \cdot \left( \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C_2 \right), \quad C_2 - \text{произвольный коэффициент.}$$

Это соотношение может считаться решением неоднородного линейного дифференциального уравнения в общем виде по способу Бернулли.

### **Метод Лагранжа.**

(Ларганж Жозеф Луи (1736-1813) - французский математик, през. Берлинской АН, поч. чл. Пет. АН (1776)).

**Метод Лагранжа** решения неоднородных линейных дифференциальных уравнений еще называют методом **вариации произвольной постоянной**.

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

Первый шаг данного метода состоит в отбрасывании правой части уравнения и замене ее нулем

$$y' + P(x)y = 0$$

Далее находится решение получившегося однородного дифференциального уравнения:

$$y = C_1 e^{-\int P(x)dx}.$$

Для того, чтобы найти соответствующее решение неоднородного дифференциального уравнения, будем считать постоянную  $C_1$  некоторой функцией от  $x$ .

Тогда по правилам дифференцирования произведения функций получаем:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dC_1(x)}{dx} e^{-\int P(x)dx} + C_1(x) e^{-\int P(x)dx} \cdot (-P(x));$$

Подставляем полученное соотношение в исходное уравнение

$$\frac{dC_1(x)}{dx} e^{-\int P(x)dx} - C_1(x) P(x) e^{-\int P(x)dx} + P(x) C_1(x) e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$$

$$\frac{dC_1(x)}{dx} e^{-\int P(x)dx} = Q(x);$$

Из этого уравнения определим переменную функцию  $C_1(x)$ :

$$dC_1(x) = Q(x) e^{\int P(x)dx} dx;$$

Интегрируя, получаем:

$$C_1 = \int Q(x) e^{\int P(x)dx} dx + C;$$

Подставляя это значение в исходное уравнение, получаем:

$$y = e^{-\int P(x)dx} \left( \int Q(x) e^{\int P(x)dx} dx + C \right).$$

Таким образом, мы получили результат, полностью совпадающий с результатом расчета по методу Бернулли.

При выборе метода решения линейных дифференциальных уравнений следует руководствоваться простотой интегрирования функций, входящих в исходный интеграл.

Далее рассмотрим примеры решения различных дифференциальных уравнений различными методами и сравним результаты.

**Пример.** Решить уравнение  $x^2 y' + y = ax^2 e^{\frac{1}{x}}$ .

Сначала приведем данное уравнение к стандартному виду:  $y' + \frac{1}{x^2} y = a e^{\frac{1}{x}}$ .

Применим полученную выше формулу:  $P = \frac{1}{x^2}$ ;  $Q = a e^{\frac{1}{x}}$ ;

$$y = e^{-\int \frac{1}{x^2} dx} \left( \int a e^{\frac{1}{x}} e^{\int \frac{1}{x^2} dx} dx + C \right)$$

$$y = e^{\frac{1}{x}} \left( \int a e^{\frac{1}{x}} e^{-\frac{1}{x}} dx + C \right) = e^{\frac{1}{x}} \left( \int a dx + C \right)$$

$$y = e^{\frac{1}{x}} (ax + C).$$

**Задание.** Решить линейное дифференциальное уравнение.

**B1.**  $xy' - xy = (1+x^2)e^x$

**B16.**  $xy' - xy = (1+x^2)e^x$

**B2.**  $y' + 2xy = x^3$

**B17.**  $y' + 2xy = x^3$

**B3.**  $(1+x^2)y' - xy = 2x$

**B18.**  $(1+x^2)y' - xy = 2x$

**B4.**  $xy' + y = x + 1$

**B19.**  $xy' + y = x + 1$

**B5.**  $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x$

**B20.**  $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x$

**B6.**  $y' + y = x + 1$

**B21.**  $xy' + y = x + 1$

**B7.**  $xy' - xy = (1+x^2)e^x$

**B22.**  $xy' - xy = (1+x^2)e^x$

**B8.**  $y' + 2xy = x^3$

**B23.**  $y' + 2xy = x^3$

**B9.**  $(1+x^2)y' - xy = 2x$

**B24.**  $(1+x^2)y' - xy = 2x$

**B10.**  $xy' + y = x + 1$

**B25.**  $xy' + y = x + 1$

**B11.**  $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x$

**B26.**  $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x$

**B12.**  $xy' + y = x + 1$

**B27.**  $xy' + y = x + 1$

**B13.**  $xy' - xy = (1+x^2)e^x$

**B28.**  $xy' - xy = (1+x^2)e^x$

**B14.**  $y' + 2xy = x^3$

**B29.**  $y' + 2xy = x^3$

**B15.**  $(1+x^2)y' - xy = 2x$

**B30.**  $(1+x^2)y' - xy = 2x$

**Задача 2.** Найти решение задачи Коши.

4.1.  $y' - y/x = x^2$ ,  $y(1) = 0$ . 4.2.

$y' - y \operatorname{ctg} x = 2x \sin x$ ,  $y(\pi/2) = 0$ .

4.3.  $y' + y \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$ ,  $y(0) = 0$ . 4.4.

$y' + y \operatorname{tg} x = \cos^2 x$ ,  $y(\pi/4) = 1/2$ .

4.5.  $y' - \frac{y}{x+2} = x^2 + 2x$ ,  $y(-1) = 3/2$ . 4.6.

$y' - \frac{1}{x+1} y = e^x (x+1)$ ,  $y(0) = 1$ .

4.7.  $y' - \frac{y}{x} = x \sin x$ ,  $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ . 4.8.  $y' + \frac{y}{x} = \sin x$ ,  $y(\pi) = \frac{1}{\pi}$ .

4.9.  $y' + \frac{y}{2x} = x^2$ ,  $y(1) = 1$ . 4.10.

$y' + \frac{2x}{1+x^2} y = \frac{2x^2}{1+x^2}$ ,  $y(0) = \frac{2}{3}$ .

4.11.  $y' - \frac{2x-5}{x^2} y = 5$ ,  $y(2) = 4$ . 4.12.  $y' + \frac{y}{x} = \frac{x+1}{x} e^x$ ,  $y(1) = e$ .

4.13.  $y' - \frac{y}{x} = -2 \frac{\ln x}{x}$ ,  $y(1) = 1$ . 4.14.  $y' - \frac{y}{x} = -\frac{12}{x^3}$ ,  $y(1) = 4$ .

4.15.  $y' + \frac{2}{x} y = x^3$ ,  $y(1) = -5/6$ . 4.16.  $y' + \frac{y}{x} = 3x$ ,  $y(1) = 1$ .

4.17.  $y' - \frac{2xy}{1+x^2} = 1+x^2$ ,  $y(1) = 3$ . 4.18.  $y' + \frac{1-2x}{x^2} y = 1$ ,  $y(1) = 1$ .

4.19.  $y' + \frac{3y}{x} = \frac{2}{x^3}$ ,  $y(1) = 1$ . 4.20.  $y' + 2xy = -2x^3$ ,  $y(1) = e^{-1}$ .

4.21.  $y' + \frac{xy}{2(1-x^2)} = \frac{x}{2}$ ,  $y(0) = \frac{2}{3}$ . 4.22.  $y' + xy = -x^3$ ,  $y(0) = 3$ .

$$4.23 \ y' - \frac{2}{x+1} y = e^x (x+1)^2, \quad y(0) = 1.$$

$$4.24 \ y' + 2xy = x e^{-x^2} \sin x, \quad y(0) = 1.$$

$$4.25. \ y' - 2y/(x+1) = (x+1)^3, \quad y(0) = 1/2.$$

$$4.26. \ y' - y \cos x = -\sin 2x, \quad y(0) = 3.$$

$$4.27. \ y' - 4xy = -4x^3, \quad y(0) = -1/2. \quad 4.28. \ y' - \frac{y}{x} = -\frac{\ln x}{x}, \quad y(1) = 1.$$

$$4.29. \ y' - 3x^2 y = x^2 (1 + x^3)/3, \quad y(0) = 0.$$

$$4.30. \ y' - y \cos x = \sin 2x, \quad y(0) = -1.$$

**Контрольные вопросы:**

1. Какое уравнение называется линейным уравнением первого порядка?
2. Какое уравнение называется дифференциальным уравнением.
3. Что называется решением дифференциального уравнения.
4. Общее решение дифференциального уравнения.
5. Написать общий вид дифференциального уравнения 1-го порядка с разделяющимися переменными.
6. Задача Коши.
7. Каков общий вид однородного дифференциального уравнения 1-го порядка?
8. Алгоритм решения однородного дифференциального уравнения первого порядка.



## **Перечень рекомендуемых учебных изданий, интернет-ресурсов, дополнительной литературы**

### **Основные источники:**

- 1) Григорьев В.П. «Элементы высшей математики», 2019 ОНЦ «Академия».
- 2) Григорьев В.П. «Сборник задач по высшей математике», 2019 ОНЦ «Академия».
- 3) Омельченко В. П., Математика: учебное пособие / Омельченко В. П., Курбатова Э. В. -Ростов н/Д.: Феникс, 2018.
- 4) Богомолов Н.В. Практические занятия по высшей математике. - М.: Высшая школа, 2020.
- 5) Подольский В.А. и др. Сборник задач по математике для техникумов. - М.: Высшая школа, 2019.
- 6) Валуцэ И.И. и др. Математика для техникумов на базе средней школы: учеб. пособ. - М.: Наука, 2019.
- 7) Дадаян А.А. Математика: учеб. - М.: ФОРУМ: ИНФРА-М, 2018  
Математика для техникумов. Алгебра и начала анализа: В 2-х частях, учеб. /Каченовский М.И. и др. под ред. Г.Н. Яковлева. - М.: Наука, 2018.

### **Дополнительные источники:**

- 1) Высшая математика для экономистов. Под ред. Н. Ш. Кремера. - М.: ЮНИТИ, 2019
- 2) Спирина М.С. Дискретная математика: учеб. - М.: Академия, 2020.
- 3) Гончарова Г.А., Мочалин А.А. Элементы дискретной математики: учеб. пособ.- М.: Форум: ИНФРА-М, 2019.

### **Интернет-ресурсы**

- 1) [www.fcior.edu.ru](http://www.fcior.edu.ru) (Информационные, тренировочные и контрольные материалы)
- [www.school-collection.edu.ru](http://www.school-collection.edu.ru) (Единая коллекции цифровых образовательных ресурсов).
- 2) <http://www.mathnet.spb.ru/>
- 3) <http://www.exponenta.ru/educat/class/class.asp>
- 4) <http://www.mathem.h1.ru/index.html>
- 5) [http://www.bymath.net/studyguide/tri/tri\\_topics.html](http://www.bymath.net/studyguide/tri/tri_topics.html)
- 6) <http://festival.1september.ru/>