МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕНО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
ФГБОУ ВО «Брянский государственный технический университет»
(БГТУ)

Политехнический колледж (ПК БГТУ)

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 00DF212636081B4F2FEC2C849AFF43F11D
Владелец: Федонин Олег Николаевич
Действителен: с 27.07.2023 до 19.10.2024

УТВЕРЖДАЮ
Ректор ФГБОУ ВО БГТУ

____________ О.Н. Федонин
«29» 04 2022г.

Методически рекомендации (краткие конспекты по темам) для проведения занятий по дисциплине ПД. 01 Математика

Разработал(и):
– преподаватель ПК БГТУ Е.Г.Бедина

Материалы рассмотрены и одобрены на заседании предметно-цикловой комиссии «Математика и общие естественно научные дисциплины » ПК БГТУ (далее — ПЦК)

от «29.04» 2022 г., протокол № 9

Председатель ПЦК Л.А.Лазарева

Брянск 2022

Оглавление

Введение

Овладение практически любой современной профессией требует определенных математических знаний. Представление о роли математики в современном мире, математические знания стали необходимым компонентом общей культуры. Для самореализации, возможности успешной деятельности в информационном мире требуется прочная математическая подготовка. Математическое образование включает в себя овладение системой математических знаний, умений и навыков, дающих представление о предмете математики, о математической символике, специальных математических приемах, методах мышления.

Учебный материал чётко дозирован по одному или нескольким занятиям. Такое построение помогает студентам изучать многие вопросы самостоятельно, особенно если студентом пропущено какое-либо конкретное занятие или тема.

Конспект лекций содержит необходимый материал по всем разделам курса математики: Развитие понятия о числе; Основы тригонометрии; Корни, степени и логарифмы; Функции, их свойства и графики; Степенные, показательные, логарифмические и тригонометрические функции; Начало математического анализа; Уравнения и неравенства; Прямые и плоскости в пространстве; Координаты и векторы; Многогранники; Элементы теории вероятности и математической статистики, которые обычно изучаются студентами на первом курсе.

Изложение теоретического материала по некоторым темам сопровождается рассмотрением примеров и задач, ведется на доступном, по возможности строгом языке. Пособие поможет студентам освоить 1 курс математики, подготовиться к сдаче зачетов и экзаменов по математическим дисциплинам.

Математика в науке, практической деятельности.

Математика – наука о количественных отношениях и пространственных формах действительного мира.

Роль математики в современной науке постоянно возрастает. Это связанно с тем, что без разработки и использования математических наук было бы, например, невозможно ни освоение космоса, ни создание электронно-вычислительных машин, нашедших применение в самых различных областях человеческой деятельности.

Математика представляет собой основу фундаментальных исследований в естественных и гуманитарных науках. Математические идеи и методы проникают в управление весьма сложными и большими системами разной природы: полетами космических кораблей, отраслями промышленности, работой обширных транспортных систем и других видов деятельности. В математике возникают новые теории в ответ на запросы практики и внутреннего развития самой математики. Приложения различных областей математики стали неотъемлемой частью науки, в том числе: физики, химии, геологии, биологии, медицины, лингвистики, экономики, социологии и др.

Математика играет важную роль в естественнонаучных, инженерно-технических и гуманитарных исследованиях. Она стала для многих отраслей знаний не только орудием количественного расчета, но также методом точного исследования и средством предельно четкой формулировки понятий и проблем. Без современной математики с ее развитым логическим и вычислительным аппаратом был бы невозможен прогресс в различных областях человеческой деятельности.

Математика является не только мощным средством решения прикладных задач и универсальным языком науки, но также и элементом общей культуры. Действительно, математика проникает во все сферы человеческой деятельности. Трудно назвать хотя бы один раздел науки или какую-либо профессиональную область, где не присутствовала бы математика или её методы. Поэтому необходимость математического образования для успешного формирования личности не вызывает сомнений.

1. Цели и задачи изучения математики в учреждениях среднего профессионального образования:

- формирование представлений о математике как универсальном языке науки, средстве моделирования явлений и процессов, об идеях и методах математики;
- развитие логического мышления, пространственного воображения, алгоритмической культуры, критичности мышления на уровне, необходимом для будущей профессиональной деятельности, для продолжения образования и самообразования;
- овладение математическими знаниями и умениями, необходимыми в повседневной жизни, для изучения смежных естественнонаучных дисциплин на базовом уровне и дисциплин профессионального цикла, для получения образования в областях, не требующих углублённой математической подготовки;
- воспитание средствами математики культуры личности, понимания значимости математики для научно-технического прогресса, отношения к математике как к части общечеловеческой культуры через знакомство с историей развития математики, эволюцией математических идей.

Тема 1. Развитие понятия о числе
Тема 1.1 Целые и рациональные числа

Определение и свойства натуральных и целых чисел. Рациональные числа и его свойства.

Уметь: выполнять арифметические действия над числами, решать задачи.
Знать: определение и свойства натуральных и целых чисел, рациональные числа и их свойства.

Определение. ***Натуральные числа*** – это числа вида N={1, 2, 3, …,}. Натуральные числа появились в связи с необходимостью подсчета предметов.

Определение. Натуральные числа, числа, противоположные натуральным, и нуль составляют ***множество*** Z ***целых чисел***.

Свойства натуральных и целых чисел:
1) $a+b=b+a$ - переместительный закон сложения;
2) $a+(b+c)=(a+b)+c$ - сочетательный закон сложения;
3) $a*b=b*a$ - переместительный закон умножения;
4) $a*(b*c)=(a*b)*c$ - сочетательный закон умножения;
5) $a*(b+c)=ab+ac$ - распределительный закон умножения относительно сложения.

Определение. ***Рациональные числа*** – это числа, представимые в виде дроби $\frac{m}{n}$, где m - целое число, а n - натуральное число. Для обозначения рациональных чисел используется латинская буква Q. Все натуральные и целые числа – рациональные.

Примеры рациональных чисел: $\frac{1}{2}; \frac{2}{7}; -\frac{11}{3}$.

Свойства рациональных чисел.
1) $a+b=b+a$;
2) $a+(b+c)=(a+b)+c$;
3) $a+0=a$;
4) $a+(-a)=0$;
5) $a*b=b*a$;
6) $a*(b*c)=(a*b)*c$;
7) $a*(b+c)=ab+ac$;
8) $a*1=a$;
9) $a*\frac{1}{a}=1$; где $a\neq 0$;
10) $a*0=0$.

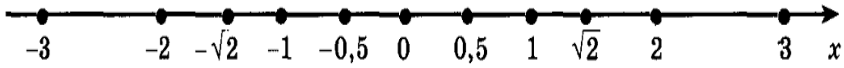
Тема 1.2. Действительные числа.Действия над действительными числами.

Определение действителных чисел. Иррациональные числа.

Уметь: выполнять арифметические действия над числами, решать задачи.
Знать: определение и свойства действительных чисел, иррациональных чисел.

Определение. ***Действительные числа (вещественные)*** – числа, которые применяются для измерения непрерывных величин. Множество действительных чисел обозначается латинской буквой R. Действительные числа включают в себя рациональные и иррациональные числа. ***Иррациональные числа*** – числа, которые получаются в результате выполнения различных операций с рациональными числами (н-р, извлечение корня, вычисление логарифмов), но при этом не являются рациональными. Примеры иррациональных чисел: $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; π.

Любое действительное число можно отобразить на числовой прямой.



Вывод: Для перечисленных выше множеств чисел справедливо следующее высказывание:

$$N \subset Z \subset Q \subset R,$$

то есть, множество натуральных чисел входит во множество целых чисел. Множество целых чисел входит во множество рациональных чисел. А множество рациональных чисел входит во множество действительных чисел.

Модуль действительного числа x обозначается $|x|$ и определяется так же, как и модуль рационального числа:

$$|x| = \begin{cases} x, x \ge 0, \\ -x, x < 0. \end{cases}$$

Свойства модулей:

1) $|a| = \sqrt{a^2}$,
2) $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$;
3) $|a| \ge 0$;
4) $|a| = |-a|$;
5) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$;
6) $|a|^2 = a^2$;
7) $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}, b \ne 0$;
8) $|a+b| \le |a| + |b|$;
9) $|a-b| \ge |a| - |b|$.

Контрольные вопросы

1. Определение и свойства натуральных и целых чисел.
2. Рациональные числа и его свойства.
3. Иррациональные числа.

Тема 1.3. Приближенные значения. Абсолютная и относительная погрешности.

Приближенные значения. Погрешность приближения. Абсолютная и относительная погрешности приближения и их границы. Числа верные, сомнительные, строго верные и значащие.

Уметь: находить приближенные значения величин и погрешностей вычислений, применять практические приемы приближенных вычислений.

Знать: приближенные значения, погрешность приближения, абсолютная и относительная погрешности приближения и их границы, числа верные, сомнительные, строго верные и значащие.

1.Приближенное значение величины. Абсолютная погрешность приближения. Граница абсолютной погрешности.

Пусть результат измерения или вычисления величины x с некоторой точностью равен a. Тогда a называется *приближенным значением* (или *приближением*) величины x. Причем, если $a \le x$, то a называется *приближенным значением с недостатком* (или *приближением снизу*), а если $a \ge x$, то a называется *приближенным значением с избытком* (или *приближением сверху*) величины x.

Определение. Разность точного и приближенного значений величины называется ***погрешностью приближения***.

Так, если x - точное значение, a - приближенное значение, то разность $x - a$ - погрешность приближения. Если ее обозначим через Δx, то получим

$$x = a + \Delta x,$$

т.е. истинное значение равно сумме приближенного значения и погрешности приближения.

Модуль разности точного и приближенного значений величины называется ***абсолютной погрешностью приближения***.

Следовательно, если $\Delta x = x - a$ - погрешность приближения, то $|\Delta x| = |x - a|$ - абсолютная погрешность приближения.

Во многих практически важных случаях нельзя найти абсолютную погрешность приближения из-за того, что неизвестно точное значение величины. Однако можно указать положительное число, больше которого эта абсолютная погрешность быть не может.

Определение. Любое положительное число, которое больше или равно абсолютной погрешности, называется ***границей абсолютной погрешности***.

Следовательно, если x - точное значение, a - приближенное значение, то разность $\Delta x = x - a$ - погрешность приближения, то любое число h, удовлетворяющее неравенству $|\Delta x| \le h$, является границей абсолютной погрешности. В этом случае говорят, что величина x приближенно с точностью до h равна a, и пишут

$x \approx a$ с точностью до h

или $x = a \pm h.$ Запись $x = a \pm h$ означает, что истинное значение величины x заключено между границами $a - h$ и $a + h,$ т. е.

$$a - h \le x \le a + h.$$

Если известно, что a является приближенным значением величины x, и требуется определить границу абсолютной погрешности этого приближенного значения, то эту задачу обычно формулируют так: «Определить (найти) точность приближенного равенства $x \approx a$».

2.*Относительная погрешность. Граница относительной погрешности.*

Определение: Отношение абсолютной погрешности приближения к модулю приближенного значения величины называется ***относительной погрешностью*** приближения.

Следовательно, если x - точное значение, a - приближенное значение, то отношение

$$\frac{|\Delta x|}{|a|} = \frac{|x - a|}{|a|}$$

является относительной погрешностью приближения.

Относительную погрешность часто выражают в процентах.

В отличие от абсолютной погрешности, которая чаще всего бывает размерной величиной, относительная погрешность является безразмерной величиной.

Определение. Любое положительное число, которое больше или равно относительной погрешности, называется ***границей относительной погрешности***.

Следовательно, если Δx - погрешность приближения, то любое число δ, удовлетворяющее неравенству

$$\frac{|\Delta x|}{|a|} \le \delta,$$

является границей относительной погрешности. В частности, если h - граница абсолютной погрешности, то число

$$\delta = \frac{h}{|a|}$$

является границей относительной погрешности приближения a. Отсюда, зная границу относительной погрешности, можно найти границу абсолютной погрешности:

$$h = \delta \cdot |a|.$$

3.Округление и погрешность округления.

Определение. Абсолютная погрешность, допускаемая при округлении, называется ***ошибкой округления***.

Существуют три способа округления положительных десятичных дробей: округление с недостатком, округление с избытком и округление с наименьшей ошибкой.

Округление с недостатком до единиц до некоторого разряда состоит в отбрасывании единиц всех младших разрядов. При таком округлении все цифры десятичной дроби до данного разряда включительно не меняются, а цифры младших разрядов заменяются нулями. Например, если $x = 23,467$, то округления с недостатком до сотых, десятых, единиц, десятков соответственно равны

23,46; 23,4; 23; 20.

Ошибки округления соответственно равны

0,007; 0,067; 0,467; 3,467.

Округление с избытком до единиц некоторого разряда отличается от округления с недостатком тем, что число единиц данного разряда увеличивается на единицу.

Например, если $x = 23,467,$ то округление с избытком до сотых, десятых, единиц, десятков соответственно равны

23,47; 23,5; 24; 30.

Ошибки округления соответственно равны

0,003; 0,033; 0,533; 6,533.

Самым распространенным округлением является *округление с наименьшей погрешностью*. Оно производится по следующим правилам:

1) Единицы младших разрядов отбрасываются;

2)число единиц данного разряда не меняется, если следующая цифра данной дроби меньше 5, и увеличивается на единицу, если следующая цифра больше или равна 5.

Например, если $x = 23,467,$ то округления с наименьшей погрешностью до сотых, десятых, единиц и десятков соответственно равны

23,47; 23,5; 23; 20.

Ошибки округления соответственно равны

0,003; 0,033; 0,467; 3,467.

Контрольные вопросы

1. Приближенные значения.
2. Погрешность приближения.
3. Абсолютная и относительная погрешности приближения и их границы.
4. Числа верные, сомнительные, строго верные и значащие.

Тема 1.4. Комплексные числа

Определение комплексного числа, понятие равенства и действия сложения и умножения комплексных чисел, модуль и аргумент комплексного числа.

Уметь: выполнять действия над комплексными числами а алгебраической форме

Знать: определение комплексного числа, понятие равенства и действия сложения и умножения комплексных чисел и деления комплексных чисел.

Как известно из школьного курса, уравнение вида $x^2 + a = 0$ не имеет действительных корней, но существует необходимость решать уравнения такого вида. Для этого придумали так называемые «комплексные числа».

Для определения комплексных чисел сначала введем некоторый символ i, который назовем *мнимой единицей*. Этому символу приписывается свойство удовлетворять уравнению $x^2 + 1 = 0$: $i^2 + 1 = 0$, или $i^2 = -1$; $i = \sqrt{-1}$. При этом

$i^1 = i,\ i^3 = i^2 \cdot i = -i,\ i^4 = i^3 \cdot i = 1,\ i^5 = i, \ldots .$

Комплексным числом z называется выражение $z = a + ib$, где a и b – действительные числа. При этом число a называется *действительной частью* числа z ($a = Re\ z$), а b – *мнимой частью* ($b = Im\ z$).

Если $a = Re\ z = 0$, то число z будет чисто мнимым, если $b = Im\ z = 0$, то число z будет действительным.

Числа $z = a + ib$ и $\bar{z} = a - ib$ называются *комплексно-сопряженными*.

Два комплексных числа $z_1 = a_1 + ib_1$ и $z_2 = a_2 + ib_2$ называются равными, если соответственно равны их действительные и мнимые части: $a_1 = a_2$; $b_1 = b_2$;

Множество комплексных чисел – неупорядоченное множество, т.е. из двух комплексных чисел нельзя указать последующее и предыдущее. Между двумя комплексными числами нельзя поставить знаки неравенства > или <.

Комплексное число равно нулю, если соответственно равны нулю действительная и мнимая части: $a = b = 0$.

Действия над комплексными числами.

1) $z = z_1 \pm z_2 = (a_1 + ib_1) \pm (a_2 + ib_2) = (a_1 \pm a_2) + i(b_1 \pm b_2)$

2) $z = z_1 z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1 a_2 + ia_1 b_2 + ib_1 a_2 + i^2 b_1 b_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + b_1 a_2)$

3) $z = \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = x + iy$ или

$$z = \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{(a_2 + ib_2)(a_2 - ib_2)} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + i(a_2 b_1 - a_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i\frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}$$

Контрольные вопросы

1. Определение комплексного числа
2. Понятие равенства
3. Действия над комплексными числами

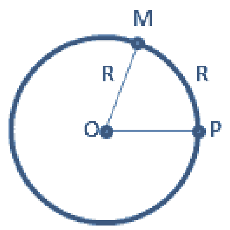
Тема 3. ОСНОВЫ ТРИГОНОМЕТРИИ

Тема 3.1. Радианная мера угла. Вращательное движение.

Единичная окружность. Угол в один радиан. Поворот точки вокруг начала координат.

Уметь: находить координаты точки и углов.
Знать: единичную окружность, угол в один радиан, формулы перехода от радиан к градусам и от градусов к радианам, поворот точки вокруг начала координат.

Определение: Центральный угол, опирающийся на дугу, длина которой равна радиусу окружности, называется углом в 1 радиан.



Градусная мера угла в 1 радиан равна:

Так как дуга длиной πR (полуокружность), стягивает центральный угол в 180°, то дуга длиной R, стягивает угол в π раз меньший, т.е.

$$\mathbf{1}\ \text{рад} = \left(\frac{\mathbf{180}}{\boldsymbol{\pi}}\right)^{\circ}$$

И наоборот

$$\mathbf{1^\circ} = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{180}}\text{рад}$$

Так как π **= 3,14, то 1 рад = 57,3°**

Если угол содержит *a* радиан, то его градусная мера равна

$$\boldsymbol{a}\ \text{рад} = \left(\frac{\mathbf{180}}{\boldsymbol{\pi}}\cdot \boldsymbol{a}\right)^{\circ}$$

И наоборот

$$\boldsymbol{a}^\circ = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{180}}\cdot \boldsymbol{a}\ \text{рад}$$

Обычно при обозначении меры угла в радианах наименование «рад» опускают.

Например, 360° = 2π рад, пишут 360° = 2π

В таблице указаны наиболее часто встречающиеся **углы в градусной и радианной мере.**

Градусы	0	30	45	60	90	180

Радианы	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π

Радианная мера угла удобна для вычисления длины дуги окружности. Так как угол в 1 радиан стягивает дугу, длина которой равна радиусу R, то угол в α рад стягивает дугу длиной

$$l = \alpha \cdot R$$

Особенно простой вид формула имеет в случае, когда R =1. Тогда длина дуги равна величине центрального угла, стягиваемого этой дугой, в радианах, т.е. $l = \alpha$.

Площадь кругового сектора радиуса R, образованного углом в α рад, равна

$$S = \frac{R^2}{2}\alpha$$

Поворот точки вокруг начала координат

Рассмотрим на координатной плоскости окружность радиуса 1 с центром в начале координат. Ее называют единичной окружностью. Введем понятие поворота точки единичной окружности вокруг начала координат на угол α рад, где α - любое действительное число.

1. Пусть α>0. Предположим, что точка, двигаясь по единичной окружности от точки P против часовой стрелки, прошла путь длиной α (рис. 1). Конечную точку пути обозначим M.

В этом случае будем говорить, что точка M получена из точки P поворотом вокруг начала координат на угол α радиан.

2. Пусть α<0. В этом случае поворот на угол α радиан означает, что движение совершалось по часовой стрелке и точка прошла путь длинной $|\alpha|$ (рис. 2).

Поворот на 0 рад означает, что точка остается на месте.

Примеры:

1) При повороте точки P(1;0) на угол($\frac{\pi}{2}$)(рис. 3) получается точка M с координатами (0;1).
2) При повороте точки P(1;0) на угол(-$\frac{\pi}{2}$) (рис. 3) получается точка N(0;-1).
3) При повороте точки P(1;0) на угол($\frac{3\pi}{2}$) (рис. 4) получается точка K(0;-1).
4) При повороте точки P(1;0) на угол(-π) (рис. 4) получается точка Д(-1;0).

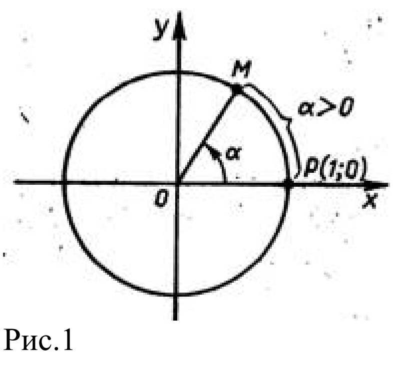


Рис.1

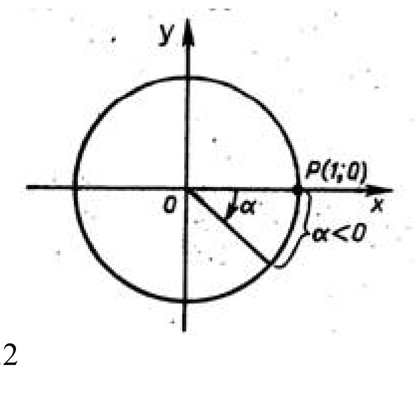


Рис.2

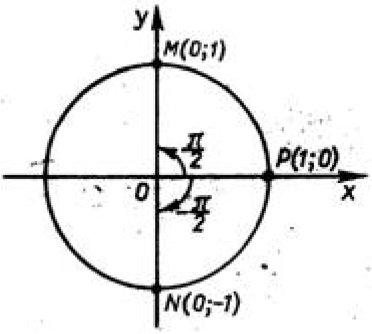


Рис.3

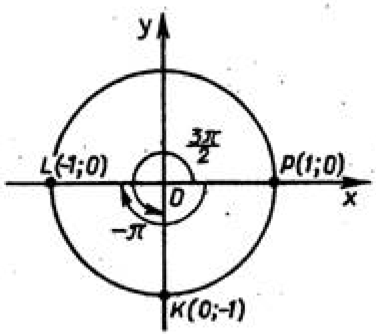
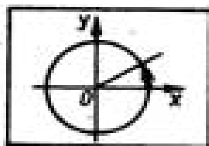
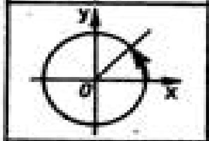
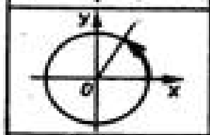
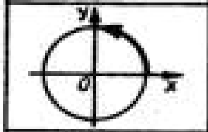
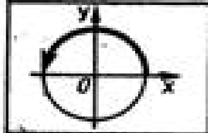
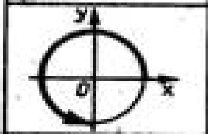
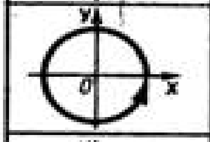
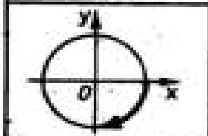
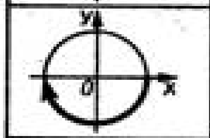


Рис.4

	$\frac{\pi}{6}$	30°
	$\frac{\pi}{4}$	45°
	$\frac{\pi}{3}$	60°
	$\frac{\pi}{2}$	90°
	π	180°
	$\frac{3\pi}{2}$	270°
	2π	360°
	$-\frac{\pi}{2}$	-90°
	$-\pi$	-180°

Приведем таблицу поворотов на некоторые углы, выраженные в радианной и градусной мерах (рис. 5). Отметим, что при повороте точки P(1;0) на 360°, точка возвращается на первоначальное положение (см. таблицу). При повороте точки на -360°, она также возвращается в первоначальное положение.

Рис. 5

Тема 3.2. ***Определение синуса, косинуса, тангенса и котангенса угла.***

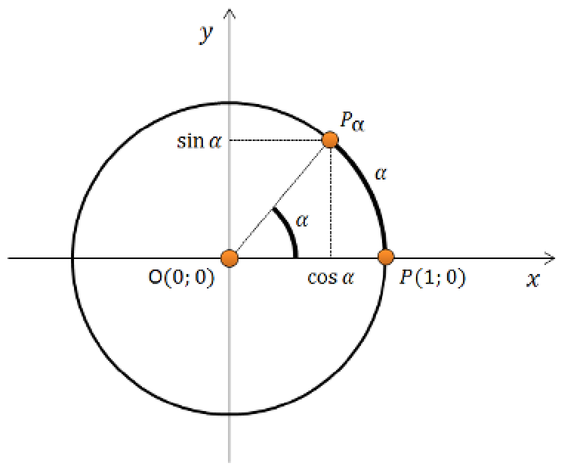
Определения синуса, косинуса, тангенса и котангенса числа. Знаки синуса и косинуса.

Уметь: находить значения тригонометрических выражений, определять знаков чисел $\sin\alpha,\ \cos\alpha,\ tg\alpha,\ ctg\alpha$.

Знать: определения синуса, косинуса, тангенса и котангенса числа, знаки синуса и косинуса.

Определение 1. Синусом угла α называется ордината точки, полученной поворотом точки (1;0) вокруг начала координат на угол α. Обозначается $\sin\alpha$

Определение 2. Косинусом угла α называется абсцисса точки, полученной поворотом точки (1;0) вокруг начала координат на угол α. Обозначается $\cos\alpha$



В этих определениях угол может выражаться как в градусах, так и в радианах.

Определение 3. Тангенсом угла α называется отношение синуса угла α к его косинусу (обозначается $tg\alpha$).

Таким образом $tg\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

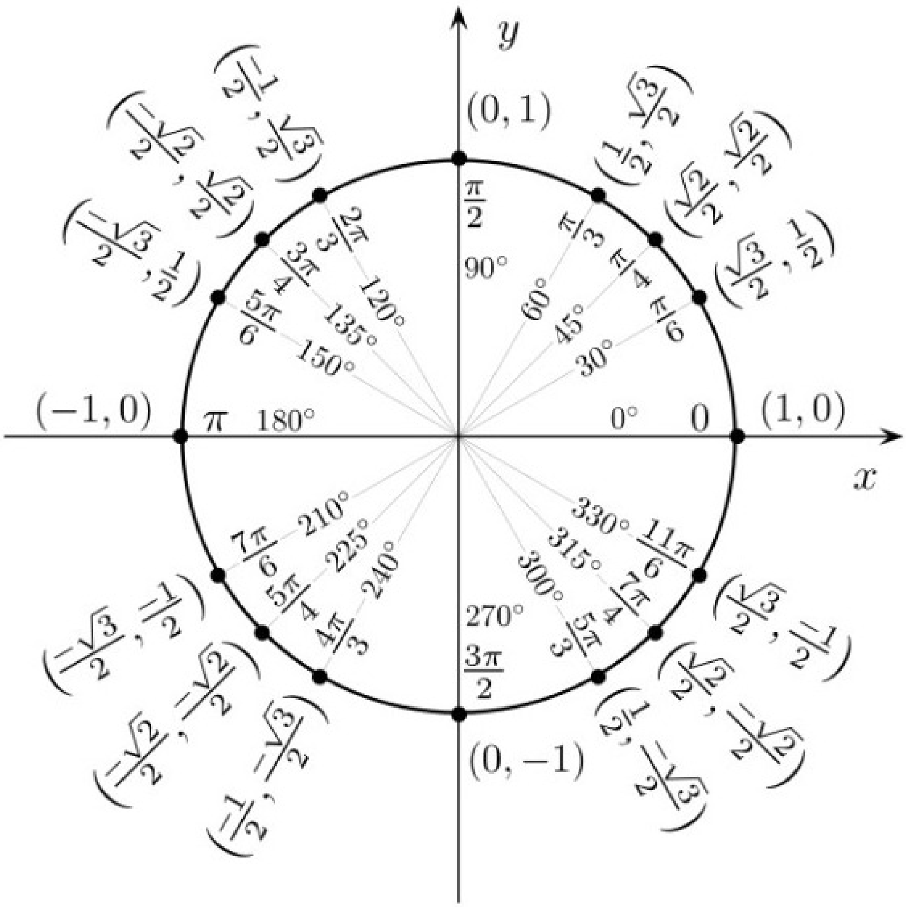
Определение 4. Котангенсом угла α называется отношение косинуса угла α к его синусу (обозначается $ctg\alpha$).

Таким образом $ctg\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

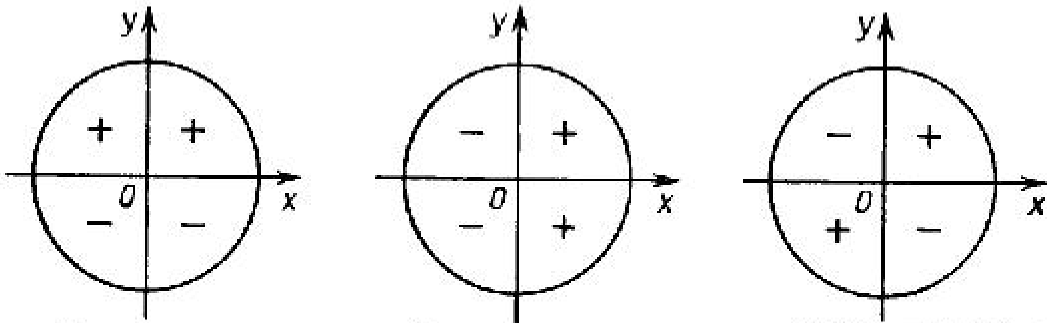
Приведем таблицу часто встречающихся значений синуса, косинуса, тангенса и котангенса.

Градусы	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Радианы	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
Функция sinα	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cosα	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tgα	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	0	-	0
ctgα	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	-	0	-

Значения косинуса и синуса на окружности.



Знаки синуса, косинуса и тангенса.



Контрольные вопросы

1. Единичная окружность.
2. Угол в один радиан.
3. Поворот точки вокруг начала координат.
4. Определения синуса, косинуса, тангенса и котангенса числа.
5. Знаки синуса и косинуса.

Тема 3.3, 3.4. Основные тригонометрические тождества. Фрмулы сложения

Зависимость между синусом, косинусом, тангенсом и котангенсом одного и того же угла. Формулы сложения.

Уметь: преобразовывать простейшие тригонометрические выражения, вычислять с помощью формулы сложения.

Ззнать: зависимость между синусом, косинусом, тангенсом и котангенсом одного и того же угла, формулы сложения.

Основное тригонометрическое тождество:

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

Зависимость между синусом и косинусом:

$$\cos^2\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$$
$$\sin^2\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$$

$$tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$$
$$tg^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha},\ ctg^2\alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

Синус, косинус, тангенс углов $(-\alpha)$ ***и*** α**.**

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$
$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$
$$tg(-\alpha) = -tg\alpha$$
$$ctg(-\alpha) = -ctg\alpha$$

Формулы сложения

Основой для вывода остальных формул являются ***формулы сложения:***

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$
$$tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha tg\beta}$$

Контрольные вопросы

1. Зависимость между синусом, косинусом.
2. Зависимость между тангенсом и котангенсом одного и того же угла.
3. Формулы сложения.

Тема 3.5. Синус, косинус и тангенс двойного угла. Синус, косинус и тангенс половинного угла Формулы приведения

Вывод формул синуса и косинуса двойного угла, используя формулы сложения. Нахождения половинного угла по известным значениям косинуса и синуса. Применение формул приведения.

Уметь: использовать формулы двойного угла, использовать формулы половинного угла, применять при решении задач формулы приведения.

Знать: вывод формул синуса и косинуса двойного угла, используя формулы сложения, нахождения половинного угла по известным значениям косинуса и синуса, применение формул приведения.

Синус, косинус и тангенс двойного угла.

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$$

Синус, косинус и тангенс половинного угла

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$$
$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$$
$$tg^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$$

Формулы приведения

для синуса:

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha$, $\quad$ $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \cos\alpha$,

$\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha$, $\quad$ $\sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha$,

$\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) = -\cos\alpha$, $\quad$ $\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right) = -\cos\alpha$.

для косинуса:

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\alpha$, $\quad$ $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\sin\alpha$,

$\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$, $\quad$ $\cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha$,

$\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) = -\sin\alpha$, $\quad$ $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right) = \sin\alpha$.

для тангенса и котангенса:

$tg\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -ctg\alpha$, $\quad$ $ctg\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -tg\alpha$,

$tg\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = ctg\alpha$, $\quad$ $ctg\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = tg\alpha$.

В правой части формулы ставится тот знак, который имеет левая часть при условии $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Если в левой части формулы угол равен $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ или $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$, то синус заменяется на косинус, тангенс – на котангенс и наоборот. Если угол равен $\pi \pm \alpha$, то замены не происходит.

Сумма и разность синусов. Сумма и разность косинусов.

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Контрольные вопросы

1. Вывод формул синуса и косинуса двойного угла, используя формулы сложения.
2. Нахождения половинного угла по известным значениям косинуса и синуса.
3. Применение формул приведения.

Тема 3.5 .Тригонометрические функции.

Определение тригонометрических функций, свойства тригонометрических функций, графики тригонометрических функций

Уметь: строить гафики тригонометрических функций, описывать их свойств, применять свойства при решении упражнений

Знать: определения тригонометрических функций, свойства тригонометрических функций

Функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \mathrm{tg}\, x$, $y = \mathrm{ctg}\, x$ называют тригонометрическими функциями.

Функция $y = \sin x$.

Свойства и график функции $y = \sin x$.

1) Область определения - множество всех действительных чисел.

2) Область значений - отрезок [- 1; 1].

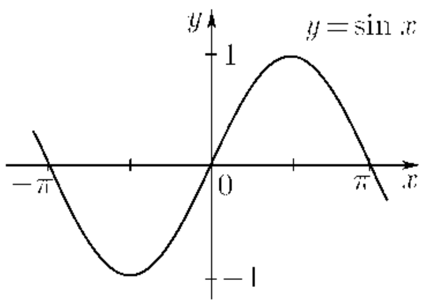
3) Функция периодическая; основной период равен- 2π.

4) Функция нечетная .

5) Функция возрастает на промежутках [-π/2 + 2πn; π/2 + 2πn] и убывает на промежутках

[π/2 + 2π*n*; 3π/2 + 2π*n*], $n \in$ Z.

График функции $y = \sin x$ изображен на рисунке.



Функция $y = \cos x$

Свойства и график функции $y = \cos x$.

1) Область определения функции - множество всех действительных чисел.

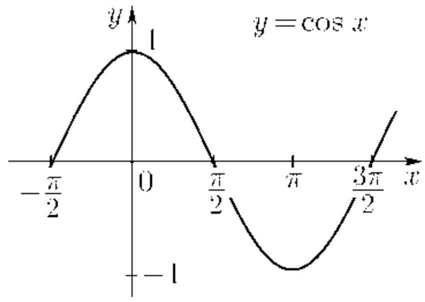
2) Область значений - отрезок [- 1; 1].

3) Функция периодическая с основным периодом 2π.

4) Функция четная.

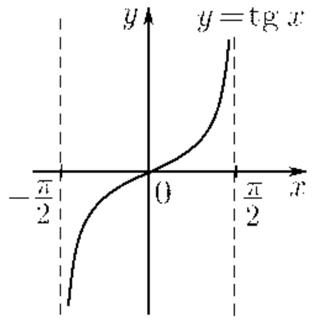
5) Функция убывает на промежутках [2πn; π+ 2 n] и возрастает на промежутках [-π+ 2πn; 2πn], nπZ.

График функции y = cos x изображен на рисунке.



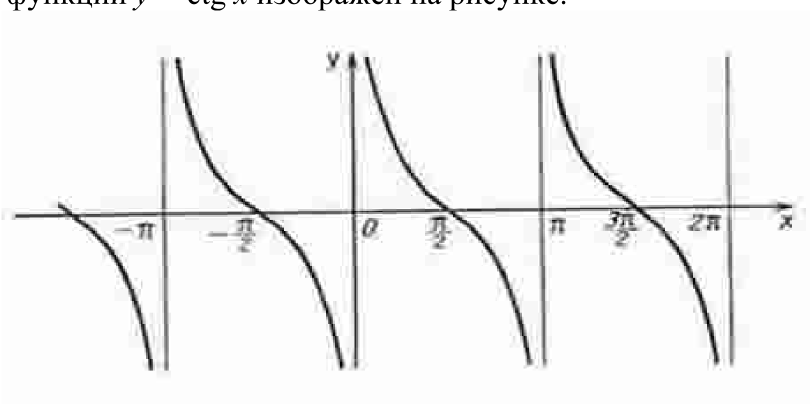
Функция *y* = tg *x*.

Свойства и график функции *y* = tg *x*.
1) Область определения: $x \notin \pi/2 + \pi k$, $k \in Z$.
2) Область значений - вся числовая прямая.
3) π- основной период функции.
4) Функция нечетная.
5) Функция возрастает на промежутках (-π/2 +πn;π/2 +πn).
График функции *y* = tg *x* изображен на рисунке.



Функция *y* = ctg *x*.

Свойства и график функции *y* = ctg *x*.
1) Область определения функции: $x \notin \pi/2 + \pi k$, $k \in Z$.
2) Область значений функции - вся числовая прямая.
3) Функция периодическая с основным периодом π.
4) Функция нечетная.
5) Функция *y* = ctg *x* убывает на промежутках (πn;π+πn).
График функции *y* = ctg *x* изображен на рисунке.



Тема 3.6. Обратные тригонометрические функции, их свойстваи графики.

Определение обратных тригонометрических функций, свойства тригонометрических функций, графики тригонометрических функций

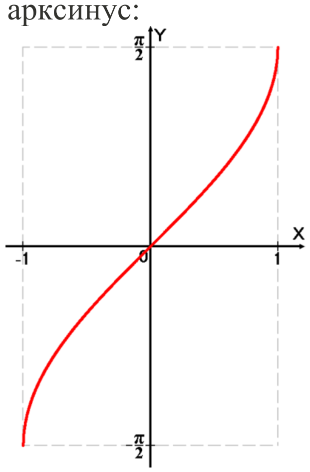
Уметь: строить гафики обратных тригонометрических функций, описывать их свойств, применять свойства при решении упражнений

З*нать:* определения обратных тригонометрических функций, свойства обратных тригонометрических функций

Обратные тригонометрические функции (арксинус, арккосинус, арктангенс и арккотангенс) являются основным элементарным функциями. Часто из-за приставки "арк" обратные тригонометрические функции называют аркфункциями. Сейчас мы рассмотрим их графики и перечислим свойства.

Функция арксинус $y = \arcsin x$

Изобразим график функции арксинус:



Свойства функции арксинус $y = \arcsin x$

1.Область определения – отрезок [-1;1].

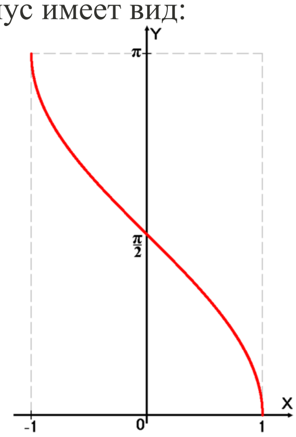
2. Множество значений – отрезок $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$.

3. Функция $y = \arcsin x$ возрастает.

4. Функция $y = \arcsin x$ является нечетной, так как $\arcsin(-x) = -\arcsin x$.

Функция арккосинус $y = \arccos x$

График функции арккосинус имеет вид:



Свойства функции арккосинус $y = \arccos x$

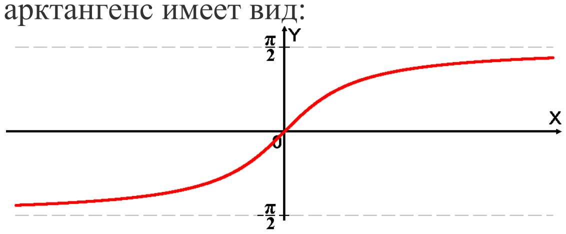
1.Область определения – отрезок [-1;1].

2. Множество значений – отрезок $[0;\pi]$.

3. Функция $y = \arccos x$ убывает.

Функция арктангенс $y = arctgx$.

График функции арктангенс имеет вид:



Свойства функции $y = arctgx$.

1.Область определения – множество всех действительных чисел.

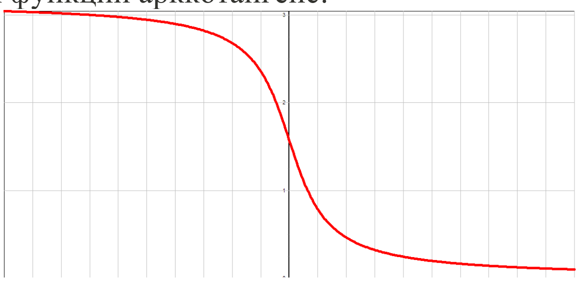
2. Множество значений – интервал $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

3. Функция $y = arctgx$ возрастает.

4. Функция $y = arctgx$ является нечетной, так как $arctg(-x) = -arctgx$.

Функция арккотангенс $y = arcrcgx$.

Изобразим график функции арккотангенс:



Свойства функции $y = arcctgx$.

1.Область определения – множество всех действительных чисел.

2. Множество значений – интервал $(0;\pi)$.

3. Функция $y = arcctgx$ убывает на всей области определения.

Контрольные вопросы

1. Определения функций, их свойства и графики.
2. Преобразования графиков.
3. Параллельный перенос, симметрия относительно осей координат и симметрия относительно начала координат, симметрия относительно прямой y=x, растяжения и сжатие вдоль осей координат.

Тема 3.7. Тригонометрические уравнения

Простейшие тригонометрические уравнения вида $\cos x = a, \sin x = a, tgx = a, ctgx = a$, *методы решения тригонометрических уравнений*

Уметь: решать уравнение вида: $\cos x = a, \sin x = a, tgx = a, ctgx = a$

Знать: определения арксинуса, арккосинуса, арктангенса; частные случаи тригонометрических уравнений, основные методы решения тригонометрических уравнений.

Уравнение $\cos x = a$.

Арккосинусом числа $a \in [-1;1]$ называется такое число $\alpha \in [0;\pi]$, косинус которого равен *a*: $\arccos a = \alpha$, если $\cos\alpha = a$ и $0 \le \alpha \le \pi$.

Все корни уравнения $\cos x = a$, где $|a| \le 1$, можно находить по формуле

$$x = \pm\arccos a + 2\pi n, n \in Z .$$

$\arccos(-a) = \pi - \arccos a$ - эта формула позволяет находить значения арккосинусов отрицательных чисел через значения арккосинусов положительных чисел.

Частные случаи:

$\cos x = 0$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$

$\cos x = 1$, $x = 2\pi n, n \in Z$

$\cos x = -1$, $x = \pi + 2\pi n, n \in Z$

Уравнение $\sin x = a$.

Арксинусом числа $a \in [-1;1]$ называется такое число $\alpha \in [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$, синус которого равен *a*: $\arcsin a = \alpha$, если $\sin\alpha = a$ и $-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$.

Все корни уравнения $\sin x = a$, где $|a| \le 1$, можно находить по формуле

$$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in Z .$$

$\arcsin(-a) = -\arcsin a$ - эта формула позволяет находить значения арксинусов отрицательных чисел через значения арксинусов положительных чисел.

Частные случаи:

$\sin x = 0$, $x = \pi n, n \in Z$

$\sin x = 1$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$

$\sin x = -1$, $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$

Уравнение $tgx = a$.

Арксинусом числа $a \in R$ называется такое число $\alpha \in [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$, тангенс которого равен *a*: $arctga = \alpha$, если $tg\alpha = a$ и $-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$.

Все корни уравнения $\sin x = a$, где $a \in R$, можно находить по формуле

$$x = arctga + \pi n, n \in Z .$$

$arctg(-a) = -arctga$ - эта формула позволяет находить значения арксинусов отрицательных чисел через значения арксинусов положительных чисел.

Тригонометрические уравнения

1. Уравнения, сводящиеся к квадратным.

2. Уравнения $a\sin x + b\cos x = c$.
3. Уравнения, решаемые разложением левой части на множители.

Контрольные вопросы
1. Уравнения вида $\cos x = a$.
2. Уравнения вида $\sin x = a$
3. Уравнения вида $tgx = a$.

Тема 4. Корни, степени

Тема 4.1.Степень с рациональным и действительным показателями.

Определение и свойства степеней с рациональным и с действительным показателями.

Уметь: решать задачи на тему: «Степень с рациональным и действительным показателями».
Знать: определение и свойства степеней с рациональным и с действительным показателями.

Степень с рациональным показателем.

Если n – натуральное число, m – целое число и частное $\frac{m}{n}$ является целым числом, то при a>0 справедливо равенство

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}.$$

Пользуясь формулой $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$, степень с рациональным показателем можно представить в виде корня и наоборот.

Так как $\frac{m}{n} = \frac{mk}{nk}$, где n и k - натуральные числа, m – целое число, то при любом a>0.

$$a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{mk}{nk}}$$

Можно показать, что все свойства степени с натуральным показателем верны для степени с любым рациональным показателем и положительным основанием.

А именно, для любых рациональных чисел p и q и любых $a > 0, b > 0$ верны равенства:

1. $a^p a^q = a^{p+q}$
2. $a^p : a^q = a^{p-q}$
3. $(a^p)^q = a^{p \cdot q}$
4. $(ab)^p = a^p b^p$
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^q = \frac{a^p}{b^p}$

Эти свойства получаются из свойств корней.

Степень с действительным показателем.

При любом $x \in R$ и любом $a > 0$ степень a^x является положительным действительным числом: $a^x > 0$ при $x \in R, a > 0$.

Если основание степени a=0, то степень 0^x определяют только при $x > 0$ и считают, что $0^x = 0$ при $x > 0$. При $x \le 0$ выражение не имеет смысла.

При таком определении степени с действительным показателем сохраняются все известные свойства степени с рациональным показателем.

Для любого $a > 1$ и любого $x > 0$ число a^x больше 1,т.е. $a^x > 1$ при $a > 1, x > 0$.

Теорема: Пусть $a > 1$ и $x_1 < x_2$.Тогда $a^{x_1} < a^{x_2}$.

Следствие 1. Пусть $0 < a < 1$ и $x_1 < x_2$. Тогда $a^{x_1} > a^{x_2}$.

Следствие 2. Пусть $a > 0, a \ne 0, a^{x_1} = a^{x_2}$. Тогда $x_1 = x_2$.

Следствие 3. Пусть $0 < x_1 < x_2$. Тогда, если $p > 0$, то $x_1^{\ p} < x_2^{\ p}$, а если $p < 0$, то $x_1^{\ p} > x_2^{\ p}$.

Таким образом, при возведении неравенства с положительной левой и положительной правой частями в положительную степень знак неравенства не меняется, а при возведении в отрицательную степень знак неравенства меняется на противоположный.

Контрольные вопросы
1. Определение и свойства степеней с рациональным показателями.
2. Определение и свойства степеней с действительным показателями.

Тема 4.2. Арифметический корень натуральной степени.

Определение и свойства арифметического корня натуральной степени.

Уметь: решать задачи на тему: «Арифметический корень натуральной степени»
Знать: определение и свойства арифметического корня натуральной степени

Определение: *Арифметическим корнем* натуральной степени $n \geq 2$ из неотрицательного числа a называется неотрицательное число, n-ая степень которого равна a.

Арифметический корень n-ой степени из числа a обозначается так: $\sqrt[n]{a}$. Число a называется подкоренным выражением. Если n=2, то вместо $\sqrt[2]{a}$ пишут $\sqrt{a}$. Арифметический корень второй степени называют также квадратным корнем, а корень третьей степени – кубическим корнем. Действие посредством которого отыскивается корень n-ой степени, называется *извлечением корня n-ой степени.* Это действие является обратным действию возведения в n-ю степень.

Арифметический корень n-ой степени обладает следующими свойствами: если $a \geq 0, b > 0$ и n,m – натуральные числа, причем $n \geq 2, m \geq 2$, то

1. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$
2. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
3. $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$
4. $(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}) = \sqrt[mn]{a}$

Отметим, что в свойстве 1 число b может также быть равным нулю; в свойстве 3 число m может быть целым, если a>0.

Контрольные вопросы
1.Определение арифметического корня натуральной степени.
2.Свойства арифметического корня натуральной степени.

Тема 4.3. Иррациональные уравнения и неравенства

Методы решения иррациональных уравнеий и неравенств

Уметь: решать основные виды иррациональных уравнений
Знать: определение иррационального уравнения, основные методы их решения

Уравнение, содержащее переменную под знаком корня, называется ***иррациональным***.

Решение иррационального уравнения основано на преобразовании его к рациональному уравнению, что достигается возведением обеих его частей в одну и ту же степень (иногда несколько раз).

При возведении обеих частей иррационального уравнения в четную степень получается уравнение, являющееся следствием исходного. Уравнению-следствию удовлетворяют все корни исходного уравнения, но могут появиться и корни, которые не являются корнями исходного уравнения («посторонние» корни). Чтобы выявить «посторонние» корни, все найденные корни уравнения-следствия проверяют подстановкой в исходное уравнение и «посторонние» корни отбрасывают.

Исходное иррациональное уравнение равносильно смешанной системе, состоящей из уравнения-следствия и ограничений, определяемых областью допустимых значений переменной. В этом случае «посторонние» корни не будут входить в область допустимых значений переменной и проверять их подстановкой в исходное уравнение не требуется.

При возведении обеих частей иррационального уравнения в нечетную степень получается уравнение, равносильное исходному.

Иррациональные неравенства с одной переменной.

Решение иррационального неравенства с одной переменной сводится к решению равносильной ему системы рациональных неравенств или совокупности систем рациональных неравенств.

Эти системы решаются при наложении ограничений на переменную и возведении обеих частей неравенства в одну и ту же степень.

Контрольные вопросы

1. Основные приемы их решения (разложение на множители, введение новых неизвестных, подстановка, графический метод).
2. Изображение на координатной плоскости множества решений уравнений с двумя переменными и их систем.
3. Изображение на координатной плоскости множества решений неравенств с двумя переменными и их систем.

Тема 4.3. Логарифмы.

Определение логарифма положительного числа. Свойства логарифмов. Десятичные и натуральные логарифмы.

Уметь: вычислять логарифмы.

Знать: Определение логарифма положительного числа. Свойства логарифмов. Десятичные и натуральные логарифмы.

Определение: Логарифмом положительного числа b по основанию a (где $a > 0$, $a \neq 0$) называется показатель степени, в которую надо возвести число a, чтобы получить число b. Логарифм числа b по основанию a обозначается символом: $\log_a b$.

Если $a > 0$, $a \neq 0$, $b>0$, то $\log_a b$ по определению есть показатель степени, в которую надо возвести число a, чтобы получить число b. Поэтому равенство

$$a^{\log_a b} = b$$

есть тождество, которое называют *основным логарифмическим тождеством**.***

Действия нахождения логарифма числа называют *логарифмированием.*

Свойства логарифмов.

Пусть $a > 0$, $a \neq 0, b > 0, c > 0$, r - любое действительное число. Тогда справедливы формулы:

1. $\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c$,

2. $\log_a\left(\dfrac{b}{c}\right)=\log_a b-\log_a c$,

3. $\log_a b^r = r\log_a b$,

4. Равным положительным числам соответствуют и равные логарифмы ,т.е. если $b_1 = b_2$, то $\log_a b_1 = \log_a b_2$,

5. $\log_a 1 = 0$,

6. $\log_a a = 1$.

Десятичные и натуральные логарифмы.

Для логарифмов чисел составлены специальные таблицы(таблицы логарифмов). Логарифмы вычисляют также с помощью микрокалькулятора. И в том, и в другом случае находятся только десятичные или натуральные логарифмы.

Определение: *Десятичным логарифмом числа* называют логарифм этого числа по основанию 10 и пишут $\lg b$ вместо $\log_{10} b$.

Определение: *Натуральным логарифмом числа* называют логарифм этого числа по основанию *e,* где *e* – иррациональное число, приближенно равное 2,7. При этом пишут $\ln b$ вместо $\log_e b$.

Формула перехода от логарифма по одному основанию к логарифму по другому основанию:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a},$$

где $a > 0$, $a \neq 1, b > 0, c > 0, c \neq 1$.

Контрольные вопросы

1. Определение логарифма положительного числа.
2. Свойства логарифмов.
3. Десятичные и натуральные логарифмы.

Тема 5. Показательная и логарифмическая

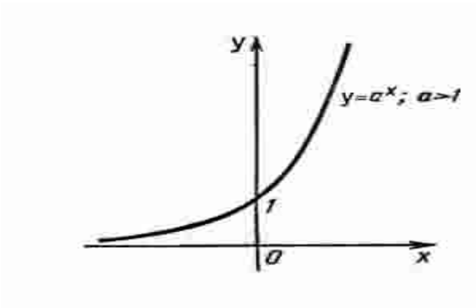
Тема 5.1. Показательная функция. Ее свойства и график

Определение, свойства и график показательной функции, их применение при решении упражнений

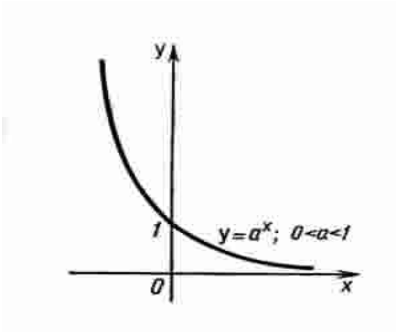
Уметь: строить графики показательных функций, описывать их свойства, применять свойства при решении упражнений

Знать: определение функции, ее свойства и графики.

Показательная функция задается формулой $y = a^x$, где $a > 0$ и $a \neq 1$.
Перечислим свойства функции $y = a^x$ при $a > 1$.
1) Область определения функции - вся числовая прямая.
2) Область значений функции - промежуток $(0; +\infty)$.
3) Функция не является ни четной, ни нечетной. Это следует из того, что $a^{-x} \neq a^x$ и $a^{-x} \neq -a^x$.
4) Функция возрастает на всей числовой прямой.
График функции $y = a^x$ при $a > 1$ выглядит так, как показано на рисунке.
Отметим, что эта функция принимает любые положительные значения.



Свойства функции $y = a^x$ при $0 < a < 1$.
1) Область определения функции - вся числовая прямая.
2) Область значений - $(0; +\infty)$.
3) Функция не является ни четной, ни нечетной.
4) Функция убывает на всей числовой прямой.
График функции $y = a^x$ при $0 < a < 1$ выглядит так, как показано на рисунке.
Отметим, что эта функция принимает любые положительные значения.



Контрольные вопросы
1.Определение показательнойфункции
2. Свойства показательной функции

Тема 5.2. Логарифмы.

Определение логарифма . Свойства логарифмов. Десятичные и натуральные логарифмы.

Уметь: вычислять логарифмы.
Знать: определение логарифма положительного числа, свойства логарифмов,десятичные и натуральные логарифмы.

Определение: Логарифмом положительного числа b по основанию a (где $a > 0$, $a \neq 0$) называется показатель степени, в которую надо возвести число a, чтобы получить число b. Логарифм числа b по основанию a обозначается символом: $\log_a b$.

Если $a > 0$, $a \neq 0$, b>0, то $\log_a b$ по определению есть показатель степени, в которую надо возвести число a, чтобы получить число b. Поэтому равенство

$$a^{\log_a b} = b$$

есть тождество, которое называют *основным логарифмическим тождеством.*

Действия нахождения логарифма числа называют *логарифмированием.*

Свойства логарифмов.

Пусть $a > 0$, $a \neq 0, b > 0, c > 0$, r - любое действительное число. Тогда справедливы формулы:

7. $\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c$,
8. $\log_a \left(\dfrac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$,
9. $\log_a b^r = r \log_a b$,
10. Равным положительным числам соответствуют и равные логарифмы ,т.е. если $b_1 = b_2$, то $\log_a b_1 = \log_a b_2$,
11. $\log_a 1 = 0$,
12. $\log_a a = 1$.

Десятичные и натуральные логарифмы.

Для логарифмов чисел составлены специальные таблицы(таблицы логарифмов). Логарифмы вычисляют также с помощью микрокалькулятора. И в том, и в другом случае находятся только десятичные или натуральные логарифмы.

Определение: *Десятичным логарифмом числа* называют логарифм этого числа по основанию 10 и пишут $\lg b$ вместо $\log_{10} b$.

Определение: *Натуральным логарифмом числа* называют логарифм этого числа по основанию *e,* где *e* – иррациональное число, приближенно равное 2,7. При этом пишут $\ln b$ вместо $\log_e b$.

Формула перехода от логарифма по одному основанию к логарифму по другому основанию:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a},$$

где $a > 0$, $a \neq 1, b > 0, c > 0, c \neq 1$.

Контрольные вопросы

1. Определение логарифма положительного числа.
2. Свойства логарифмов.
3. Десятичные и натуральные логарифмы.

Тема 5.3. Логарифмическая функция.

Определение логарифмической функции . Свойства и графики логарифмической функции

.

Уметь: строить графики логарифмических функций, описывать их свойства, применять свойства при решении упражнений

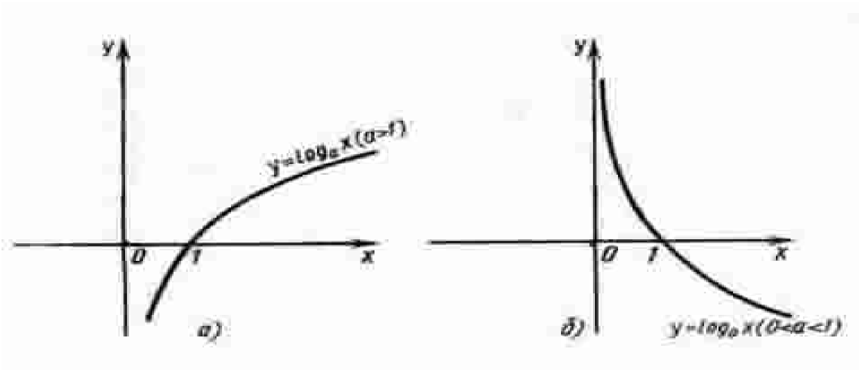
Знать: определение функции, ее свойства и графики.

Логарифмическая функция $y = \log_a x$ обладает следующими свойствами:

1) Область определения - $(0; +\infty)$.
2) Область значений - $(-\infty; +\infty)$
3) Функция ни четная, ни нечетная.
4) Функция возрастает на промежутке $(0; +\infty)$ при $a > 1$, убывает на $(0; +\infty)$ при $0 < a < 1$.

График функции $y = \log_a x$ может быть получен из графика функции $y = a^x$ с помощью преобразования симметрии относительно прямой $y = x$.

На рисунке а) построен график логарифмической функции для $a > 1$, а на рисунке б) - для $0 < a < 1$.



Функция $y = \ln x$.

Среди показательных функций $y = a^x$, где $a > 1$, особый интерес для математики и ее приложений представляет функция, обладающая следующим свойством: касательная к графику функции в точке (0; 1) образует с осью x угол 45°. Основание а такой функции ах принято обозначать буквой e, т. е. $y = e^x$. Подсчитано, что e = 2, 7182818284590..., и установлено, что e – иррациональное число. Логарифмическую функцию, обратную показательной функции $y = e^x$, т. е. функцию $y = \log_e x$, принято обозначать $y = \ln x$ (ln читается "натуральный логарифм"). График функции $y = \ln x$ изображен на рисунке.

Контрольные вопросы

1.Определение логарифмической функции.

2. Свойства логарифмических функций.

Тема 5.4. Решение показательных и логарифмических уравнений, систем уравнений

Основные приемы их решения (разложение на множители, введение новых неизвестных, подстановка, графический метод). Использование свойств и графиков функций при решении .

уметь: решать показательные и логарифмические уравнения

знать: основные приемы их решения (разложение на множители, введение новых неизвестных, подстановка, графический метод), использование свойств и графиков функций при решении уравнений. .

Показательные уравнения

Решение *показательных уравнений* часто сводится к решению уравнения

$$a^x = a^b,$$

где $a > 0, a \neq 1, x$ - неизвестное. Это уравнение решается с помощью свойства степени: степени с одинаковым основанием $a > 0, a \neq 1$ равны только тогда, когда равны их показатели.

Тема 5.4. Решение показательных и логарифмических неравенств

Решение *показательных неравенств* часто сводится к решению неравенства

$$a^x > a^b \text{ или } a^x < a^b.$$

Эти неравенства решаются с помощью свойства возрастания или убывания показательной функции: для возрастающей функции большему значению функции соответствует большее значение аргумента, а для убывающей функции большему значению функции соответствует меньшее значение аргумента.

Тема 6. Производная

Тема 6.1 Функции их свойства и графики (повторение)

Элементарные функции, их свойства и графики

Уметь: строить графики элементарных функций, описывать свойства функций.
Знать: определения функций, их свойства и графики

Назовем *упорядоченной парой* (x, y) двухэлементное множество $\{x, y\}$, в котором элемент *x* находится на первом месте, а элемент *y* – на втором. Элемент *x* называется *первой координатой* упорядоченной пары, а элемент *y* – *второй координатой.* Две упорядоченные пары равны, когда совпадают их координаты: $(x, y) = (u, v) \Leftrightarrow x = u, y = v$.

Функцией f называется множество упорядоченных пар чисел (x, y), таких, что $x \in X$, $y \in Y$ и каждому элементу $x \in X$ ставится в соответствие единственный элемент $y \in Y$. Обозначение: f: $X \to Y$. Множество *X* называется *областью определения* функции *f*, а множество Y – *областью значений.* Обозначают: D_f и E_f. Если ясно, какие множества *X* и *Y* имеются в виду, то пишут $y = f(x)$. Элемент *x* называется *аргументом,* а *y* – *значением* функции *f.*

Способы задания функции.

Существует несколько способов задания функции.

1. *Табличный*. Используется тогда, когда область определения состоит из конечного множества чисел. Тогда для задания функции проще всего указать таблицу, содержащую значения аргумента и соответствующие значения функции. Например, таблица логарифмов. Другим примером могут быть таблицы, содержащие данные о числе жителей, населяющих земной шар в отдельные годы, расписания движения поездов и т.п.
2. *Аналитический*. При аналитическом способе задания функция может быть задана *явно,* когда дано выражение *y* через *x*, т.е. формула имеет вид $y = f(x)$*; неявно,* когда *x и y* связаны между собой уравнением вида $F(x, y) = 0$; *параметрически,* когда соответствующие друг другу значения *x* и *y* выражены через третью переменную величину *t*, называемую *параметром.*
3. *Логический*. Если функция описывается правилом ее составления, например, функция Дирихле: $f(x)= 1$, если *x* – рациональное; $f(x)= 0$, если *x* – иррациональное.
4. *Графический*. Состоит в изображении *графика функции* – множества точек (x, y) плоскости, абсциссы которых есть значения аргумента *x,* а ординаты – соответствующие им значения функции $y = f(x)$. Преимуществом графического задания является его наглядность, недостатком – его неточность.

График функции

Графиком функции (в декартовой прямоугольной системе координат) называют геометрическое место точек, абсциссы которых являются значениями независимой переменной, а ординаты – соответствующими значениями функции.

Свойства функций

Под основными свойствами функции $y = f(x)$ будем понимать следующие:

1. *четность, нечетность*. Функция $y = f(x)$ называется *четной,* если для любых значений *x* из области определения $f(-x) = f(x)$ и *нечетной,* если $f(-x) = -f(x)$. В противном случае функция $y = f(x)$ называется *функцией общего вида.* График четной функции симметричен относительно оси ординат (например, график функции $y = x^2$), а график нечетной функции симметричен относительно начала координат (например, график функции

$y = x^3$). Поэтому для четной функции достаточно строить лишь правую половину графика ($x \geq 0$), левая половина его ($x \leq 0$) является зеркальным отражением правой относительно оси *Oy*. Чтобы построить график нечетной функции, достаточно изобразить правую половину его ($x \geq 0$); левая половина графика ($x \leq 0$) получается в результате поворота правой на 180°.

2. *монотонность*. Если для любых значений $x_1, x_2 \in X$ из неравенства $x_1 < x_2$ вытекает неравенство:

а) $f(x_1) < f(x_2)$, то функция называется *возрастающей*;

б) $f(x_1) \leq f(x_2)$, то функция называется *неубывающей*;

в) $f(x_1) > f(x_2)$, то функция называется *убывающей*;

г) $f(x_1) \geq f(x_2)$, то функция называется *невозрастающей*.

Возрастающие, невозрастающие, убывающие и неубывающие функции на множестве *X* называются *монотонными* на этом множестве, а возрастающие и убывающие – *строго монотонными* Интервалы, в которых функция монотонна, называются *интервалами монотонности*.

3. *ограниченность*. Функция называется *ограниченной* на промежутке *X,* если существует такое положительное число $M > 0$, что $|f(x) < M|$ для любого $x \in X$.

4. *периодичность*. Функция $y = f(x)$ называется *периодической,* если существует положительное число *T* такое, что $f(x+T) = f(x)$. Наименьшее число с таким свойством называется *периодом* функции. Для построения графика периодической функции достаточно изобразить его на отрезке, длина которого равна периоду, а затем построить периодическое продолжение графика.

Обратная функция

Пусть задана функция $y = f(x)$ с областью определения *D* и множеством значений *E*. Если каждому значению $y \in E$ соответствует единственное значение $x \in D$, то определена функция $x = \varphi(y)$ *с* областью определения *E* и множеством значений *D*. Такая функция $\varphi(y)$ называется *обратной* к функции $f(x)$ и записывается в виде: $x = \varphi(y) = f^{-1}(y)$. Про функции $y = f(x)$ и $x = \varphi(y)$ говорят, что они являются взаимно обратными. Графики взаимно обратных функций симметричны относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов.

Определение 1. ***Основными элементарными функциями*** называются следующие функции:

а) *постоянная* функция $f(x) = c,\ c \in R$;

б) *степенная* функция $f(x) = x^{\alpha}$, где α – любое действительное число;

в) *показательная* функция $f(x) = a^x$, где $a > 0, a \neq 1$;

г) *логарифмическая* функция $y = \log_a x$, где $a > 0, a \neq 1$;

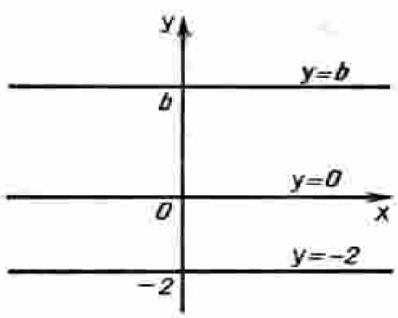
д) *тригонометрические* функции $y = \sin x, y = \cos x, y = tgx, y = ctgx$;

е) *обратные тригонометрические* функции $y = \arcsin x, y = \arccos x,\ y = arctgx,\ \ y = arcctgx$.

Рассмотрим основные свойства и графики основных элементарных функций.

а) *постоянная* функция $f(x) = c,\ c \in R$.

Область определения $(-\infty;+\infty)$, $f(x) = c$ невозрастающая и неубывающая, периодическая, не имеющая наименьшего периода. График функции $y = c$ - прямая, параллельная оси Ox, отсекающая от оси Oy отрезок величиной c.



б) *степенная* функция $f(x) = x^{\alpha}$. Если показатель $\alpha = n$ - натуральное число, то степень x^n определена для любого $x \in R,$ следовательно, $D(y) = R.$ Если $\alpha = -n, n \in N,$ то степенная функция $y = x^{-n}$ определена для любого $x \in R,\ x \neq 0.$

Если α является дробным числом, то область определения степенной функции $y = x^{\alpha}$ совпадает с множеством действительных значений x, для которых y принимает также действительные значения. Например, функция $y = \sqrt{x}$ определена при $x \geq 0,$ функция $y = \sqrt[3]{x}$ определена при любом действительном x и т.д. Если α - иррациональное число, то степенная функция $f(x) = x^{\alpha}$ определена для всех неотрицательных действительных значений $x.$

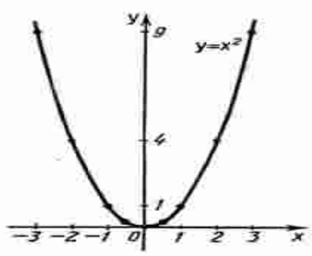
Степенная функция с натуральным показателем.

Функция $y = x^n$, где n - натуральное число, называется степенной функцией с натуральным показателем.
При $n = 1$ получаем функцию $y = x$.
При $n = 2$ получаем функцию $y = x^2$.

Функция у = x^2.

Перечислим свойства функции $y = x^2$.

1) Область определения функции - вся числовая прямая.
2) у = x^2 - четная функция (f (- x) = (- x)^2 = x^2 = f (x)).
3) На промежутке [0; + ∞) функция возрастает если $0 \leq x_1 < x_2$,то $x_1^{\ 2} < x_2^{\ 2}$, а это и означает возрастание функции).
4) На промежутке (- ∞ ; 0] функция убывает (если $x_1 < x_2 \leq 0$, то $x_1^{\ 2} > x_2^{\ 2}$, а это и означает убывание функции).
Графиком функции у = x^2 является **парабола** (см. рис)

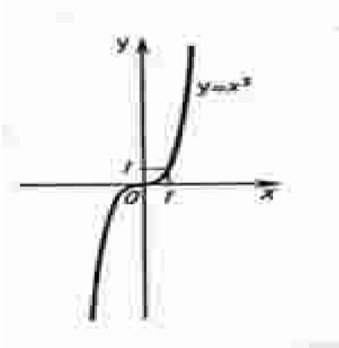


При $n = 3$ получаем функцию $y = x^3$.

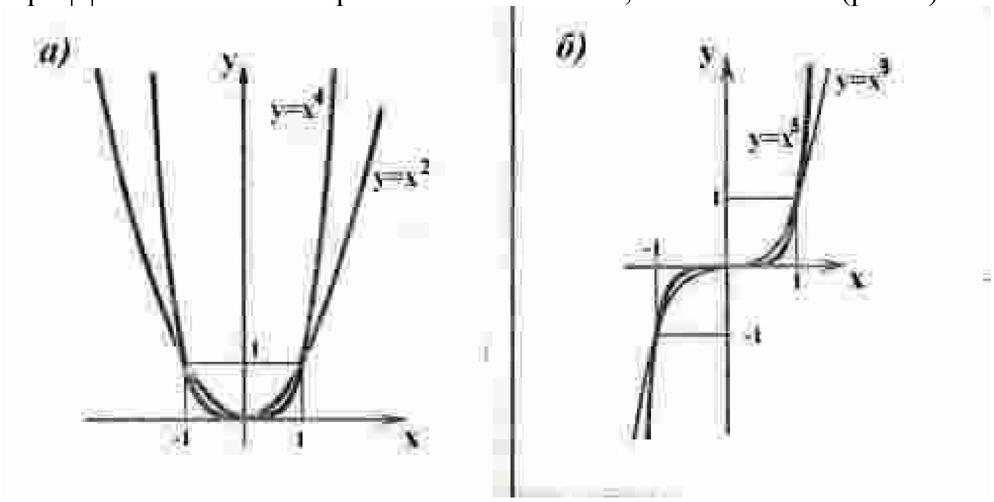
Функция $y = x^3$

Перечислим свойства функции $y = x^3$.
1) Область определения функции - вся числовая прямая.
2) $y = x^3$ - нечетная функция (f(- x) = (- x)^3= - x^3 = - f (x))

3) Функция $y = x^3$ возрастает на всей числовой прямой.
График функции $y = x^3$ изображен на рисунке. Он называется **кубической параболой.**



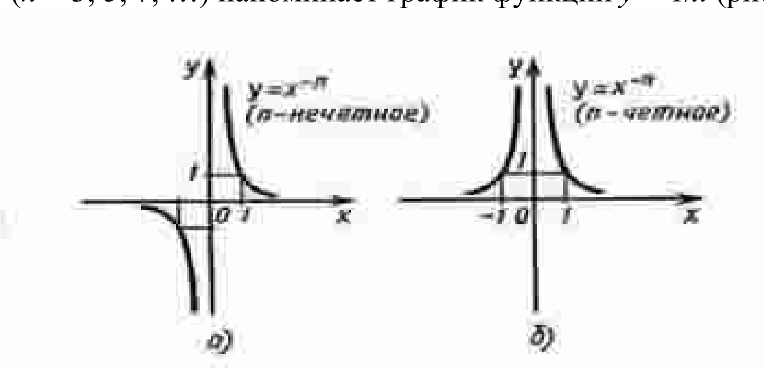
Пусть n - произвольное четное натуральное число, большее двух: n = 4, 6, 8, ... В этом случае функция у = x^n обладает теми же свойствами, что и функция $y = x^2$. График такой функции напоминает параболу $y = x^2$, только ветви графика при $|x| > 1$ тем круче идут вверх, чем больше n, а при $|x| < 1$ тем "теснее прижимаются" к оси x, чем больше n. (рис. а).



Пусть n - произвольное нечетное число, большее трех: n = 5, 7, 9, … . В этом случае функция $y = x^n$ обладает теми же свойствами, что и функция $y = x^3$. График такой функции напоминает кубическую параболу (только ветви графика тем круче идут вверх, вниз, чем больше n) (рис. б). Отметим также, что на промежутке (0; 1) график степенной функции $y = x^n$ тем медленнее отдаляется от оси x с ростом x, чем больше n.

Степенная функция с целым отрицательным показателем.

Рассмотрим функцию $y = x^{-n}$, где n - натуральное число.
При n = 1 получаем $y = x^{-1}$ или $y = 1/x$. Свойства этой функции рассмотрены выше.
Пусть n - нечетное число, большее единицы, n = 3, 5, 7, …
В этом случае функция $y = x^{-n}$ обладает в основном теми же свойствами, что и функция $y = 1/x$.
График функции $y = x^{-n}$ (n = 3, 5, 7, …) напоминает график функции $y = 1/x$ (рис. а).



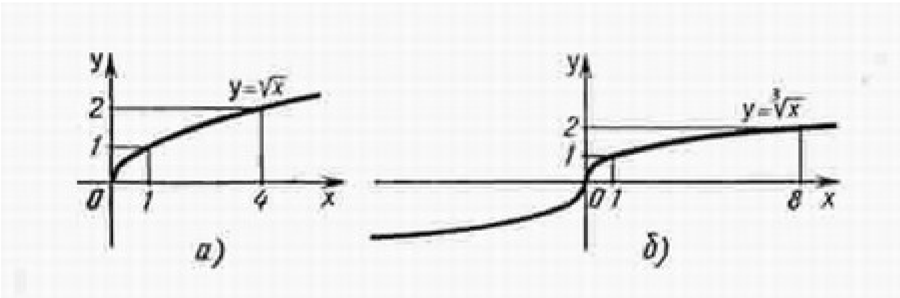
Пусть n - четное число, например n = 2.

Перечислим некоторые свойства функции $y = x^{-2}$, т. е. функции $y = 1/x^2$.
1) Функция определена при всех $x \neq 0$
2) $y = 1/x^2$ - четная функция.
3) $y = 1/x^2$ убывает на $(0; +\infty)$ и возрастает на $(-\infty; 0)$.
Теми же свойствами обладают любые функции вида $y = x^{-n}$ при четном n, большем двух.
График функции $y = 1/x^2$ изображен на рисунке б. Аналогичный вид имеет график функции $y = x^{-n}$, если $n = 4, 6, ...$

Функция $y = x^{\frac{1}{2}}$

Перечислим свойства функции $y = \sqrt{x}$

1) Область определения - луч $[0; +\infty)$. Это следует из того, что выражение $\sqrt{x}$ определено лишь при $x \geq 0$.
2) Функция $y = \sqrt{x}$ ни четна, ни нечетна.
3) Функция $y = \sqrt{x}$ возрастает на луче $[0; +\infty)$.
График функции $y = \sqrt{x}$ изображен на рисунке а.



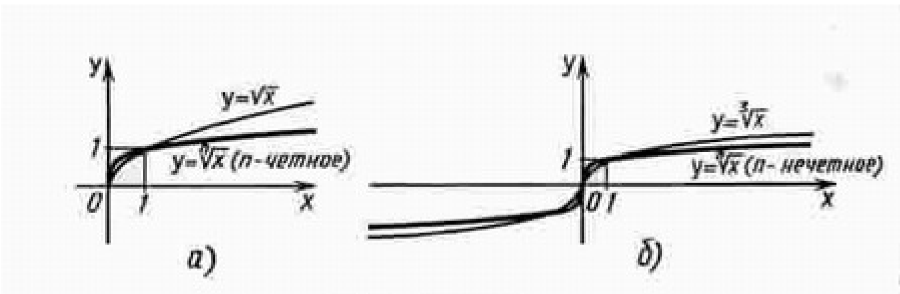
Функция $y = x^{\frac{1}{3}}$ **.**

Перечислим свойства функции $y = \sqrt[3]{x}$
1) Область определения функции - вся числовая прямая.
2) Функция $y = \sqrt[3]{x}$ нечетна.
3) Функция $y = \sqrt[3]{x}$ возрастает на всей числовой прямой.
График функции $y = \sqrt[3]{x}$ изображен на рисунке б.

Функция $y = x^{\frac{1}{x}}$.

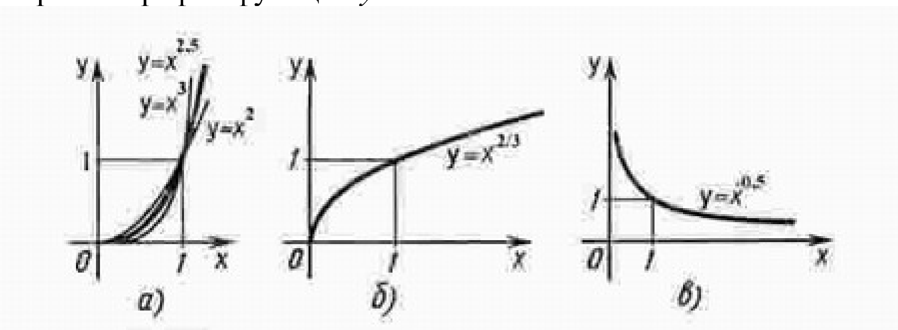
При четном n функция $y = \sqrt[n]{x}$ обладает теми же свойствами, что и функция $y = \sqrt[n]{x}$, и график ее напоминает график функции $y = \sqrt[n]{x}$.

При нечетном n функция $y = \sqrt[n]{x}$ обладает теми же свойствами, что и функция $y = \sqrt[3]{x}$, и график ее напоминает график функции $y = \sqrt[3]{x}$.



Степенная функция с положительным дробным показателем.

Рассмотрим функцию $y = x^r$, где r - положительная несократимая дробь.
Перечислим некоторые свойства этой функции.
1) Область определения - луч $[0; +\infty)$.
2) Функция ни четная, ни нечетная.
3) Функция $y = x^r$ возрастает на $[0; +\infty)$.
На рисунке а изображен график функции $y = x^{2,5}$.



Контрольные вопросы

1. Функции.
2. Область определения и множество значений.
3. График функции.
4. Построение графиков функций, заданных различными способами.
5. Свойства функции.
6. Обратные функции.

Тема 6.2 Последовательности. Предел последовательности, предел функции

Последовательности. Способы задания и свойства числовых последовательностей. Понятие о пределе последовательности. Существование предела монотонной ограниченной последовательности. Суммирование последовательностей.

Уметь: вычислять предел числовой последовательности, вычислять предел функции.
Знать: последовательности, способы задания и свойства числовых последовательностей, понятие о пределе последовательности, существование предела монотонной ограниченной последовательности, суммирование последовательностей.

Если каждому натуральному числу n поставлено в соответствие вещественное число x_n, то говорят, что задана *последовательность*

$$x_1, x_2, \ldots, x_n = \{x_n\}.$$

Числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называются *элементами* (*членами*) последовательности, символ $\{x_n\}$ – *общим элементом* (*членом*), а n –*номером* элемента.

Для последовательностей можно определить следующие *операции*:
1) Умножение последовательности на число m: $m \cdot \{x_n\} = \{mx_n\}$, т.е. $mx_1, mx_2, \ldots$
2) Сложение (вычитание) последовательностей: $\{x_n\} \pm \{y_n\} = \{x_n \pm y_n\}$.
3) Произведение последовательностей: $\{x_n\} \cdot \{y_n\} = \{x_n \cdot y_n\}$.
4) Частное последовательностей: $\dfrac{\{x_n\}}{\{y_n\}} = \left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$ при $\{y_n\} \neq 0$.

Ограниченные и неограниченные последовательности.

Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной сверху*, если для любого n существует такое число M, что $x_n \leq M$.

Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной снизу*, если для любого *n* существует такое число *m*, что $x_n \geq m$.

Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной*, если она ограничена и сверху и снизу, т.е. существуют такие числа *M* и *m*, что для любого *n* верно неравенство: $m \leq x_n \leq M$.

Предел последовательности.

Число *a* называется *пределом* последовательности $\{x_n\}$, если для любого положительного $\varepsilon > 0$ существует такой номер *N*, что для всех $n > N$ выполняется условие: $|x_n - a| < \varepsilon$. Это записывается:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

В этом случае говорят, что последовательность $\{x_n\}$ *сходится* к *a* при $n\to\infty$.

Основные свойства сходящихся последовательностей.

1. Сходящаяся последовательность ограничена.
2. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, тогда $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = a \pm b$, $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = a \cdot b$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right) = \dfrac{a}{b} \quad (b \neq 0)$.
3. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$ и для всех *n* выполняются неравенства $x_n \leq y_n \leq z_n$, то $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.
4. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и последовательность $\{y_n\}$ – ограниченная, то $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = 0$.

Предел функции в точке.

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x = a$ (т.е. в самой точке $x = a$ функция может быть и не определена)

Число *A* называется *пределом* функции $f(x)$ при $x\to a$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\Delta > 0$, что для всех *x* таких, что $0 < |x - a| < \Delta$ верно неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. В этом случае пишут: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$

Если $f(x) \to A_1$ при $x\to a$ только при $x < a$, то $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = A_1$ – называется *пределом* функции $f(x)$ в точке $x = a$ *слева*, а если $f(x) \to A_2$ при $x\to a$ только при $x > a$, то $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = A_2$ называется *пределом* функции $f(x)$ в точке $x = a$ *справа*.

Пределы A_1 и A_2 называются также *односторонними пределами* функции $f(x)$ в точке $x = a$. Также говорят, что *A* – *конечный предел* функции $f(x)$.

Основные теоремы о пределах.

***Теорема* 1.** $\lim\limits_{x\to a} C = C$, где C = const.

Следующие теоремы справедливы при предположении, что функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют конечные пределы при $x\to a$.

***Теорема* 2.** $\lim\limits_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$

***Теорема* 3.** $\lim\limits_{x\to a}[f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$

Следствие. $\lim\limits_{x\to a} C\cdot f(x) = C\cdot \lim\limits_{x\to a} f(x)$

***Теорема* 4.** $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ при $\lim\limits_{x\to a} g(x)\neq 0$

Бесконечно малые функции.

Функция $f(x)$ называется *бесконечно малой* при $x\to a$, где a может быть числом или одной из величин ∞, $+\infty$ или $-\infty$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.

Свойства бесконечно малых функций:

1) Сумма фиксированного числа бесконечно малых функций при $x\to a$ тоже бесконечно малая функция при $x\to a$.
2) Произведение фиксированного числа бесконечно малых функций при $x\to a$ тоже бесконечно малая функция при $x\to a$.
3) Произведение бесконечно малой функции на функцию, ограниченную вблизи точки $x = a$ является бесконечно малой функцией при $x\to a$.
4) Частное от деления бесконечно малой функции на функцию, предел которой не равен нулю есть величина бесконечно малая.

Бесконечно большие функции и их связь с бесконечно малыми.

Функция называется *бесконечно большой* при $x\to a$, где a – число или одна из величин ∞, $+\infty$ или $-\infty$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, где A – число или одна из величин ∞, $+\infty$ или $-\infty$.

Связь бесконечно больших и бесконечно малых функций осуществляется в соответствии со следующей теоремой.

***Теорема* 5.** Если $f(x)\to 0$ при $x\to a$ (если $x\to\infty$) и не обращается в ноль, то

$$y = \frac{1}{f(x)}\to\infty$$

Сравнение бесконечно малых функций.

Пусть $\alpha(x)$, $\beta(x)$ и $\gamma(x)$ – бесконечно малые функции при $x\to a$. Эти бесконечно малые функции можно сравнивать по быстроте их убывания, т.е. по быстроте их стремления к нулю.

Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, то функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой более высокого порядка*, чем функция $\beta(x)$.

Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A,\quad A\neq 0,\quad A = const$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *бесконечно малыми одного порядка*.

Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, то функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *эквивалентными бесконечно малыми*. Записывают $\alpha\sim\beta$.

Бесконечно малая функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой порядка* k относительно бесконечно малой функции $\beta(x)$, если предел $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta^k(x)} = A\neq 0$.

Однако следует отметить, что не все бесконечно малые функции можно сравнивать между собой. Например, если отношение $\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ не имеет предела, то функции несравнимы.

Свойства эквивалентных бесконечно малых.

1) $\alpha \sim \alpha$, $\left(\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\alpha(x)} = 1\right)$

2) Если $\alpha \sim \beta$ и $\beta \sim \gamma$, то $\alpha \sim \gamma$, $\left(\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\gamma(x)} = \lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}\cdot\dfrac{\beta(x)}{\gamma(x)}\right) = 1\cdot 1 = 1\right)$

3) Если $\alpha \sim \beta$, то $\beta \sim \alpha$, $\left(\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}} = 1\right)$

4) Если $\alpha \sim \alpha_1$ и $\beta \sim \beta_1$ и $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = k$, то и $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} = k$ или $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$.

Свойство 4) особенно важно на практике, т.к. оно фактически означает, что предел отношения бесконечно малых не меняется при замене их на эквивалентные бесконечно малые. Этот факт дает возможность при нахождении пределов заменять бесконечно малые на эквивалентные им функции, что может сильно упростить вычисление пределов.

Замечательные пределы

Первый замечательный предел

Предел отношения синуса бесконечно малой дуги к самой дуге, выраженной в радианах, называется *первым замечательным пределом*. Этот предел равен единице.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \text{или} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = 1$$

Второй замечательный предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

где $e \approx 2{,}71828...$. Если $\dfrac{1}{x} = \alpha$, то $\alpha \to 0$ и второй замечательный предел можно записать в виде:

$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$$

Кроме трех, изложенных выше, пределов можно записать следующие полезные на практике соотношения:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1; \qquad \lim_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x} = \ln a; \qquad \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^m - 1}{x} = m.$$

Контрольные вопросы

1. Последовательности.
2. Способы задания и свойства числовых последовательностей.

3. Понятие о пределе последовательности.
4. Существование предела монотонной ограниченной последовательности.
5. Суммирование последовательностей.

Тема 6.3. Производная функции, ее геометрический и физический смысл

Определение производной функции, ее геометрический и физический смысл, уравнение касательной к графику функции, правила нахождения производных, таблица производных элементарных функций, производная сложной функции

Уметь: находить производные элементарных и сложных функций, писать уравнение касательной к графику функции, применять геометрический и физический смысл производной при решении задач
*Знать:*правила дифференцирования, таблицу производных элементарных функции, уравнение касательной, правило нахождения проихводной сложной функции

Пусть x_1 и x_2 – значения аргумента, а $y_1 = f(x_1)$ и $y_2 = f(x_2)$ – соответствующие значения функции $y = f(x)$. Разность $\Delta x = x_2 - x_1$ называется *приращением аргумента*, а разность $\Delta y = y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1)$ – *приращением функции* на отрезке $[x_1, x_2]$

Производной функции $f(x)$ в точке $x = x_0$ называется предел отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю.

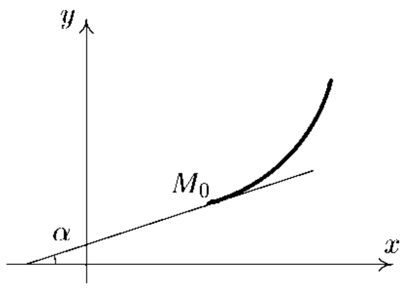
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Геометрический смысл.

Производная функции $y = f(x)$ в точке x_0 равна угловому коэффициенту касательной к графику функции в точке $M_0(x_0, f(x_0))$, т.е. $f'(x_0) = tg\alpha$, где α – угол наклона касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке M_0.

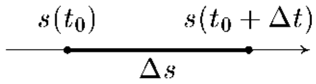
Геометрический смысл производной состоит в том, что значение производной функции в точке равно угловому коэффициенту касательной к графику функции в этой точке.

$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ - уравнение касательной.



Физический смысл.

Предположим, что функция $s = s(t)$ описывает закон движения материальной точки по прямой линии, т.е. $s = s(t)$ – путь, пройденный этой точкой от начала отсчета за время t. Тогда за время t_0 пройден путь $s = s(t_0)$, а за время t_1 – путь $s = s(t_1)$. За промежуток времени $\Delta t = t_1 - t_0$ точка пройдет отрезок пути $\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$.



Основные правила дифференцирования.

Обозначим $u = u(x)$, $v = v(x)$ и $w = w(x)$ – функции, дифференцируемые в точке x.

1) $C' = 0$, где C – постоянная величина.

2) $x' = 1$

3) $(u + v - w)' = u' + v' - w'$

4) $(u \cdot v)' = u'v + uv'$

5) $(u \cdot v \cdot w)' = u'vw + uv'w + uvw'$

6) $(C \cdot u)' = C \cdot u'$

7) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$, если $v \neq 0$

8) $\left(\dfrac{u}{C}\right)' = \dfrac{1}{C}u'$

9) $\left(\dfrac{C}{v}\right)' = -\dfrac{C}{v^2}v'$

10) Если $v = v(u)$, $u = u(x)$, т.е. $v = v[u(x)]$, то $v'(x) = v'(u) \cdot u'(x)$ – производная сложной функции.

Таблица производных.

1) $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$

2) $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

3) $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$

4) $\left(e^x\right)' = e^x$

5) $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$

6) $\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}$

7) $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x \ln a}$

8) $\left(\sin x\right)' = \cos x$

9) $\left(\cos x\right)' = -\sin x$

10) $\left(tgx\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

11) $\left(ctgx\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

12) $\left(\arcsin x\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

13) $\left(\arccos x\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

14) $\left(arctgx\right)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

15) $\left(arcctgx\right)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

16) Пусть $u = u(x)$, $v = v(x)$, тогда $\left(u^v\right)' = v \cdot u^{v-1} \cdot u' + u^v \cdot v' \cdot \ln u$

Контрольные вопросы
1.Понятие о производной функции, ее геометрический и физический смысл.
2.Уравнение касательной к графику функции.

Тема 6.4. Применение производной к исследованию функции.

Применение производной к построению графиков функций. Возрастание и убывание функции. Экстремумы функции.

Уметь: находить промежутки возрастания и убывания. Находить точки экстремума.
Знать: Применение производной к построению графиков функций. Возрастание и убывание функции. Экстремумы функции.

Условия возрастания и убывания функций.

***Теорема* 1**. Для того чтобы дифференцируемая на интервале (a,b) функция $f(x)$ была *неубывающей* (*невозрастающей*) на этом интервале, необходимо и достаточно, чтобы $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) для всех $x \in (a,b)$.

***Теорема* 2.** Если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a,b) и $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) для всех $x \in (a,b)$, то эта функция *возрастает* (*убывает*) на интервале (a,b).

Точки экстремума.

Точки максимума и минимума функции называются *точками экстремума*.

***Теорема* 3.** (*необходимое условие существования экстремума*) Если функция $f(x)$ в точке x_0 имеет экстремум, то производная $f'(x_0)$ обращается в нуль или не существует.

Следствие. Обратное утверждение неверно. Если производная функции в некоторой точке равна нулю, то это еще не значит, что в этой точке функция имеет экстремум.

Критическими точками функции называются точки, в которых производная функции не существует или равна нулю.

***Теорема* 4.** (*достаточное условие существования экстремума*) Если при переходе через критическую точку x_0 слева направо производная функции $f'(x)$ меняет знак с "+" на "–", то в точке x_0 функция $f(x)$ имеет *максимум*, а если производная меняет знак с "–" на "+" – то функция имеет *минимум*.

Правила нахождения экстремумов функции.

1) Найти производную функции.
2) Найти критические точки функции.
3) Исследовать знак производной в промежутках, на которые найденные критические точки делят область определения функции.
4) Определить существование максимумов и минимумов и найти значение функции в этих точках.

Схема исследования функций

Процесс исследования функции состоит из нескольких этапов. Для наиболее полного представления о поведении функции и характере ее графика необходимо отыскать:

1) Область существования функции (это понятие включает в себя и область значений, и область определения функции).
2) Исследовать функцию на четность и периодичность.
3) Координаты точек пересечения графика функции с осями координат (если они имеются).
4) Интервалы возрастания и убывания.
5) Точки максимума и минимума.
6) Построение графика.

Контрольные вопросы

1. Условия возрастания и убывания функций.
2. Точки экстремума.
3. Правила нахождения экстремумов функции.
4. Схема исследования функии.

Тема 6.5. Вторая производная, ее геометрический и физический смысл.

Вторая производная, ее геометрический и физический смысл.

Уметь: находить промежутки возрастания и убывания функции используя вторую производную. Находить точки экстремума.

Знать: Применение второй производной к нахождения промежутков монотонности.

Пусть функция $f(x)$ – дифференцируема на некотором интервале. Тогда, дифференцируя ее, получаем первую производную

$$y' = f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$$

Если найти производную от функции $f'(x)$, получим *вторую производную* функции $f(x)$.

$$y'' = f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2}$$

т.е. $y'' = (y')'$ или $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$.

Этот процесс можно продолжить и далее, находя производные степени *n*.

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right).$$

Исследование функции на экстремум с помощью производной второго порядка.

***Теорема* 5.** Если $f'(x) = 0$, то функция $f(x)$ в точке x_0 имеет *максимум*, если $f''(x_0) < 0$ и *минимум*, если $f''(x_0) > 0$.

Если $f''(x_0) = 0$, то характер критической точки неизвестен. Для его определения требуется дальнейшее исследование.

Выпуклость и вогнутость кривой. Точки перегиба.

Кривая обращена *выпуклостью вверх* на интервале (a,b), если все ее точки лежат ниже любой ее касательной на этом интервале. Кривая, обращенная выпуклостью вверх, называется *выпуклой*, а кривая, обращенная выпуклостью вниз – называется *вогнутой*.

***Теорема* 6.** Если функция $f(x)$ имеет на интервале (a,b) вторую производную и $f''(x) > 0$ ($f''(x_0) < 0$) во всех точках данного интервала, то график функции имеет на (a,b) выпуклость, направленную *вниз* (*вверх*).

Точка, отделяющая выпуклую часть кривой от вогнутой, называется *точкой перегиба*. Точками перегиба могут служить только *критические точки второго рода*, т.е. точки, в которых вторая производная $f''(x)$ обращается в ноль или не существует.

***Теорема* 7.** Пусть кривая определяется уравнением $y = f(x)$. Если вторая производная $f''(x) = 0$ или не существует и при переходе через точку $x = x_0$ $f''(x)$ меняет знак, то точка кривой с абсциссой $x = x_0$ является точкой перегиба.

Правила нахождения точек перегиба.

1) Найти вторую производную функции.
2) Найти критические точки второго рода.
3) Исследовать знак второй производной в промежутках, на которые найденные критические точки делят область определения функции.
4) Определить точки перегиба и найти значение функции в этих точках.

Контрольные вопросы

1.Исследование функции на экстремум с помощью производной второго порядка.
2.Выпуклость и вогнутость кривой. Точки перегиба.
3.Правила нахождения точек перегиба.

Тема 7. Прямые и плоскости в пространстве

Тема 7.1. Аксиомы стереометрии и простейшие следствия из них.

Основные понятия. Аксиомы стереометрии. Следствия из аксиом.

Уметь: применять аксиомы стереометрии при решении задач.
Знать: Основные понятия. Аксиомы стереометрии. Следствия из аксиом. Основные понятия. Аксиомы стереометрии.

1. Основные понятия. Аксиомы стереометрии.

Определение. Стереометрией называется раздел геометрии, в котором изучаются фигуры, расположенные в пространстве. Основными понятиями стереометрии являются точка, прямая и плоскость.

Слово «стереометрия» происходит от греческих слов «στερεοσ» — объемный, пространственный и «μετρεο» — измерять.

1. Представление о плоскости дает гладкая поверхность стола или стены. Плоскость как геометрическую фигуру следует представлять себе простирающейся неограниченно во все стороны.

На рисунках плоскости изображаются в виде параллелограмма или в виде произвольной области и обозначаются греческими буквами α, β, γ и т.д. Точки A и B лежат в плоскости β (плоскость β проходит через эти точки), а точки M, N, P не лежат в этой плоскости. Коротко это записывают так: $A \in \beta$, $B \in \beta$, $M \notin \beta$, $N \notin \beta$, $P \notin \beta$.

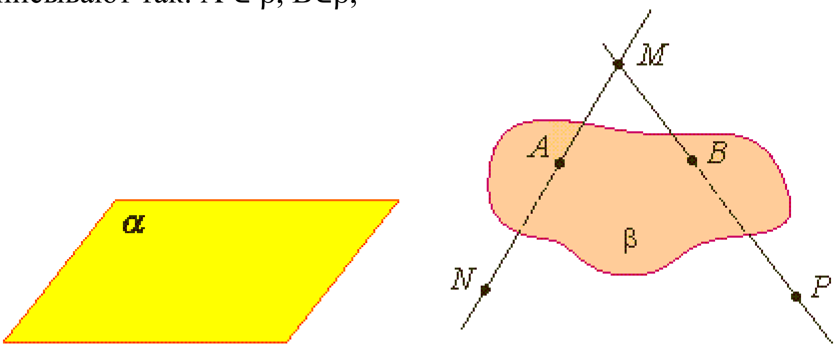


Рис. 1. а) б)

Пространство состоит из бесконечного множества точек. Любое множество точек пространства называется пространственной фигурой или телом. Примерами пространственных фигур являются точка, прямая и плоскость. Прямые и плоскости состоят из бесконечного множества точек пространства и не совпадают со всем пространством.

Сформулируем основные аксиомы стереометрии. Напомним, аксиомы – это утверждения, принимаемые без доказательства. Аксиомы геометрии выражают основные свойства неопределяемых понятий: точек, прямых и плоскостей.

Аксиомы:

1) Через любые две различные точки проходит единственная прямая.
2) Если две различные точки прямой принадлежат плоскости, то все точки прямой принадлежат этой плоскости.

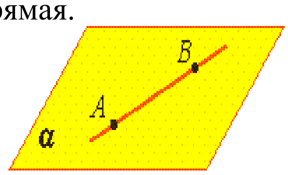


Рис. 2

3) Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит одна и только одна плоскость.

Рис. 3.

4) Если две различные плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую.

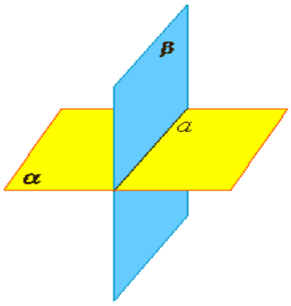


Рис. 4.

2. Простейшие следствия из аксиом стереометрии.

Из первой аксиомы следует, что две различные прямые в пространстве или не имеют ни одной общей точки, или имеют только одну общую точку.

Прямые, имеющие только одну общую точку, называются пересекающимися.

Из второй аксиомы следует, что прямая и плоскость в пространстве или не имеют ни одной общей точки, или имеют только одну общую точку, или, наконец, все точки прямой являются точками плоскости.

Если прямая и плоскость имеют только одну общую точку, то говорят, что они пересекаются.

Если все точки прямой являются точками плоскости, то говорят, что прямая лежит в плоскости (принадлежит плоскости) или что плоскость проходит через прямую.

Теорема 1. Через прямую и не принадлежащую ей точку проходит единственная плоскость.

Доказательство:

Пусть заданы прямая a и не принадлежащая ей точка A (рис. 5). На прямой a возьмем какие-нибудь две точки C и D. По аксиоме 3 через три точки A, C, D проходит единственная плоскость; обозначим ее α. По аксиоме 2 все точки прямой a принадлежат плоскости α.

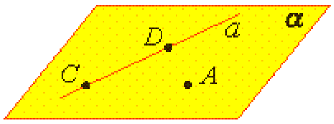


Рис. 5.

Следовательно, плоскость α проходит через прямую a и точку A. Другой такой плоскости нет, так как любая плоскость, проходящая через прямую a и точку A, проходит через точки C, D, A, не лежащие на одной прямой, и поэтому совпадает с плоскостью α.

Теорема 2. Через две пересекающиеся прямые проходит единственная плоскость.

Доказательство:

Пусть прямые a и b пересекаются в точке M (рис. 6). На прямых a и b возьмем какие-нибудь точки P и N, отличные от точки M. Тогда через три точки P, N и M проходит единственная плоскость α. В силу аксиомы 2 плоскость проходит через данные прямые a и b.

Из последних двух аксиом и теоремы 1 следует, что две различные плоскости или не имеют ни одной

общей точки, или имеют общую прямую и других общих точек не имеют.

Две различные плоскости, имеющие общую прямую, называются пересекающимися.

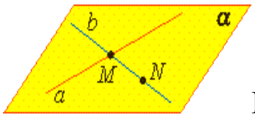


Рис.6 *Общая прямая называется прямой пересечения этих плоскостей.*

Контрольные вопросы

1. Основные понятия.
2. Аксиомы стереометрии.
3. Следствия из аксиом.

Тема 7.2. Параллельность прямой и плоскости, параллельность плоскостей.

Определение параллельности прямой и плоскости. Признак параллельности прямой и плоскости. Параллельность плоскостей. Свойства параллельных плоскостей.

Уметь: применять признаки параллельности прямой и плоскости при решении задач.

Знать: Определение параллельности прямой и плоскости. Признак параллельности прямой и плоскости. Параллельность плоскостей. Свойства параллельных плоскостей.

Параллельные прямые в пространстве

Две прямые в пространстве называются **параллельными**, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.

Теорема о параллельных прямых.

Через любую точку пространства, не лежащую на данной прямой, проходит прямая, параллельная данной, и притом только одна.

Рис. 1.

Лемма о пересечении плоскости параллельными прямыми.

Если одна из двух параллельных прямых пересекает данную плоскость, то и другая прямая пересекает эту плоскость.

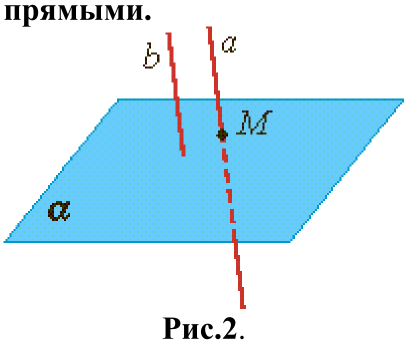


Рис.2.

Теорема о трех прямых в пространстве.

Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны (если $a \parallel c$ и $b \parallel c$, то $a \parallel b$).

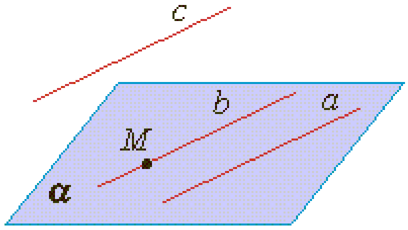


Рис. 3

Параллельность прямой и плоскости

Прямая и плоскость называются ***параллельными***, если они не имеют общих точек.

Признак параллельности прямой и плоскости

Теорема. Если прямая, не лежащая в данной плоскости, параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в этой плоскости, то она параллельна данной плоскости.

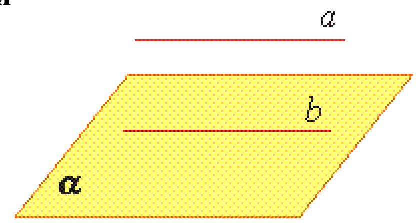


Рис. 4.

Теорема. Если плоскость проходит через данную прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна данной прямой.

Теорема. Если одна из двух параллельных прямых параллельна данной плоскости, то другая прямая либо также параллельна данной плоскости, либо лежит в этой плоскости.

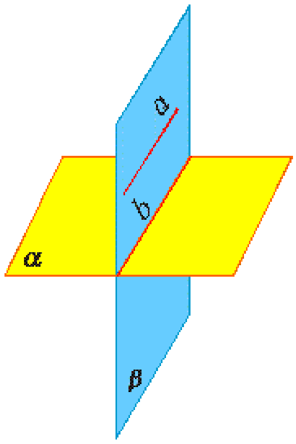
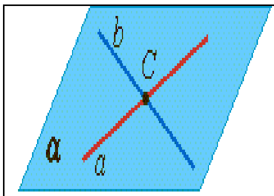
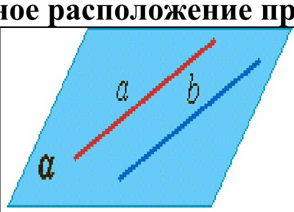
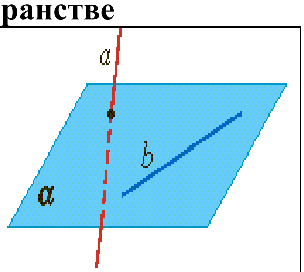


Рис. 5

Взаимное расположение прямых в пространстве

 **Рис.6**	 **Рис. 7**	 **Рис. 8**
Пересекающиеся прямые: лежат в одной плоскости, имеют одну общую точку	**Параллельные прямые:** лежат в одной плоскости, не имеют общих точек (не пересекаются	**Скрещивающиеся прямые:** не лежат в одной плоскости, не имеют общих точек (не пересекаются)

Параллельность плоскостей

Две плоскости называются параллельными, если они не пересекаются, т.е. не имеют ни одной общей точки. α // β.

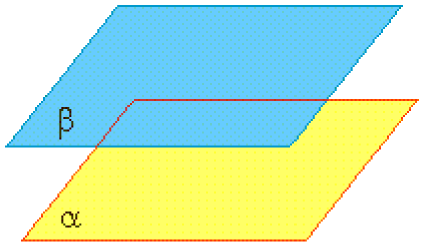
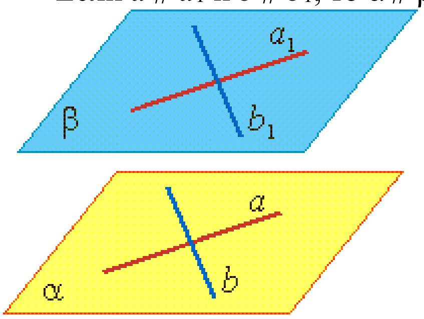


Рис. 9.

Признак параллельности двух плоскостей

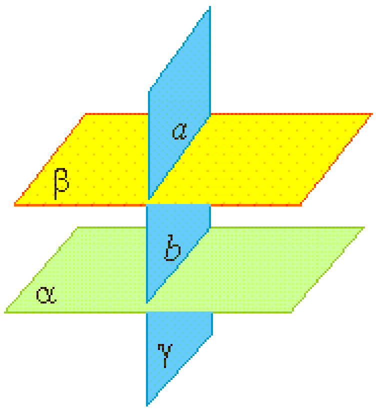
Теорема. Если две пересекающиеся прямые одной плоскости параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости , то эти плоскости параллельны.

Если a // a_1 и b // b_1, то α // β. **Рис. 10**.



Свойства параллельных плоскостей.

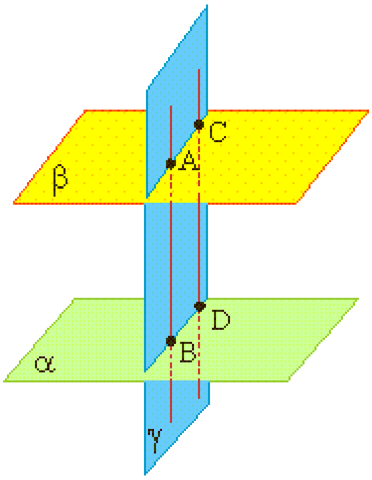
1.



Если α // β и они пересекаются с γ, то a // b.

Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то линии их пересечения параллельны.

2. Если α // β и AB // CD, то AB = CD.Отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными плоскостями, равны.



Контрольные вопросы
1. Определение параллельности прямой и плоскости.
2. Признак параллельности прямой и плоскости.
3. Параллельность плоскостей.
4. Свойства параллельных плоскостей.

Тема 7.3. Перпендикулярность прямой и плоскости.

Определение перпендикулярности прямой и плоскости. Признаки перпендикулярности прямой и плоскости.

Уметь: применять признаки перпендикулярности прямой и плоскости для решения задач.
Знать: Определение перпендикулярности прямой и плоскости. Признаки перпендикулярности прямой и плоскости.

Определение
Прямая, пересекающая плоскость, называется *перпендикулярной* этой плоскости, если она перпендикулярна каждой прямой, которая лежит в данной плоскости и проходит через точку пересечения.

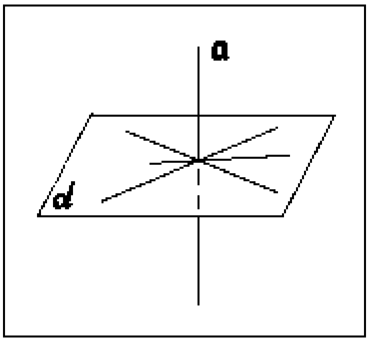


Рис. 1.

Теорема
Признак перпендикулярности прямой и плоскости.
Если прямая, пересекающая плоскость, перпендикулярна двум прямым в этой плоскости, проходящим через точку пересечения данной прямой и плоскости, то она перпендикулярна плоскости.

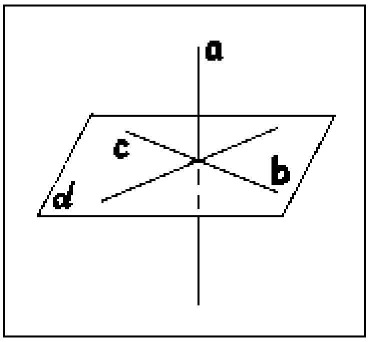


Рис. 2.

Доказательство:

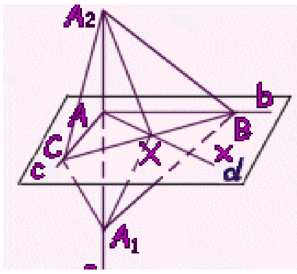


Рис. 3.

Пусть a прямая, перпендикулярная прямым b и c в плоскости α . Тогда прямая a проходит через точку A пересечения прямых b и c. Докажем, что прямая a перпендикулярна плоскости α .

Проведем произвольную прямую x через точку A в плоскости α и покажем, что она перпендикулярна прямой a. Проведем в плоскости α произвольную прямую, не проходящую через точку A и пересекающую прямые b, c и x. Пусть точками пересечения будут B, C и X.

Отложим на прямой a от точки A в разные стороны равные отрезки AA_1 и AA_2. Треугольник A_1CA_2 равнобедренный, так как отрезок AC является высотой по условию теоремы и медианой по построению ($AA_1=AA_2$). по той же причине треугольник A_1BA_2 тоже равнобедренный. Следовательно, треугольники A_1BC и A_2BC равны по трем сторонам.

Из равенства треугольников A_1BC и A_2BC следует равенство углов A_1BX и A_2BX и, следовательно равенство треугольников A_1BX и A_2BX по двум сторонам и углу между ними. Из равенства сторон A_1X и A_2X этих треугольников заключаем, что треугольник A_1XA_2 равнобедренный. Поэтому его медиана XA является также высотой. А это и значит, что прямая x перпендикулярна a. По определению прямая a перпендикулярна плоскости α. Теорема доказана.

Свойства перпендикулярных прямой и плоскости.

Теорема 2

1 - ое. Свойство перпендикулярных прямой и плоскости

Если плоскость перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой.

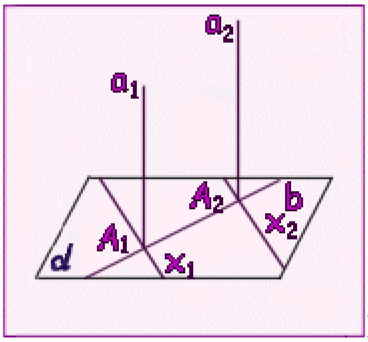


Рис. 4.

Доказательство: Пусть a_1 и a_2- 2 параллельные прямые и α плоскость, перпендикулярная прямой a_1. Докажем, что эта плоскость перпендикулярна и прямой a_2. Проведем через точку A_2 пересечения прямой a_2 с плоскостью α произвольную прямую x_2 в плоскости α. Проведем в плоскости α через точку A_1 пересечения прямой a_1 с α прямую x_1, параллельную прямой x_2. Так как прямая a_1 перпендикулярна плоскости α, то прямые a_1 и x_1 перпендикулярны. А по теореме 1 параллельные им пересекающиеся прямые a_2 и x_1 тоже перпендикулярны. Таким образом, прямая a_2 перпендикулярна любой прямой x_2 в плоскости α. А это (по определению)значит, что прямая a_2 перпендикулярна плоскости α. Теорема доказана.

Теорема

2 - ое. Свойство перпендикулярных прямой и плоскости.

Две прямые, перпендикулярные одной и той же плоскости, параллельны.

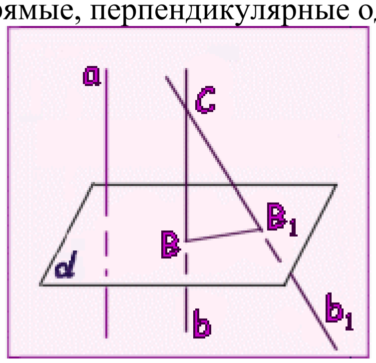


Рис. 5

Доказательство:

Пусть *a* и *b* - 2 прямые, перпендикулярные плоскости α. Допустим, что прямые а и *b* не параллельны.

Выберем на прямой *b* точку *C*, не лежащую в плоскости α. Проведем через точку *C* прямую b_1, параллельную прямой *a*. Прямая b_1 перпендикулярна плоскости α по теореме 2. Пусть *B* и B_1 - точки пересечения прямых *b* и b_1 с плоскостью α. Тогда прямая BB_1 перпендикулярна пересекающимся прямым *b* и b_1. А это невозможно. Мы пришли к противоречию. Теорема доказана.

Контрольные вопросы

1.Определение перпендикулярности прямой и плоскости.

2. Признаки перпендикулярности прямой и плоскости

Тема 7.4. Перпендикуляр и наклонная.

Определения перпендикуляра и наклонной. Утверждения для перпендикуляра и наклонной, проведенных через одну точку к одной плоскости. Теорема о трех перпендикулярах.

Уметь: применять определения и теоремы при решении задач.
Знать: определения перпендикуляра и наклонной, тверждения для перпендикуляра и наклонной, проведенных через одну точку к одной плоскости, теорема о трех перпендикулярах

Пусть даны плоскость и не лежащая на ней точка.

Перпендикуляром, опущенным из данной точки на данную плоскость, называется отрезок, соединяющий данную точку с точкой плоскости и лежащий на прямой, перпендикулярной плоскости. Конец этого отрезка, лежащий в плоскости, называется *основанием перпендикуляра*.

На рисунке 1 из точки A проведены к плоскости α перпендикуляр AB и наклонная AC. Точка B - основание перпендикуляра, точка C - основание наклонной, BC - проекция наклонной AC на плоскость α.

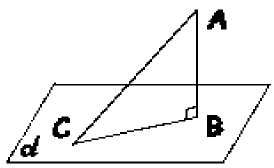


Рис.1

Наклонной, проведенной из данной точки к данной плоскости, называется любой отрезок, соединяющий данную точку с точкой плоскости, не являющийся перпендикуляром к плоскости. Конец отрезка, лежащий в плоскости, называется *основанием наклонной*.

Отрезок, соединяющий основания перпендикуляра и наклонной, проведенных из одной и той же точки, называется ***проекцией наклонной***.

Так как в прямоугольном треугольнике ABC катет AB меньше гипотенузы AC, то справедливо следующее утверждение: *перпендикуляр, опущенный из точки на плоскость, меньше любой наклонной, проведенной из той же точки к этой плоскости*.

Для перпендикуляра и наклонных, проведенных через одну точку к одной плоскости, справедливы следующие утверждения:

1) перпендикуляр меньше любой наклонной;

2) наклонные равны тогда и только тогда, когда равны их проекции;

3) одна наклонная меньше другой наклонной тогда и только тогда, когда проекция первой наклонной меньше проекции второй наклонной.

Длина перпендикуляра, опущенного из точки A на плоскость α, называется ***расстоянием от точки A до плоскости***. Расстояние от точки, лежащей в плоскости α, до плоскости α считается равным нулю.

В случае, когда прямая параллельна плоскости, расстояние от произвольной точки прямой до плоскости называется ***расстоянием между прямой и плоскостью***. Расстояние между пересекающимися прямой и плоскостью равно нулю.

Можно доказать, что если две плоскости параллельны, то все точки одной плоскости равноудалены от другой плоскости. Поэтому ***расстоянием между параллельными плоскостями*** называется расстояние от произвольной точки одной из них до другой.

Расстоянием между скрещивающимися прямыми называется расстояние между параллельными плоскостями, в которых лежат эти прямые.

Теорема о трех перпендикулярах.

Теорема. Прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной, перпендикулярна этой наклонной тогда и только тогда, когда она перпендикулярна проекции наклонной.

Доказательство:

Пусть AB - перпендикуляр плоскости α, AC - наклонная и c - прямая в плоскости α, проходящая через основание C (рис. 2). Проведем прямую CA_1, параллельную прямой AB. Она перпендикулярна плоскости α. Проведем через прямые AB и CA_1 плоскость β. Прямая c перпендикулярна прямой CA_1. Если она перпендикулярна прямой CB, то она перпендикулярна плоскости β, а значит, и прямой AC.

Аналогично. Если прямая с перпендикулярна наклонной AC то она, будучи перпендикулярна и прямой CA_1 перпендикулярна плоскости β, а значит, и проекции наклонной CB.

Теорема доказана.

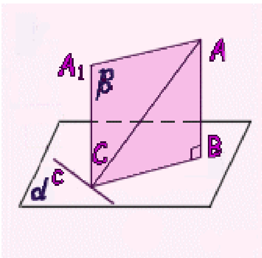


Рис. 2

Контрольные вопросы

1.Определения перпендикуляра и наклонной.

2. Утверждения для перпендикуляра и наклонной, проведенных через одну точку к одной плоскости.

3. Теорема о трех перпендикулярах.

Тема 7.5. Угол между прямой и плоскостью.

Угол между прямой и плоскостью. Проекция точки и проекция прямой. Свойства проекции прямых. Проекция фигуры. Площадь проекции многоугольника.

Уметь: проектировать фигуры; находить площадь проекции многоугольника.
Знать: Угол между прямой и плоскостью. Проекция точки и проекция прямой. Свойства проекции прямых. Проекция фигуры. Площадь проекции многоугольника.

Угол между прямой и плоскостью.

Пусть MN - наклонная, проведенная из точки М к плоскости γ, а M_1N - ее проекция на плоскость γ (рис.1). Тогда угол MNM_1 - называется ***углом между прямой*** MN ***и плоскостью*** γ**.** Таким образом определяется угол между прямой и плоскостью, пересекающей эту прямую и не перпендикулярной ей.

Рис.1.

Определение.

Угол между прямой и плоскостью, пересекающей эту прямую и не перпендикулярной к ней, - это угол между прямой и ее проекцией на эту плоскость.

Определение угла между прямой и плоскостью позволяет заключить, что угол между прямой и плоскостью представляет собой угол между двумя пересекающимися прямыми: самой прямой и ее проекцией на плоскость. Следовательно, угол между прямой и плоскостью есть острый угол.

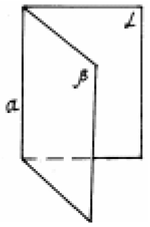
Угол между перпендикулярными прямой и плоскостью считают равным $90°$, а угол между параллельными прямой и плоскостью либо не определяют вовсе, либо считают равным $0°$.

Тема 7.6. Двугранный угол. Угол между плоскостями. Перпендикулярность плоскостей.

Определение двугранного угла. Виды двугранного угла. Определение угла между пересекающимися плоскостями. Определение перпендикулярности плоскостей. Признаки перпендикулярности двух плоскостей.

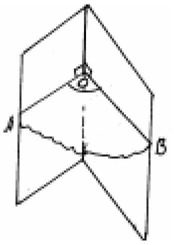
Уметь: решать задачи на двугранные углы.
Знать: определение двугранного угла

Определение. Двугранным углом называется фигура, образованная прямой a и двумя полуплоскостями с общей границей a, и не принадлежащими одной плоскости.



а - ребро двугранного угла, полуплоскости - грани его.

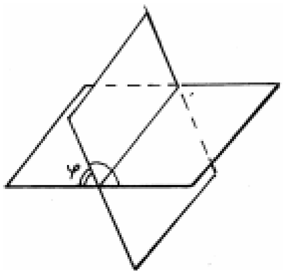
рис. 1



Угол АОВ - линейный угол двугранного угла. Чтобы его построить, нужно выбрать произвольную точку О на ребре, а лучи ОА и ОВ должны быть перпендикулярны к ребру.

рис. 2

Определение. Градусной мерой двугранного угла называется градусная мера любого из его линейных углов.



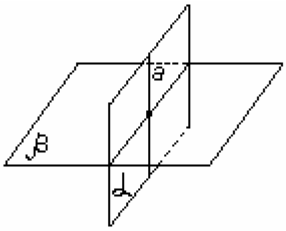
Двугранный угол называется прямым (острым, тупым), если он равен 90º (меньше 90º, больше 90º).

Пусть ϕ - тот из углов, который не превосходит любого из трёх остальных углов. Тогда угол между пересекающимися плоскостями равен ϕ. ($0^o < \phi \leq 90^o$)

рис. 3

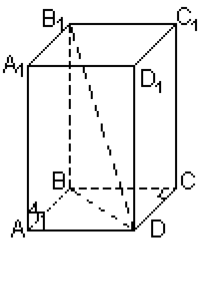
Определение. Две пересекающиеся плоскости называются перпендикулярными, если угол между ними равен 90º.

Признак перпендикулярности двух плоскостей.



Если одна из двух плоскостей ( ) проходит через прямую (а), перпендикулярную другой плоскости (β), то такие плоскости перпендикулярны.

рис. 4



Прямоугольный параллелепипед. Параллелепипед называется прямоугольным, если его боковые ребра перпендикулярны к основаниям, а основания представляют собой прямоугольники.

рис. 5

Свойства.

1. В прямоугольном параллелепипеде все шесть граней представляют собой прямоугольники.
2. Все двугранные углы прямоугольного параллелепипеда являются прямыми
3. Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трёх его измерений.

Контрольные вопросы

1. Определение двугранного угла.
2. Определение угла между пересекающимися плоскостями.
4. Определение перпендикулярности плоскостей.Признаки перпендикулярности плоскостей.

Тема 8. Координаты и векторы.

Тема 8.1. Векторы. Действия над векторами. Базис на плоскости. Прямоугольная система координат.

Понятие вектора. Действия над векторами. Базис на плоскости. Свойства векторов. Прямоугольная система координат в пространстве.

Уметь: выполнять действия над векторами.
Знать: Понятие вектора. Действия над векторами. Базис на плоскости. Свойства векторов. Прямоугольная система координат в пространстве.

Понятие вектора в стереометрии вводится так же, как и в планиметрии.

Рассмотрим упорядоченную пару (A, B) несовпадающих точек. Она определяет направленный отрезок с началом A и концом B (рис. 1). С помощью пары (A, B) зададим преобразование пространства. Каждой точке M поставим в соответствие точку N, которая получится в результате следующего построения.

Приняв точку M за начало, проводим луч m, сонаправленный с лучом AB (рис.2). На луче m имеется единственная точка N, удаленная от M на расстояние $|AB|$. Это построение задает преобразование пространства, отображающего точку M на точку N.

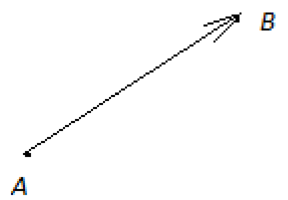


Рис. 1.

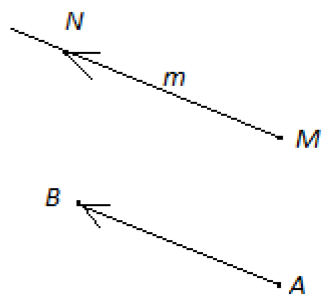


Рис. 2.

Определение. ***Вектором*** *(параллельным переносом), определяемым парой (A, B) несовпадающих точек, называется преобразование пространства, при котором каждая точка M отображается на такую точку N, что луч MN сонаправлен с лучом AB и расстояние* $|MN|$ *равно расстоянию* $|AB|$.

Вектор, заданный парой (A, B) несовпадающих точек, обозначается символом $\overrightarrow{AB}$. Направление, определяемое лучом AB, называется *направлением вектора* $\overrightarrow{AB}$, а расстояние $|AB|$ - *длиной вектора* $\overrightarrow{AB}$.

Условимся, что любая пара совпадающих точек задает тождественное преобразование, которое мы будем называть теперь *нулевым вектором*. Длина нулевого вектора равна нулю, понятие направления для него не вводится. Нулевой вектор, заданный парой (A, A), обозначают символом $\overrightarrow{AA}$.

Применяются и иные обозначения: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}...$ - векторы; $|\vec{a}|$ или a - длина вектора $\vec{a}$; $\vec{0}$ - нулевой вектор.

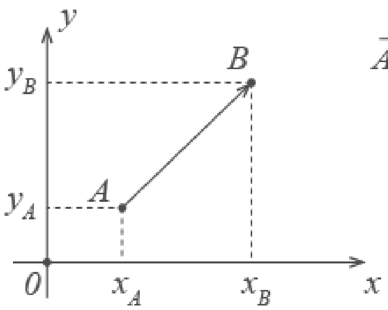
Каждый вектор, отличный от нулевого, вполне характеризуется своим направлением и длиной. Поэтому, если ненулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены и имеют равные длины, то эти векторы равны (совпадают): $\vec{a} = \vec{b}$.

Действия над векторами.

Удобнее всего работать с векторами в прямоугольной системе координат — той самой, в которой рисуем графики функций. Каждой точке в системе координат соответствуют два числа — ее координаты по x и y, абсцисса и ордината. Вектор также задается двумя координатами: $\vec{a}(x_a; y_a)$

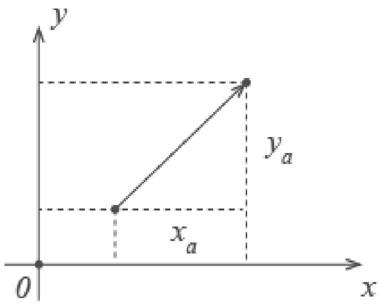
Здесь в скобках записаны координаты вектора $\vec{a}$ — по x и по y.

Находятся они просто: координата конца вектора минус координата его начала.



$\overrightarrow{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A)$

Если координаты вектора заданы, его длина находится по формуле

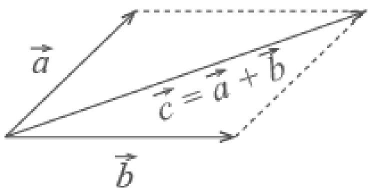


$|\vec{a}| = \sqrt{x_a^2 + y_a^2}$

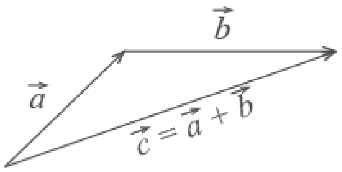
Сложение векторов

Для сложения векторов есть два способа.

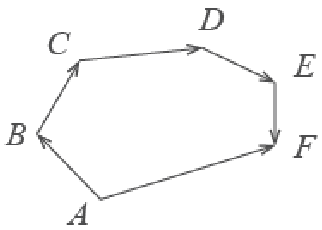
1. Правило параллелограмма. Чтобы сложить векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, помещаем начала обоих в одну точку. Достраиваем до параллелограмма и из той же точки проводим диагональ параллелограмма. Это и будет сумма векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.



2. Второй способ сложения векторов — правило треугольника. Возьмем те же векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. К концу первого вектора пристроим начало второго. Теперь соединим начало первого и конец второго. Это и есть сумма векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.



По тому же правилу можно сложить и несколько векторов. Пристраиваем их один за другим, а затем соединяем начало первого с концом последнего.



$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF}$

Представьте, что вы идете из пункта A в пункт B, из B в C, из C в D, затем в E и в F. Конечный результат этих действий — перемещение из A в F.

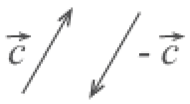
При сложении векторов $\vec{a}(x_a; y_a)$ и $\vec{b}(x_b; y_b)$ получаем:

$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

$\vec{c} = (x_a + x_b) + (y_a + y_b)$

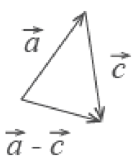
Вычитание векторов

Вектор $\overrightarrow{-c}$ направлен противоположно вектору $\vec{c}$. Длины векторов $\vec{c}$ и $\overrightarrow{-c}$ равны.



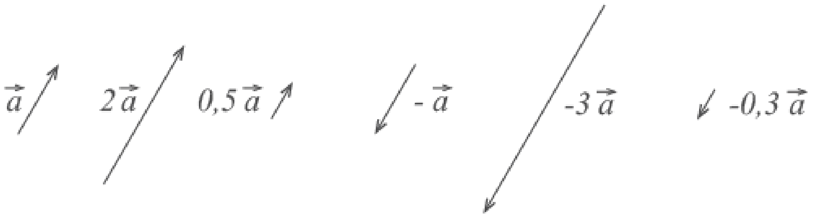
Теперь понятно, что такое вычитание векторов. Разность векторов $\vec{a}$ и $\vec{c}$ — это сумма вектора $\vec{a}$ и вектора $\overrightarrow{-c}$.

$\vec{a} - \vec{c} = \vec{a} + (-\vec{c})$



Умножение вектора на число

При умножении вектора $\vec{a}$ на число k получается вектор, длина которого в k раз отличается от длины $\vec{a}$. Он сонаправлен с вектором $\vec{a}$, если k больше нуля, и направлен противоположно $\vec{a}$, если k меньше нуля.



***Базис на плоскости*.**

Определение.

1) **Базисом** в пространстве называются любые 3 некомпланарных вектора, взятые в определенном порядке.

2) **Базисом** на плоскости называются любые 2 неколлинеарные векторы, взятые в определенном порядке.

3)**Базисом** на прямой называется любой ненулевой вектор.

Векторы называются ***компланарными***, если они параллельны оной и той же плоскости. Таким образом, векторы называются компланарными, если равные им векторы, отложенные от одной точки, лежат в одной плоскости.
В противном случае векторы называются *некомпланарными*.

Любые три некомпланарных вектора в пространстве, взятые в определенном порядке, называются ***базисом***.

Определение. Если $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$ - базис в пространстве и $\overrightarrow{OM}$, то числа a, b и g - называются **компонентами или координатами** вектора $\vec{a}$ в этом базисе.

В связи с этим можно записать следующие **свойства**:

- равные векторы имеют одинаковые координаты,
- при умножении вектора на число его компоненты тоже умножаются на это число,

$\overrightarrow{AB} = (\lambda\alpha)\overline{e_1} + (\lambda\beta)\overline{e_2} + (\lambda\gamma)\overline{e_3}$.

- при сложении векторов складываются их соответствующие компоненты.

$\vec{a} = \alpha_1\overrightarrow{e_1} + \alpha_2\overrightarrow{e_2} + \alpha_3\overrightarrow{e_3}$; $\vec{a} = \beta_1\overrightarrow{e_1} + \beta_2\overrightarrow{e_2} + \beta_3\overrightarrow{e_3}$;

$\vec{a} + \vec{b} = (\alpha_1 + \beta_1)\overline{e_1} + (\alpha_2 + \beta_2)\overline{e_2} + (\alpha_3 + \beta_3)\overline{e_3}$.

Прямоугольная (декартовая) система координат в пространстве.

Прямоугольная система координат в пространстве образуется тремя взаимно перпендикулярными осями координат OX, OY и OZ. Оси координат пересекаются в точке O , которая называется началом координат, на каждой оси выбрано положительное направление, указанное стрелками, и единица измерения отрезков на осях. Единицы измерения обычно одинаковы для всех осей. OX — ось абсцисс, OY — ось ординат, OZ — ось аппликат.

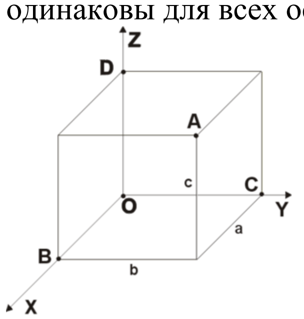


Рис. 2

Положение точки A в пространстве определяется тремя координатами x, y и z. Координата x равна длине отрезка OB, координата y — длине отрезка OC, координата z — длине отрезка

OD в выбранных единицах измерения. Отрезки OB, OC и OD определяются плоскостями, проведёнными из точки A параллельно плоскостям YOZ, XOZ и XOY соответственно.

Координата x называется абсциссой точки A,
координата y — ординатой точки A,
координата z — аппликатой точки A.

Символически это записывают так:

$$A(x,\ y,\ z)$$

или

$$A=(x,\ y,\ z)$$

или привязывают запись координат к конкретной точке с помощью индекса:

$$x_A,\ y_A,\ z_A$$

и т. п.

Каждая ось рассматривается как числовая прямая, т. е. имеет положительное направление, а точкам, лежащим на отрицательном луче приписываются отрицательные значения координаты (расстояние берется со знаком минус). То есть, если бы, например, точка B лежала не как на рисунке — на луче OX, а на его продолжении в обратную сторону от точки O (на отрицательной части оси OX), то абсцисса x точки A была бы отрицательной (минус расстоянию OB). Аналогично и для двух других осей.

Контрольные вопросы

1. Понятие вектора.
2. Действия над векторами.
3. Базис на плоскости.
4. Свойства векторов.
5. Прямоугольная система координат в пространстве.

Тема 8.2. Расстояние между точками.

Формула расстояния между двумя точками. Уравнения сферы, плоскости и прямой. Координаты середины отрезка.

Уметь: находить расстояние между двумя точками; составлять уравнение сферы, плоскости и прямой; находить координаты середины отрезка.

Знать: формула расстояния между двумя точками, уравнения сферы, плоскости и прямой, координаты середины отрезка.

Пусть *A* и *B* - две точки плоскости, координаты которых в декартовой системе координат: $(x_1;y_1)$ и $(x_2;y_2)$, тогда

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

Указанная формула, по существу, является теоремой Пифагора, записанной в координатной форме. В самом деле, пусть A_1 и B_1 -- соответственно проекции точек А и В на ось абсцисс, *M* - проекция *A* на прямую BB_1.

Имеем: *AB* -- гипотенуза прямоугольного треугольника с катетами *AM* и *BM*, но *AM* = $A_1\ B_1=|x_2-x_1|$. Точно так же $BM=|y_2-y_1|$.

Следовательно,

$AB^2=AM^2+BM^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$ и формула доказана.

Контрольные вопросы
1.Формула расстояния между двумя точками.
2. Уравнения сферы, плоскости и прямой.
3. Координаты середины отрезка.

Тема 8.3. Линейные операции над векторами.

Векторы. Модуль вектора. Равенство векторов. Сложение векторов. Умножение вектора на число. Разложения вектора по направлениям. Угол между двумя векторами. Проекция вектора на ось. Координаты вектора. Скалярное произведение векторов.

Уметь: находить модуль вектора; выполнять линейные операции над векторами;
Вычислять скалярное произведение векторов.
Знать: векторы, модуль вектора, равенство векторов, сложение векторов, умножение вектора на число, разложения вектора по направлениям, угол между двумя векторами, проекция вектора на ось, координаты вектора,скалярное произведение векторов.

Свойства векторов.

Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются коллинеарными, если они расположены на параллельных прямых или на одной прямой.

Нулевой вектор $\vec{0}$ коллинеарен любому вектору.

Теорема 1. Два ненулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, Û когда они пропорциональны т.е.

$$\vec{b} = k_{\vec{a}}, k - \text{скаляр}.$$

Три вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, называются компланарными, если они параллельны некоторой плоскости или лежат в ней.

Теорема 2. Три ненулевых вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, компланарны, Û когда один из них является линейной комбинацией двух других, т.е.

$$\vec{c} = k_{\vec{a}} + l_{\vec{b}}, k, l - \text{скаляры}.$$

Модуль вектора – это длина отрезка АВ.

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\ .$$

Проекция вектора на ось.

Теорема 3. Проекция вектора на ось (направленная прямая) *l* равна произведению длины вектора на косинус угла между направлением вектора и направлением оси, т.е.

$np_{\vec{a}} l = a \times \cos a$?a = Ð($\vec{a}$, l).

Скалярным произведением двух ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. и называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними:

$$\vec{a}\,\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| (\cos \vec{a}, \vec{b}).$$

Контрольные вопросы
1. Векторы.
2. Модуль вектора.

3. Равенство векторов.
4. Сложение векторов.
5. Умножение вектора на число.
6. Разложения вектора по направлениям.
7. Угол между двумя векторами.
8. Проекция вектора на ось.
9. Координаты вектора.
10. Скалярное произведение векторов.

Тема 9. Многогранники

Тема 9.1. Многогранники. Правильные многогранники и их свойства.

Определения внутренней точки, открытого множества, области, граничной точки, ограниченного множества, геометрического тела, многогранника, грани, ребра, вершины, диагонали многогранника, выпуклого и правильного многогранников. Развертка.

Уметь: применять теоретические знания при решении задач.
Знать: определения внутренней точки, открытого множества, области, граничной точки, ограниченного множества, геометрического тела, многогранника, грани, ребра, вершины, диагонали многогранника, выпуклого и правильного многогранников, развертка.

Многогранники, в известном смысле, является пространственным аналогом многоугольника. Тем не менее, для строго его определения нам понадобятся несколько вспомогательных понятий.

В школьных учебниках геометрии многогранниками обычно называются тела, поверхности которых состоят из конечного числа многоугольников, назы-ваемых гранями многогранника. Стороны и вершины этих многоугольников называются соответственно ребрами и вершинами многогранника.

Правильные многогранники

Выпуклый многогранник называется правильным, если его гранями являются равные правильные многоугольники, и все многогранные углы равны.

Рассмотрим возможные правильные многогранники и прежде всего те из них, гранями которых являются правильные треугольники. Наиболее простым таким правильным многогранником является треугольная пирамида, гранями которой являются правильные треугольники (рис. 1). В каждой ее вершине сходится по три грани. Имея всего четыре грани, этот многогранник называется также правильным тетраэдром, или просто тетраэдром, что в переводе с греческого языка означает четырехгранник.

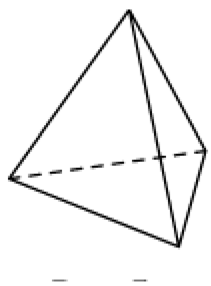
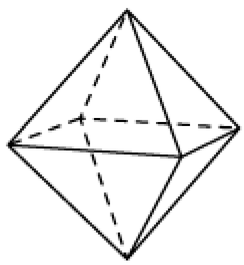
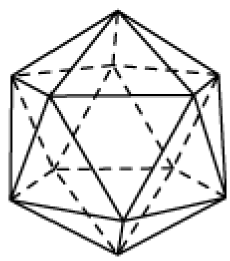




Рис.1. Рис.2. Рис.3.

Многогранник, гранями которого являются правильные треугольники, и в каждой вершине сходится четыре грани, изображен на рисунке 2. Его поверхность состоит из восьми правильных треугольников, поэтому он называется октаэдром.

Многогранник, в каждой вершине которого сходится пять правильных треугольников, изображен на рисунке 3. Его поверхность состоит из двадцати правильных треугольников, поэтому он называется икосаэдром.

Заметим, что поскольку в вершинах выпуклого многогранника не может сходиться более пяти правильных треугольников, то других правильных многогранников, гранями которых являются правильные треугольники, не существует.

Аналогично, поскольку в вершинах выпуклого многогранника может сходиться только три квадрата, то, кроме куба (рис. 4), других правильных многогранников, у которых гранями являются квадраты не существует. Куб имеет шесть граней и поэтому называется также гексаэдром.

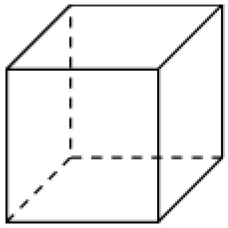


Рис.4.

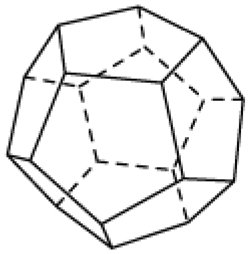


Рис.5.

Многогранник, гранями которого являются правильные пятиугольники, и в каждой вершине сходится три грани, изображен на рисунке 5. Его поверхность состоит из двенадцати правильных пятиугольников, поэтому он называется додекаэдром.

Рассмотрим понятие правильного многогранника с точки зрения топологии науки, изучающей свойсва фигур, не зависящих от различных деформаций без разрывов. С этой точки зрения, например, все треугольники эквивалентны, так как один треугольник всегда может быть получен из любого другого соответствующим сжатием или растяжением сторон. Вообще все многоугольники с одинаковым числом сторон эквивалентны по той же причине.

Многогранник называется *выпуклым*, если он является выпуклой фигурой, т.е. вместе с любыми двумя своими точками содержит и соединяющий их отрезок

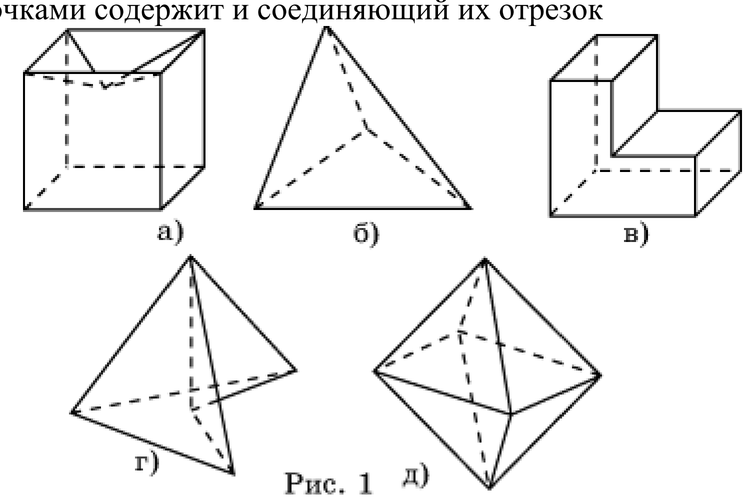


Рис. 1

Свойство 1. В выпуклом многограннике все грани являются выпуклыми многоугольниками.

Свойство 2. Выпуклый многогранник может быть составлен из пирамид с общей вершиной, основания которых образуют поверхность многогранника.

Свойство 3. Выпуклый многогранник лежит по одну сторону от плоскости каждой своей грани.

Контрольные вопросы

1.Определения внутренней точки, открытого множества, области, граничной точки, ограниченного множества, геометрического тела, многогранника, грани, ребра, вершины, диагонали многогранника, выпуклого и правильного многогранников.

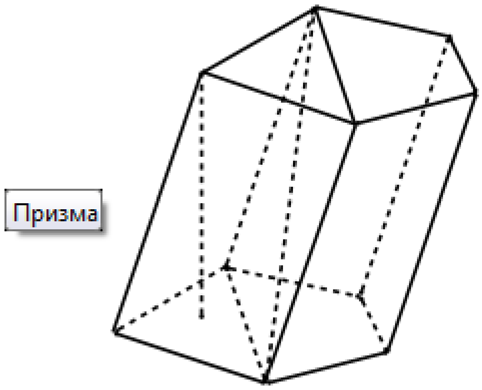
2. Развертка.

Тема 9.2. Призма и ее свойства.

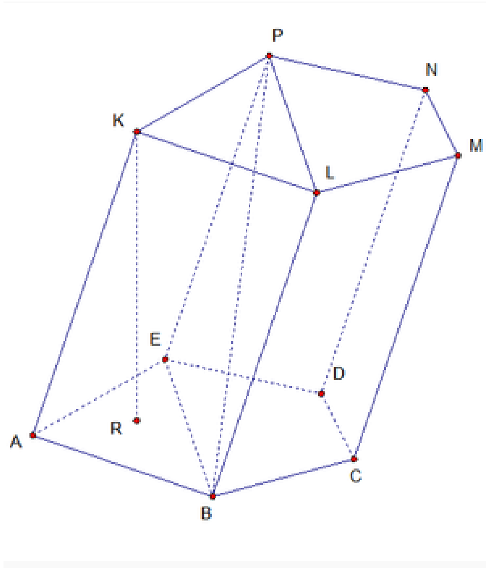
Определение призмы, высоты призмы, диагонали призмы. Свойства призмы. Изображение призмы и построение ее сечения. Прямая призма. Правильная призма.

Уметь: применять теоретические знания при решении задач.
Знать: определение призмы, высоты призмы, диагонали призмы, свойства призмы, изображение призмы и построение ее сечения, прямая призма, правильная призма.

Призма (от др.-греч. πρίσμα (лат. prisma) «нечто отпиленное») - многогранник, две грани которого являются конгруэнтными (равными) многоугольниками, лежащими в параллельных плоскостях, а остальные грани - параллелограммами, имеющими общие стороны с этими многоугольниками. Или (равносильно) - это многогранник, в основаниях которого лежат равные многоугольники, а боковые грани - параллелограммы.



Название	Определение	Обозначения на чертеже	Чертеж
Основания	Две грани, являющиеся конгруэнтными многоугольниками, лежащими в параллельных плоскостях.	ABCDE,	
Боковые грани	Все грани, кроме оснований. Каждая боковая грань обязательно является параллелограммом.	ABLK, BCML , CDNM, DEPN, EAKP	
Боковая поверхность	Объединение боковых граней.		
Полная поверхность	Объединение оснований и боковой поверхности.		
Боковые ребра	Общие стороны боковых граней.	AK,BL,CN, DM ,EP	
Высота	Отрезок, соединяющий плоскости, в которых лежат	KR	

	основания призмы и перпендикулярный этим плоскостям.		
Диагональ	Отрезок, соединяющий две вершины призмы, не принадлежащие одной грани.	BP	
Диагональная плоскость	Плоскость, проходящая через пересекающиеся диагональ основания и боковое ребро призмы.		
Диагональное сечение	Пересечение призмы и диагональной плоскости. В сечении образуется параллелограмм, в том числе его частные случаи — ромб, прямоугольник, квадрат.	EBLP	
Перпендикулярное (ортагональное) сечение	Пересечение призмы и плоскости, перпендикулярной ее боковому ребру.		

Свойства призмы

1. Основания призмы являются равными многоугольниками.
2. Боковые грани призмы являются параллелограммами.
3 Боковые ребра призмы параллельны и равны.
4. Объём призмы равен произведению её высоты на площадь основания: $V = S \cdot h$
5. Площадь полной поверхности призмы равна сумме площади её боковой поверхности и удвоенной площади основания.
6.Площадь боковой поверхности произвольной призмы $S = P \cdot l$,где P - периметр перпендикулярного сечения, l - длина бокового ребра.
7. Площадь боковой поверхности прямой призмы $S = P \cdot h$, где P - периметр основания призмы, h - высота призмы.
8. Перпендикулярное сечение перпендикулярно ко всем боковым рёбрам призмы.
9. Углы перпендикулярного сечения - это линейные углы двугранных углов при соответствующих боковых рёбрах.
10. Перпендикулярное сечение перпендикулярно ко всем боковым граням.

Контрольные вопросы

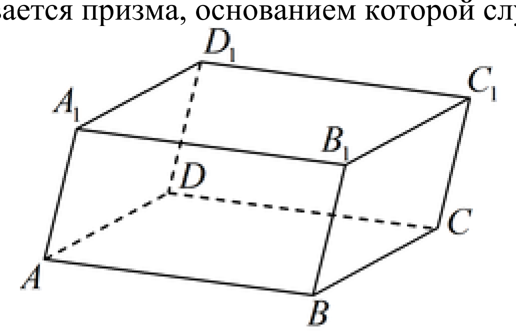
1. Определение призмы, высоты призмы, диагонали призмы.
2. Свойства призмы.
3. Изображение призмы и построение ее сечения.
4. Прямая призма. Правильная призма.

Тема 9.3. Параллелепипед и ее свойства.

Определение параллелепипеда. Свойства параллелепипеда с доказательствами. Куб.

Уметь: применять теоретические знания при решении задач.
Знать: определение параллелепипеда, свойства параллелепипеда, изображение параллелепипеда и построение ее сечения.

Параллелепипедом называется призма, основанием которой служит параллелограмм.



Параллелограммы, из которых составлен параллелепипед, называются его гранями, их стороны — *ребрами*, а вершины параллелограммов — *вершинами* параллелепипеда. У параллелепипеда все грани — параллелограммы.

Параллелепипеды, как и всякие призмы, могут быть *прямые* и *наклонные*.

Обычно выделяют какие-нибудь две противоположные грани и называют их основаниями, а остальные грани — боковыми гранями параллелепипеда. Ребра параллелепипеда, не принадлежащие основаниям, называют боковыми ребрами.

Две грани параллелепипеда, имеющие общее ребро, называются смежными, а не имеющие общих ребер — противоположными.

Отрезок, соединяющий две вершины, не принадлежащие одной грани, называется диагональю параллелепипеда.

Прямой параллелепипед, у которого основанием является прямоугольник, называется прямоугольным параллелепипедом. У прямоугольного параллелепипеда все грани — прямоугольники.

Длины не параллельных ребер прямоугольного параллелепипеда называются его линейными размерами (измерениями). У прямоугольного параллелепипеда три линейных размера.

Свойства параллелепипеда:

1. Противоположные грани параллелепипеда равны и параллельны.
2. Все четыре диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам.
3. Боковые грани прямого параллелепипеда — прямоугольники.
4. Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех его измерений.

Контрольные вопросы

1. Определение параллелепипеда.
2. Свойства параллелепипеда с доказательствами.
3. Куб.

Тема 9.4. Пирамида. Правильная пирамида. Усеченная пирамида. Тетраэдр.

Определения пирамиды и его основных элементов. Усеченная пирамида. Правильная пирамида. Тетраэдр.

Уметь: применять теоретические знания при решении задач.

Знать: определения пирамиды и его основных элементов, усеченная пирамида, правильная пирамида, тетраэдр.

Пирамида

Рассмотрим многоугольник $A_1, A_2, ..., A_n$ и точку *P*, не лежащую в плоскости этого многоугольника. Соединив точку *P* отрезками с вершинами многоугольника, получим n треугольников (рис.1.): $PA_1A_2, PA_2A_3, ...PA_nA_1$.

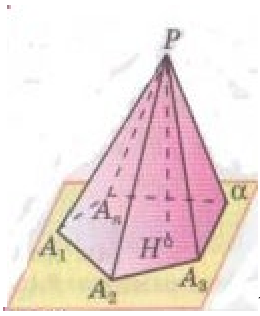


рис.1.

Многогранник, составленный из n - угольника $A_1, A_2, ..., A_n$ и n треугольников $PA_1A_2, PA_2A_3, ...PA_nA_1$, называется ***пирамидой***. Многоугольник $A_1, A_2, ..., A_n$ называется основанием, а треугольники $PA_1A_2, PA_2A_3, ...PA_nA_1$ - *боковыми гранями* пирамиды. Точка *P* – вершиной пирамиды, а отрезки $PA_1, PA_2, ...PA_n$ - ее *боковыми ребрами*. Пирамиду с основанием $A_1, A_2, ..., A_n$ и вершиной P обозначают так: $PA_1A_2...A_n$ - и называют n – угольной пирамидой.

На рисунке 2 изображены четырехугольная и шестиугольная пирамиды. Ясно, что треугольная пирамида – это *тетраэдр*.

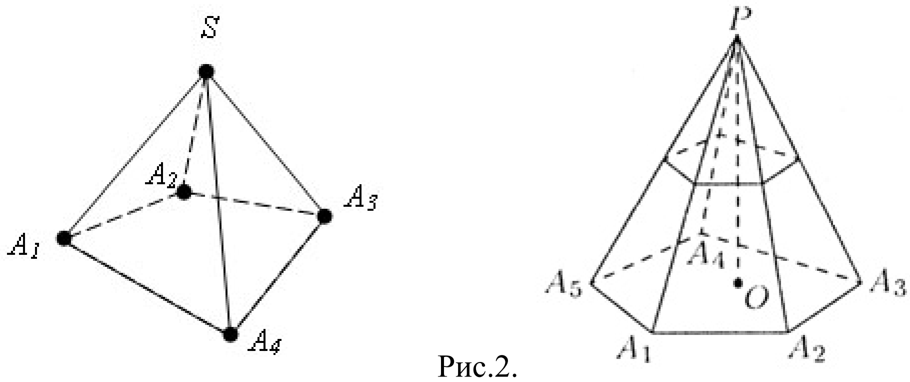


Рис.2.

Перпендикуляр, проведенный из вершины пирамиды к плоскости основания, называется высотой пирамиды. На (рис 1) отрезок PH является высотой пирамиды.

Площадью полной поверхности пирамиды называется сумма площадей всех ее граней (т.е. основания и боковых граней), а площадью боковой поверхности пирамиды – сумма площадей ее боковых граней. Очевидно, $S_{полн} = S_{бок} + S_{осн}$.

Правильная пирамида

Пирамида называется правильной, если

1) ее основание – правильный многоугольник;

2) ее высота – отрезок, соединяющий вершину пирамиды с ее центром.

Одним из примеров правильной пирамиды являются египетские пирамиды. Это четырехугольные пирамиды.

Свойства правильной пирамиды.

Все боковые ребра правильной пирамиды равны, а боковые грани являются равными равнобедренными треугольниками.

Доказательство данных фактов проводится устно:

1. Любое боковое ребро представляет собой гипотенузу прямоугольного треугольника, одним катетом которого служит высота пирамиды, а другим – радиус описанной около основания окружности. Эти прямоугольные треугольники равны. Следовательно, равны их гипотенузы.

2. Так как боковые ребра правильной пирамиды равны, то ее боковые грани - равнобедренные треугольники. Так как $A_1, A_2, ..., A_n$ - правильный многоугольник, то основания этих треугольников также равны друг другу. Значит, боковые грани равны (по трем сторонам).

Апофема.

Апофема – высота боковой грани правильной пирамиды, проведенная из ее вершины. Данный термин употребляется для правильной пирамиды, хотя у неправильной пирамиды также могут быть равны высоты боковых граней.

Теорема: Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна половине произведения периметра снования на апофему.

Доказательство

Боковые грани правильной пирамиды – равные равнобедренные треугольники, основания которых – стороны основания пирамиды, а высоты равны апофеме. Площадь *S* боковой поверхности пирамиды равна сумме произведений сторон основания на половину апофемы *d*. Вынося множитель 0,5*d* за скобки, получим в скобках сумму сторон основания пирамиды, т.е. его периметр. Теорема доказана.

Усеченная пирамида

***У**сеченной пирамидой* называется многогранник, у которого вершинами служат вершины основания и вершины ее сечения плоскостью, параллельной основанию.

Свойства усеченной пирамиды:

1. Основания усеченной пирамиды — подобные многоугольники.
2. Боковые грани усеченной пирамиды — трапеции.
3. Боковые ребра правильной усеченной пирамиды равны и одинаково наклонены к основанию пирамиды.
4. Боковые грани правильной усеченной пирамиды — равные между собой равнобедренные трапеции и одинаково наклонены к основанию пирамиды.
5. Двугранные углы при боковых ребрах правильной усеченной пирамиды равны.

Площадь поверхности и объём усеченной пирамиды

Пусть CH — высота усеченной пирамиды, P_1 и P_2 — периметры оснований усеченной пирамиды, S_1 и S_2 — площади оснований усеченной пирамиды, $S_{бок}$ — площадь боковой поверхности усеченной пирамиды, $S_{полн}$ — площадь полной поверхности усеченной пирамиды, V — объем усеченной пирамиды. Тогда имеют место следующие соотношения:

$$S_{полн} = S_1 + S_2 + S_{бок}$$

$$V = \frac{1}{3}CH(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2})$$

Если все двугранные углы при основании усеченной пирамиды равны β, а высоты всех боковых граней пирамиды равны $h_{бок}$, то

$$S_{бок} = \frac{1}{2}(P_1 + P_2)h_{бок}$$

$$S_{бок} = \frac{|S_1 - S_2|}{\cos\beta}.$$

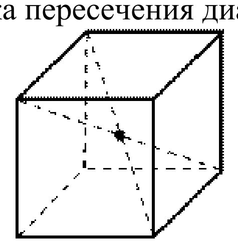
Симметрии в кубе, в параллелепипеде, в призме и пирамиде.

(дополнительный материал)

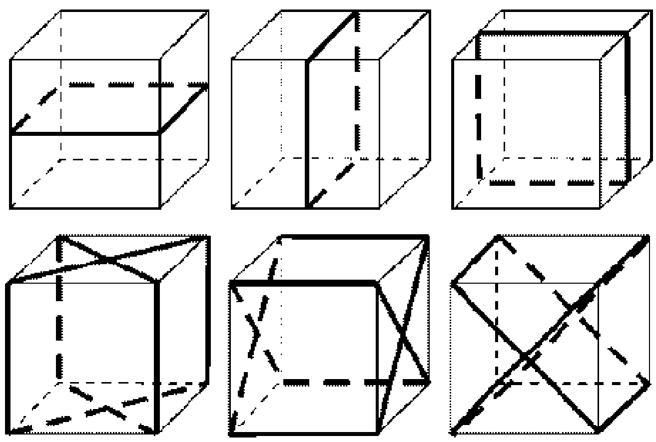
Построение симметрий в кубе, в параллелепипеде, в призме и пирамиде.

Симметрия куба

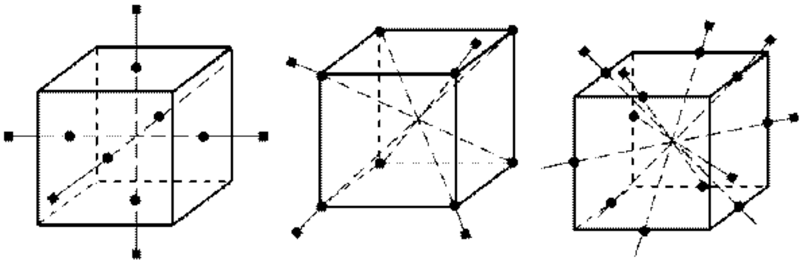
1.Центр симметрии — центр куба (точка пересечения диагоналей куба) (рис. 4).



2.Плоскости симметрии: три плоскости симметрии, проходящие через середины параллельных ребер; шесть плоскостей симметрии, проходящие через противолежащие ребра (рис. 5).

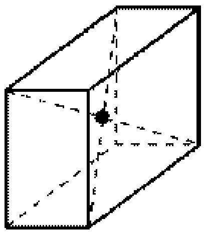


1. Оси симметрии: три оси симметрии, проходящие через центры противолежащих граней; четыре оси симметрии, проходящие через противолежащие вершины; шесть осей симметрии, проходящие через середины противолежащих ребер (рис. 6).

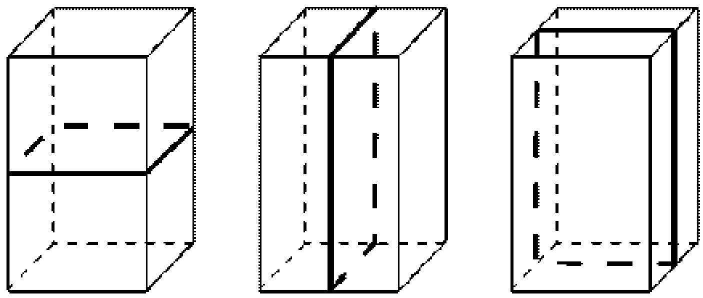


Симметрия прямоугольного параллелепипеда

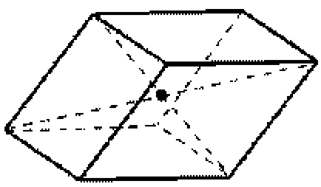
1. Центр симметрии — точка пересечения диагоналей прямоугольного параллелепипеда (рис. 7).



2. Плоскости симметрии: три плоскости симметрии, проходящие через середины параллельных ребер (рис. 8).

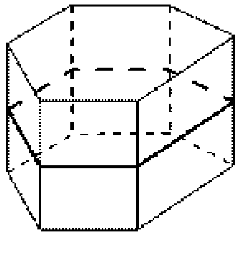


3. Оси симметрии: три оси симметрии, проходящие через точки пересечения диагоналей противолежащих граней (рис. 9).



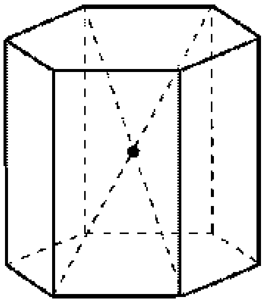
Симметрия прямой призмы

Плоскость симметрии, проходящая через середины боковых ребер (рис. 11).

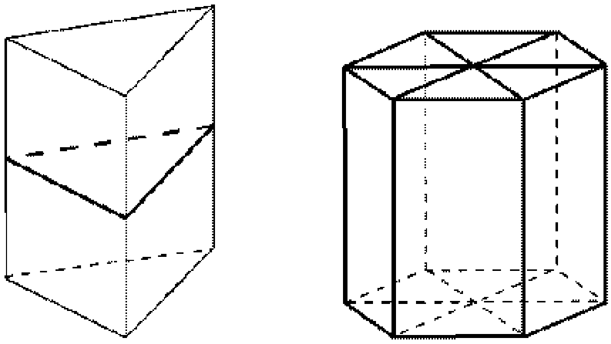


Симметрия правильной призмы

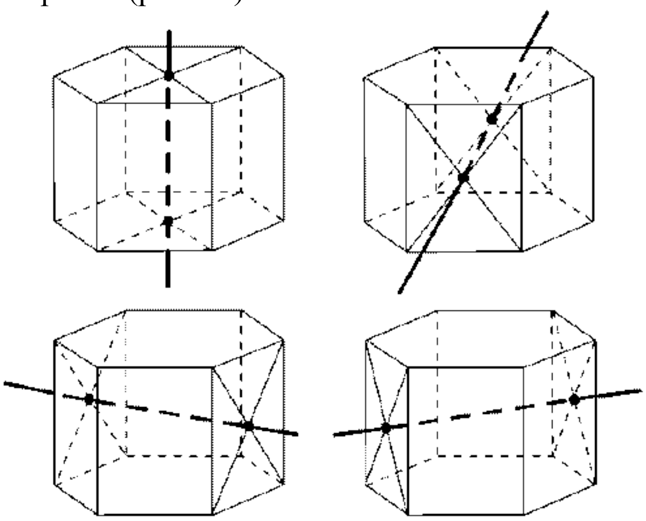
1. Центр симметрии при четном числе сторон основания — точка пересечения диагоналей правильной призмы (рис. 12)



2. Плоскости симметрии: плоскость, проходящая через середины боковых ребер; при четном числе сторон основания — плоскости, проходящие через противолежащие ребра (рис. 13).

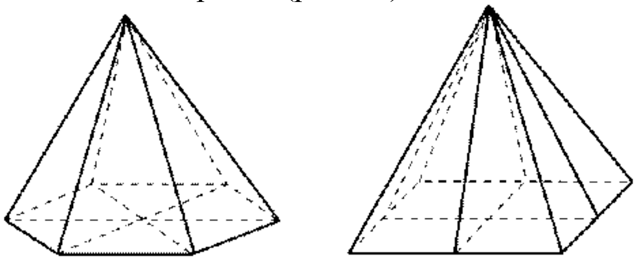


3. Оси симметрии: при четном числе сторон основания — ось симметрии, проходящая через центры оснований, и оси симметрии, проходящие через точки пересечения диагоналей противолежащих боковых граней (рис. 14).

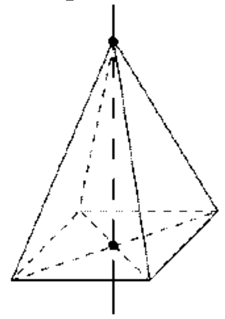


Симметрия правильной пирамиды

1. Плоскости симметрии: при четном числе сторон основания — плоскости, проходящие через противолежащие боковые ребра; и плоскости, проходящие через медианы, проведенные к основанию противолежащих боковых граней (рис. 15).



2. Ось симметрии: при четном числе сторон основания — ось симметрии, проходящая через вершину правильной пирамиды и центр основания (рис. 16).



Тема 9.5. Сечения куба, призмы и пирамиды.

Сечения куба, призмы и пирамиды.

Уметь: строить сечения куба, призмы и пирамиды.
Знать: Сечения куба, призмы и пирамиды

Сечение призмы

1. Сечение призмы плоскостью, параллельной основанию. В сечении образуется многоугольник, равный многоугольнику, лежащему в основании.

2. Сечение призмы плоскостью, проходящей через два не соседних боковых ребра. В сечении образуется параллелограмм. Такое сечение называется диагональным сечением призмы. В некоторых случаях может получаться ромб, прямоугольник или квадрат.

Рассмотрение правильной призмы возможно только после введения понятия правильный многоугольник. Однако с правильной треугольной призмой можно познакомить учащихся гораздо раньше. А с правильной четырехугольной призмой мы знакомы еще из курса математики 5–6-х классов, так как она представляет собой прямоугольный параллелепипед с квадратами в основаниях. Правильная призма — прямая призма, основаниями которой являются правильные многоугольники.

Свойства правильной призмы

1. Основания правильной призмы являются правильными многоугольниками.
2. Боковые грани правильной призмы являются равными прямоугольниками.
3. Боковые ребра правильной призмы равны.

Сечение правильной призмы

1. Сечение правильной призмы плоскостью, параллельной основанию. В сечении образуется правильный многоугольник, равный многоугольнику, лежащему в основании.

2. Сечение правильной призмы плоскостью, проходящей через два не соседних боковых ребра. В сечении образуется прямоугольник. В некоторых случаях может образоваться квадрат.

Из курса математики 5–6-х классов учащиеся уже знакомы с описанием пирамиды. А именно: пирамида — многогранник, поверхность которого состоит из многоугольника, называемого основанием пирамиды, и треугольников с общей вершиной, называемых боковыми гранями пирамиды. Знакомство с правильной пирамидой возможно только после изучения понятия правильный многоугольник. Однако с правильной треугольной и правильной четырехугольной пирамидой можно познакомить учащихся значительно раньше. Правильная пирамида — пирамида, в основании которой лежит правильный многоугольник и все боковые ребра равны.

Свойства правильной пирамиды

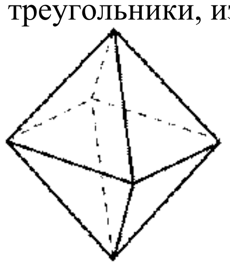
1o. Основание правильной пирамиды — правильный многоугольник.
2o. Боковые грани правильной пирамиды — равнобедренные треугольники.
3o. Боковые ребра правильной пирамиды равны.

Сечение правильной пирамиды

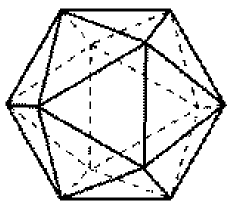
1. Сечение правильной пирамиды плоскостью, параллельной основанию. В сечении образуется правильный многоугольник, подобный многоугольнику, лежащему в основании.

2. Сечение правильной пирамиды плоскостью, проходящей через два не соседних боковых ребра. В сечении образуется равнобедренный треугольник. В некоторых случаях может образоваться равносторонний треугольник.

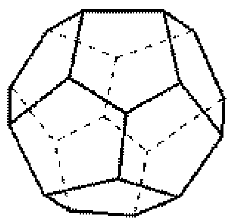
С некоторыми правильными многогранниками учащиеся уже встречались. Это треугольная пирамида и куб. Гранями треугольной пирамиды являются правильные треугольники. Ее называют правильным тетраэдром, что в переводе с греческого означает четырехгранник. Куб имеет шесть граней, поэтому называется правильным гексаэдром (по-гречески «гекса» означает шесть). Рассмотрение правильных многогранников следует начинать с тех из них, гранями которых являются правильные треугольники. Один из таких многогранников учащимся уже знаком — это правильный тетраэдр. Другой многогранник, гранями которого являются правильные треугольники, изображен на рисунке 1.



Его поверхность состоит из восьми правильных треугольников, поэтому его называют правильным октаэдром («окта» — восемь).
И третий многогранник, гранями которого являются правильные треугольники — это правильный икосаэдр («икоса» — двадцать). Его поверхность состоит из двадцати правильных треугольников (рис. 2).



Многогранник, гранями которого являются квадраты — это куб. Учащимся он хорошо знаком. Многогранник, гранями которого являются правильные пятиугольники, изображен на рисунке 3.



Его поверхность состоит из двенадцати правильных пятиугольников, поэтому его называют правильным додекаэдром («доде» — двенадцать).

Контрольные вопросы
1. Сечения куба.
2. Сечения призм.
3. Сечения пирамиды.

Тема 9.6. Правильные многогранники.

Представление о правильных многогранниках (тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр и икосаэдр).

Уметь: применять теоретические знания при решении задач на данную тему.
Знать: представление о правильных многогранниках (тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр и икосаэдр).

Определение правильного многогранника.

Многогранник называется правильным, если: он выпуклый; все его грани – равные друг другу правильные многоугольники; в каждой его вершине сходится одинаковое число ребер; все его двугранные углы равны.

Теорема: Существует пять различных (с точностью до подобия) типов правильных многогранников: правильный тетраэдр, правильный гексаэдр (куб), правильный октаэдр, правильный додекаэдр и правильный икосаэдр.

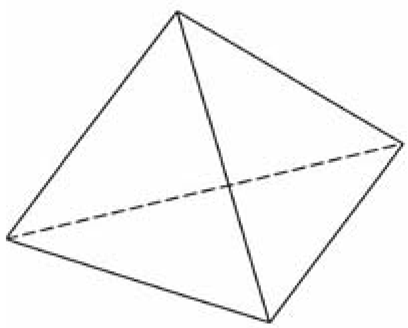
Таблица 1. Некоторые свойства правильных многогранников приведены в следующей таблице.

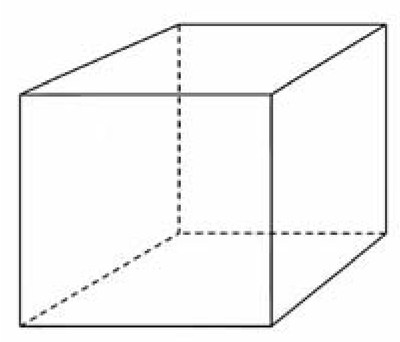
Вид грани	Плоский угол при вершине	Вид многогранного угла при вершине	Сумма плоских углов при вершине	В	Р	Г	Название многогранника
Правильный треугольник	60º	3-гранный	180º	4	6	4	Правильный тетраэдр
Правильный треугольник	60º	4-гранный	240º	6	12	8	Правильный октаэдр
Правильный треугольник	60º	5-гранный	300º	12	30	20	Правильный икосаэдр
Квадрат	90º	3-гранный	270º	8	12	6	Правильный гексаэдр (куб)
Правильный треугольник	108º	3-гранный	324º	20	30	12	Правильный додекаэдр

Рассмотрим виды многогранников:

Правильный тетраэдр

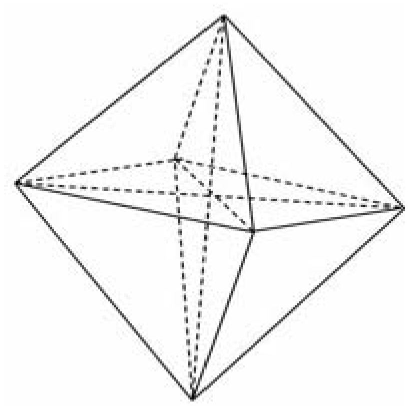
Правильный октаэдр

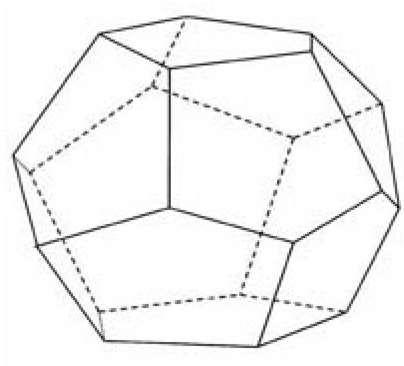




Правильный икосаэдр

Правильный гексаэдр (куб)





Правильный додекаэдр

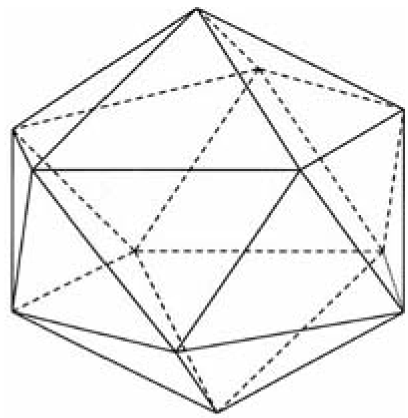


Таблица 2. Формулы для нахождения объемов правильных многогранников.

Вид многогранника	Объем многогранника
Правильный тетраэдр	$\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$
Правильный октаэдр	$\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$
Правильный икосаэдр	a^3
Правильный гексаэдр (куб)	$\frac{5a^3(3+\sqrt{5})}{12}$
Правильный додекаэдр	$\frac{a^3(15+7\sqrt{5})}{4}$

Контрольные вопросы

1. Тетраэдр
2. Куб
3. Октаэдр
4. Декаэдр
5. Икосаэд

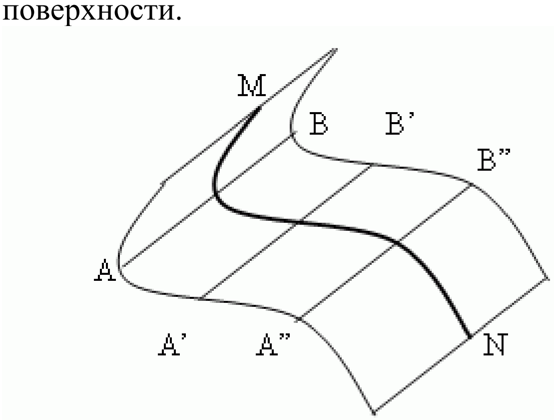
Тема 10. Тела вращения и поверхности тел вращения.

Тема 10.1. Цилиндр, конус и их свойства.

Определения цилиндра, конуса и их элементов. Свойства цилиндра и конуса. Сечения цилиндра и конуса плоскостями.

Уметь: применять теоретические знания при решении задач на данную тему.
Знать: определения цилиндра, конуса и их элементов, свойства цилиндра и конуса, сечения цилиндра и конуса плоскостями

Цилиндрическая поверхность образуется при движении прямой (AB, рис.1), сохраняющей своё направление и пересекающейся с заданной линией (кривой) MN. Линия MN называется направляющей. Прямые, соответствующие различным положениям прямой AB при её движении (A'B', A"B" и т.д., рис.2), называются образующими цилиндрической поверхности.



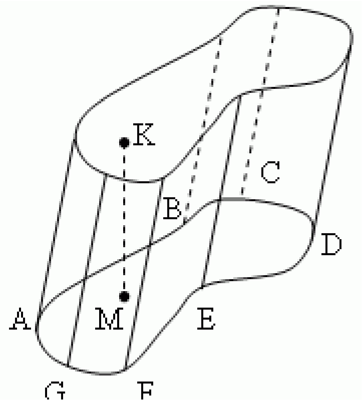
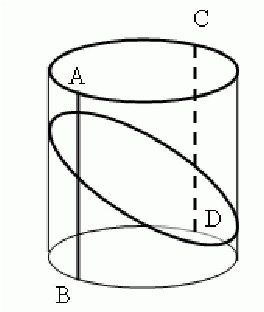


Рис.1. Рис.2

Цилиндр. Тело, ограниченное цилиндрической поверхностью с замкнутой направляющей и двумя параллельными плоскостями, называется цилиндром (рис.2). Части этих плоскостей (ABCDEFG и abcdefg) называются основаниями цилиндра. Расстояние между основаниями (KM, рис.2) – высота цилиндра. Цилиндр – прямой, если его образующие перпендикулярны основанию; в противном случае цилиндр – наклонный. Цилиндр называется круговым, если его основание – круг. Если цилиндр является одновременно и прямым, и круговым, то он называется круглым. Призма является частным случаем цилиндра(почему?).

Цилиндрические сечения боковой поверхности кругового цилиндра (рис.3). Сечения, параллельные основанию - круги того же радиуса. Сечения, параллельные образующим цилиндра - пары параллельных прямых (AB || CD). Сечения, которые не параллельны ни основанию, ни образующим - эллипсы.



Площадь боковой поверхности цилиндра

Площадь боковой поверхности цилиндра равна произведению высоты цилиндра на длину окружности основания.

Формула для вычисления боковой поверхности цилиндра:

$$S_{бок} = 2\pi Rh,$$

где R - радиус окружности основания, h - высота цилиндра.

Полная площадь поверхности цилиндра равна сумме боковой поверхности цилиндра и двойной площади основания цилиндра.

Формула для вычисления полной площади поверхности цилиндра:

$$S_{бок} = 2\pi Rh + 2\pi R^2,$$

где R - радиус окружности основания, h - высота цилиндра.

Коническая поверхность образуется при движении прямой (AB, рис.1), проходящей всё время через неподвижную точку (S), и пересекающей за данную линию MN, называемую направляющей. Прямые, соответствующие различным положениям прямой AB при её движении (A’B’, A”B” и т.д.), называются образующими конической поверхности; точка S – её вершиной. Коническая поверхность состоит из двух частей: одна описывается лучом SA, другая – его продолжением SB. Обычно в качестве конической поверхности рассматривают одну из её частей.

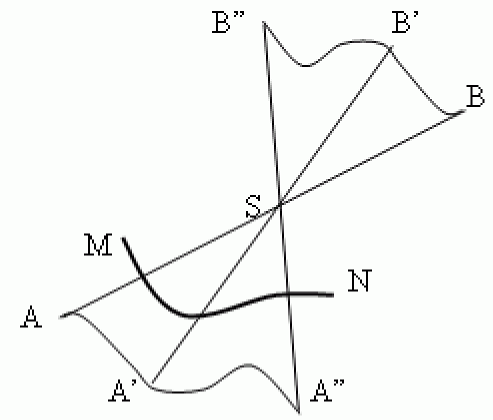


Рис.1

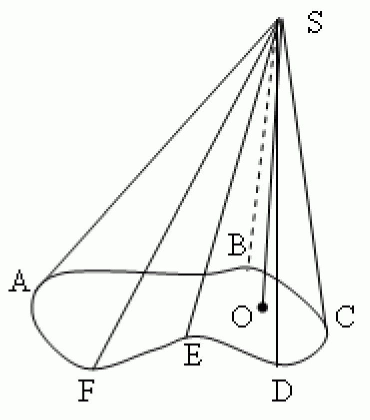
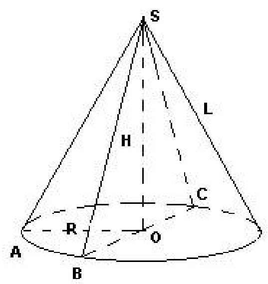
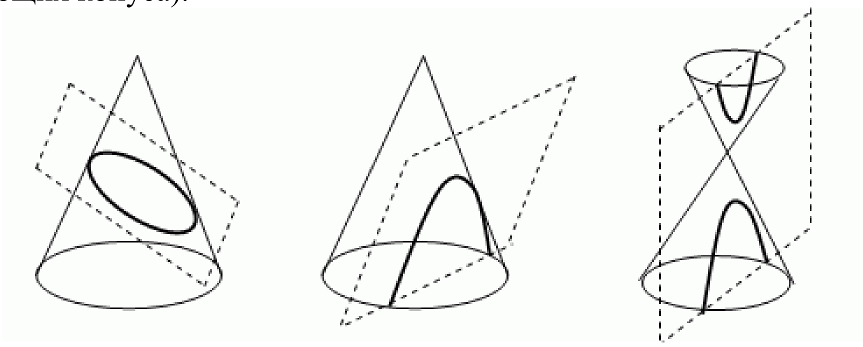


Рис.2

Конус – это тело, ограниченное одной из частей конической поверхности с замкнутой направляющей и пересекающей коническую поверхность плоскостью (ABCDEF, рис.2), не проходящей через вершину S. Часть этой плоскости, расположенной внутри конической поверхности, называется основанием конуса. Перпендикуляр SO, опущенный из вершины S на основание, называется высотой конуса. Пирамида является частным случаем конуса (почему?). Конус называется круговым, если его основанием является круг. Прямая SO, соединяющая вершину конуса с центром основания, называется осью конуса. Если высота кругового конуса совпадает с его осью, то такой конус называется *круглым*.



Конические сечения. Сечения кругового конуса, параллельные его основанию - круги. Сечение, пересекающее только одну часть кругового конуса и не параллельное ни одной его образующей - эллипс (рис.3). Сечение, пересекающее только одну часть кругового конуса и параллельное одной из его образующих - парабола (рис.4). Сечение, пересекающее обе части кругового конуса, в общем случае является гиперболой, состоящей из двух ветвей (рис.5).В частности, если это сечение проходит через ось конуса, то получаем пару пересекающихся прямых (образующих конуса).



Конические сечения представляют большой интерес как в теоретическом, так и в практическом отношении. Так, они широко используются в технике (эллиптические зубчатые колёса, параболические прожекторы и антенны); планеты и некоторые кометы движутся по эллиптическим орбитам; некоторые кометы движутся по параболическим и гиперболическим орбитам.

Площадь боковой поверхности конуса

Площадь боковой поверхности конуса равна произведению числа π на радиус окружности основания и на длину образующей конуса.

Формула площади боковой поверхности конуса: $S_{бок} = \frac{\pi l^2}{360}\alpha,$

где r - радиус окружности основания, l - длина образующей конуса.

$2\pi r = \frac{\pi l}{180}\alpha$, $\alpha = \frac{360r}{l}$.

$$S_{бок} = \pi r l$$

Площадь полной поверхности конуса равна сумме площадей основания конуса и его боковой поверхности. Основанием конуса является круг.

Формула площади полной поверхности конуса:

$$S_{бок} = \pi R l + \pi R^2,$$

где r - радиус окружности основания, l - длина образующей конуса.

Контрольные вопросы

1. Определения цилиндра, конуса и их элементов.
2. Свойства цилиндра и конуса.
3. Сечения цилиндра и конуса плоскостями.

Тема 10.2.Шар и сфера, их сечения. Касательная плоскость к сфере.

Определения шара, сферы и их элементов. Вписанная и описанная сферы. Сечения шара и сферы. Касательная плоскость к сфере.

Уметь: применять теоретические знания при решении задач на данную тему.
Знать: определения шара, сферы и их элементов, описанная и описанная сферы, сечения шара и сферы, касательная плоскость к сфере.

Сферическая поверхность – это геометрическое место точек (т.е. множество всех точек) в пространстве, равноудалённых от одной точки O, которая называется центром сферической поверхности (рис.1). Радиус AO и диаметр AB определяются так же, как и в окружности.

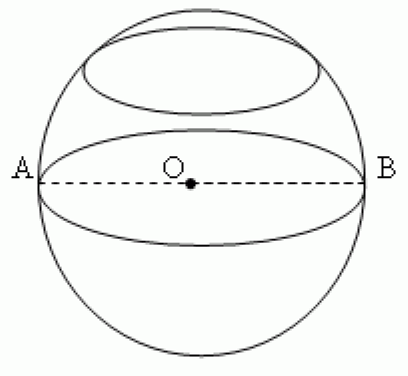


Рис.1

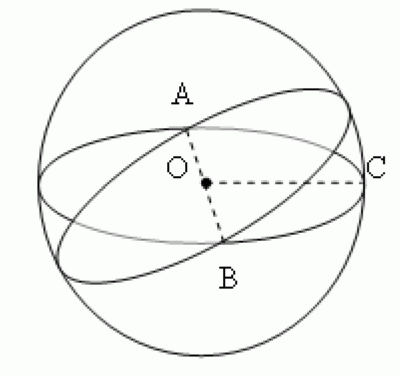
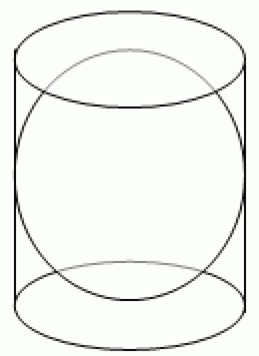


Рис.2

Шар (сфера) - это тело, ограниченное сферической поверхностью. Можно получить шар, вращая полукруг (или круг) вокруг диаметра. Все плоские сечения шара – круги (рис.1). Наибольший круг лежит в сечении, проходящем через центр шара, и называется большим кругом. Его радиус равен радиусу шара. Любые два больших круга пересекаются по диаметру шара (AB, рис.2). Этот диаметр является и диаметром пересекающихся больших кругов. Через две точки сферической поверхности, расположенные на концах одного диаметра (A и B, рис.2), можно провести бесчисленное множество больших кругов. Например, через полюса Земли можно провести бесконечное число меридианов.

Объём шара в полтора раза меньше объёма описанного вокруг него цилиндра (рис.3), а поверхность шара в полтора раза меньше полной поверхности того же цилиндра (теорема Архимеда):



$$S_{шара} = \frac{2}{3} S_{цил},$$

$$V_{шара} = \frac{2}{3} V_{цил}.$$

Рис.3

Здесь S шара и V шара - соответственно поверхность и объём шара;
S цил и Vцил - полная поверхность и объём описанного цилиндра.

Части шара. Часть шара (сферы), отсекаемая от него какой-либо плоскостью (ABC, рис.4), называется шаровым (сферическим) сегментом. Круг ABC называется основанием шарового сегмента. Отрезок MN перпендикуляра, проведенного из центра N круга ABC до пересечения со сферической поверхностью, называется высотой шарового сегмента. Точка M называется вершиной шарового сегмента.

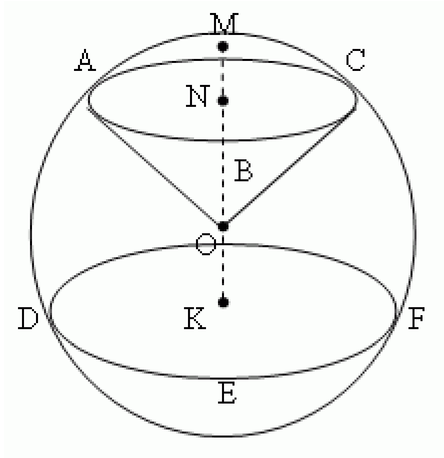


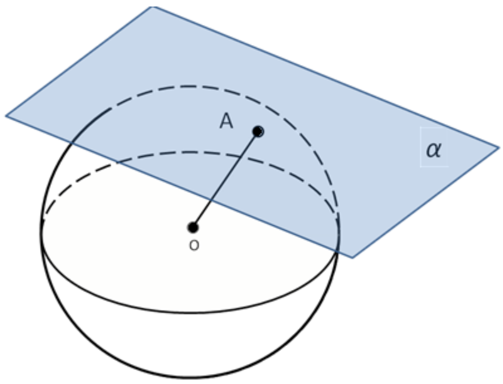
Рис.4

Часть сферы, заключённая между двумя параллельными плоскостями ABC и DEF, пересекающими сферическую поверхность (рис.4), называется шаровым слоем; кривая поверхность шарового слоя называется шаровым поясом (зоной). Круги ABC и DEF – основания шарового пояса. Расстояние NK между основаниями шарового пояса – его высота. Часть шара, ограниченная кривой поверхностью сферического сегмента (AMCB, рис.4) и конической поверхностью OABC, основанием которой служит основание сегмента (ABC), а вершиной – центр шара O, называется шаровым сектором.

Уравнение сферы

В прямоугольной системе координат уравнение сферы радиуса R с центром C(x_0, y_0, z_0) имеет вид $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$.

Касательная плоскость к сфере



Плоскость, имеющая со сферой только одну общую точку, называется касательной плоскостью к сфере, а их общая точка называется точкой касания плоскости и сферы.

На рисунке плоскость α - касательная к сфере с центром O, A – точка касания. Касательная плоскость к сфере обладает свойством, аналогичным свойству касательной к окружности. Оно выражено в следующей теореме:

Теорема: Радиус сферы, проведенный в точку касания сферы и плоскости, перпендикулярен к касательной плоскости.

Доказательство:

Рассмотрим плоскость α, касающуюся сферы с центром O в точке A. Докажем, что радиус OA является наклонной к плоскости α, и, следовательно, расстояние от сферы до плоскости α меньше радиуса сферы. Поэтому сфера и плоскость пересекаются по окружности. Но это противоречит тому, что плоскость α - касательная, т.е. сфера и плоскость α имеют только одну общую точку. Полученное противоречие доказывает, что радиус OA перпендикулярен к плоскости α. Теорема доказана.

Теорема: Если радиус сферы перпендикулярен к плоскости, проходящей через его конец, лежащей на сфере, то эта плоскость является касательной к сфере.

Доказательство:

Из условия теоремы следует, что данный радиус является перпендикуляром, проведенным из центра сферы к данной плоскости. Поэтому расстояние от центра сферы до плоскости равно радиусу сферы, и, следовательно, сфера и плоскость имеют одну общую точку.

Это означает, что данная плоскость является касательной к сфере. Теорема доказана.

Площадь сферы

За площадь сферы примем предел последовательности площадей поверхностей описанных около сферы многогранников при стремлении к нулю наибольшего размера каждой грани.

Площадь сферы: $S = 4\pi R^2$.

Контрольные вопросы

1. Определения шара, сферы и их элементов.
2. Вписанная и описанная сферы.
3. Сечения шара и сферы.
4. Касательная плоскость к сфере.

Раздел 11. Элементы комбинаторики и теории вероятностей

Тема 11.1. Элементы комбинаторики.

Основные понятия комбинаторики: размещения, перестановки, сочетания.

Знать: основные понятия комбинаторики: размещения, перестановки, сочетания.
Уметь: подсчитывать числа размещений, перестановок, сочетаний.

Комбинаторика – раздел математики, в котором изучаются задачи выбора элементов из заданного множества и расположения их в группы по заданным правилам, в частности задачи о подсчете числа комбинаций (выборок), получаемых из элементов заданного конечного множества. Если из некоторого количества элементов, различных между собой, составлять различные комбинации, то среди них можно выделить три типа комбинаций, носящих общее название – соединения.

Рассмотрим подробнее эти соединения:

1) Если в некотором множестве $a_1, a_2, ..., a_m$ переставлять местами элементы, оставляя неизменным их количество, то каждая полученная таким образом комбинация называется **перестановкой**. Общее число перестановок из m элементов обозначается P_m и вычисляется по формуле:

$$P_m = m!$$

2) Если составлять из m различных элементов группы по n элементов в каждой, располагая взятые элементы в различном порядке. Получившиеся при этом комбинации называются **размещениями** из m элементов по n. Общее число таких размещений рассчитывается по формуле:

$$A_m^n = m(m-1)(m-2)...(m-(n-1)) = \frac{m!}{(m-n)!}.$$

Перестановки являются частным случаем размещений.

3) Если из m элементов составлять группы по n элементов в каждой, не обращая внимания на порядок элементов в группе, то получившиеся при этом комбинации называются **сочетаниями** из m элементов по n. Общее число сочетаний находится по формуле:

$$C_m^n = \frac{P_m}{P_n P_{m-n}} = \frac{m!}{n!(m-n)!}.$$

4) Также одним из вариантов комбинаций являются **перестановки с повторяющимися элементами**. Если среди m элементов имеется m_1 одинаковых элементов одного типа, m_2 одинаковых элементов другого типа и т.д., то при перестановке этих элементов всевозможными способами получаем комбинации, количество которых определяется по формуле:

$$P_m(m_1, m_2, ...m_k) = \frac{P_m}{P_{m_1} P_{m_2} ... P_{m_k}} = \frac{m!}{m_1! m_2! ... m_k!}.$$

5) Если при выборке m элементов из n элементы возвращаются обратно и упорядочиваются, то говорят, что это **размещения с повторениями**. Размещения с повторениями могут отличаться друг от друга элементами, их порядком и количеством повторений элементов. Число всех размещений из n элементов по m с повторениями обозначается символом $\overline{A_n^m}$ и вычисляется по формуле:

$$\overline{A_n^m} = n^m.$$

6) Если при выборке m элементов из n элементы возвращаются обратно без последующего упорядочивания, то говорят, что это **сочетания с повторениями**. Число всех сочетаний из n элементов по m с повторениями обозначается символом $\overline{\tilde{N}_n^m}$ и вычисляется по формуле:

$$\overline{\tilde{N}_n^m} = C_{n+m-1}^m.$$

Контрольные вопросы
1. Определение комбинаторики.
2. Элементы комбинаторики.

Тема 11.2. Формула бинома Ньютона. Свойства биномиальных коэффициентов. Треугольник Паскаля.

Формула бинома Ньютона. Свойства биномиальных коэффициентов. Треугольник Паскаля.

Знать: формула бинома Ньютона, свойства биномиальных коэффициентов, треугольник Паскаля.
Уметь: вычислять бином Ньютона.

Бином Ньютона. Это формула, представляющая выражение $(a+b)^n$ при положительном целом n в виде многочлена:

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + $$
$$+ C_n^3 a^{n-3} b^3 + \ldots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n.$$

Заметим, что сумма показателей степеней для a и b постоянна и равна n.

Числа $C_n^1, C_n^2, C_n^3, \ldots, C_n^{n-1}$ называются биномиальными коэффициентами.

Их можно вычислить, применяя только сложение, если пользоваться следующей схемой. В верхней строке пишем две единицы. Все последующие строки начинаются и заканчиваются единицей. Промежуточные числа в этих строках получаются суммированием соседних чисел из предыдущей строки. Эта схема называется треугольником Паскаля:

1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
……………………………………………………

Первая строка в этой таблице содержит биномиальные коэффициенты для $n = 1$; вторая - для $n = 2$; третья - для $n = 3$ и т.д. Поэтому, если необходимо, например, разложить выражение:

$$(a+b)^7,$$

мы можем получить результат моментально, используя таблицу:

$$(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$$

Свойства биномиальных коэффициентов.

1. Сумма коэффициентов разложения $(a+b)^n$ равна 2^n.

Для доказательства достаточно положить $a = b = 1$. Тогда в правой части разложения бинома Ньютона мы будем иметь сумму биномиальных коэффициентов, а слева:

$$(1+1)^n = 2^n.$$

2. Коэффициенты членов, равноудалённых от концов разложения, равны.

Это свойство следует из соотношения:

$$C_n^k = C_n^{n-k}.$$

3. Сумма коэффициентов чётных членов разложения равна сумме коэффициентов нечётных членов разложения; каждая из них равна

$$2^{n-1}.$$

Для доказательства воспользуемся биномом: $(1-1)^n = 0^n = 0$. Здесь чётные члены имеют знак « + » , а нечётные - « - ». Так как в результате разложения получается 0, то следовательно, суммы их биномиальных коэффициентов равны между собой, поэтому каждая из них равна: $(1-1)^n = 0^n = 0$. что и требовалось доказать.

Контрольные вопросы
1. Формула бинома Ньютона.
2. Свойства биномиальных коэффициентов.
3. Треугольник Паскаля.

Тема 11.3.Элементы теории вероятностей и математической статистики.

Событие. Вероятность события, сложение и умножение вероятностей. Представление данных, генеральная совокупность, выборка, среднее арифметическое, медиана.

Знать: событие, вероятность события, сложение и умножение вероятностей, представление данных, генеральная совокупность, выборка, среднее арифметическое, медиана.
Уметь: решать задачи по теории вероятности и математической статистики.

Случайные события их вероятности

Опытом, или испытанием, называют всякое осуществление определенного комплекса условий или действий, при которых наблюдается соответствующее явление.

Событием называется всякий факт, который может произойти или не произойти в результате опыта.

Пример 1. Подбрасывание монеты – опыт, исход. Выпадение герба или цифры – событие. Здесь и в дальнейшем предполагаем, что падение монеты на ребро не рассматривается, так как это неустойчивое состояние равновесия, а изучаемая монета достаточно тонкая.

Элементарными исходами (событиями) ω опыта называются такие результаты опыта, которые взаимно исключают друг друга и в результате опыта происходит одно из этих событий, также каково бы ни было событие A, по наступившему элементарному исходу можно судить о том, происходит или не происходит это событие.

Совокупность всех элементарных исходов опыта называется *пространством элементарных событий.* Обозначается Ω.

Все события (явления) действительности можно подразделить на три вида: достоверные, невозможные и случайные.

Событие называется *достоверным,* если оно обязательно произойдёт в условиях данного опыта.

Событие называется *невозможным*, если оно в условиях данного опыта заведомо не произойдёт.

Событие называется *случайным*, если оно может либо произойти, либо не произойти в данном опыте.

События называются *равновозможными,* если имеются основания считать, что ни одно из этих событий не является более возможным, чем любое другое из них.

Два события называются *противоположными*, если при наступлении одного из них, второе событие не происходит. Если событие обозначено A, то противоположное ему обозначают $\overline{A}$.

В отношении друг друга события также имеют особенности, т.е. в одном случае событие A может произойти совместно с событием B, в другом – нет.

События называются *совместными* в данном опыте, если появление одного из них не исключает появление других.

События называются *несовместными*, если появление одного из них исключает появление других.

Если любое из событий происходит независимо от реализации любой комбинации других событий, то они называются *независимыми в совокупности*. Если появление одного из событий влияет на возможность появления другого, они называются *зависимыми*.

Несколько событий в данном опыте образуют *полную группу событий*, если в результате опыта обязательно произойдёт хотя бы одно из них. Если события, образующие полную группу, несовместны, то появление одного и только одного из них является достоверным событием. Два несовместных события, образующие полную группу событий, являются *противоположными*.

Классическое определение вероятности события

Существует простой способ определения вероятности события, основанный на равновозможности любого из конечного числа исходов опыта.

Пусть проводится опыт с n исходами, которые можно представить в виде полной группы несовместных равновозможных событий. Такие исходы называются *случаями, шансами*, *элементарными событиями,* (ω). Сам опыт называется *классическим*. Про такой опыт говорят, что он сводится к схеме случаев.

Случай ω называется *благоприятным или благоприятствующим* событию *A*, если он приводит к наступлению события *A*.

Вероятностью события A называется математическая оценка возможности появления этого события в результате опыта.

Вероятность события *A* равна отношению числа, благоприятствующих событию А исходов опыта к общему числу попарно несовместных исходов опыта, образующих полную группу событий.

$$P(A) = \frac{m}{n}. \tag{1}$$

Формула (1) является *классической формулой* определения вероятности события.

Очевидно, что *вероятность достоверного события* равна единице, а *вероятность невозможного* – равна нулю. Таким образом, значение вероятности любого события – есть положительное число, заключенное между нулем и единицей.

$$0 \le P(A) \le 1. \tag{2}$$

Понятие вероятности позволяет дать новые определения для разных видов событий. А именно, событие *B* называется *независимым* от события *A*, если вероятность события *B* не зависит от того, произошло событие *A* или не произошло. Событие *B* называется зависимым от события *A*, если вероятность события *B* зависит от того, произошло или не произошло событие *A*.

Теоремы умножения и сложения вероятностей

События *A* и *B* называются *равными,* если осуществление события *A* влечет за собой осуществление события В и наоборот.

Суммой двух событий *A* и *B* называют событие *C*=*A*+*B*, состоящее в появлении события *A*, или события *B*, или обоих этих событий. По-другому, появление хотя бы одного события.

Теорема 1 (сложения вероятностей). Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

Следствие 1: Если события $A_1, A_2, ..., A_n$ образуют полную группу несовместных событий, то сумма их вероятностей равна единице:

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1.$$

Теорема 2. Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Теорема 3. (Умножения вероятностей). Вероятность произведения двух событий (совместного появления этих событий) равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную при условии, что первое событие уже наступило.

$$P(AB) = P(A)P(B/A) = P(A)P_A(B).$$

Также можно записать:

$$P(AB) = P(A)P(B/A) = P(B)P(A/B) = P(B)P_B(A).$$

Если события независимые, то $P(B/A) = P(B)$, и теорема умножения вероятностей принимает вид:

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

Если в результате испытания может появиться n событий, независимых в совокупности, то *вероятность появления хотя бы одного* из них равна

$$P(A) = 1 - q_1 q_2 ... q_n.$$

Здесь событие *A* обозначает наступление хотя бы одного из событий A_i с вероятностями наступления p_i, а $q_i = 1 - p_i$ – вероятность противоположных событий $\overline{A}_1, \overline{A}_2, ..., \overline{A}_n$.

Тема 12. Первообразная и интеграл

Тема 12.1. Первообразная и интеграл.

Первообразная. Правила нахождения первообразных.Таблица интегралов

Уметь: находить неопределенные интегралы различными методами
Знать: определение первообразной; правила нахождения первообразных, определение неопределенного интеграла и его свойства, таблицу интегралов, методы нахождения интегралов.

Функция $F(x)$ называется *первообразной функцией* функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, если в любой точке этого отрезка верно равенство:

$$F'(x) = f(x).$$

Надо отметить, что первообразных для одной и той же функции может быть бесконечно много. Они будут отличаться друг от друга на некоторое постоянное число, т.е. $F_1(x) = F_2(x) + C$.

Неопределенным интегралом функции $f(x)$ называется совокупность первообразных функций, которые определены соотношением:

$$F(x) + C.$$

Записывают: $\int f(x)dx = F(x) + C;$здесь $\int$ – знак интеграла, $f(x)$ – подынтегральная функция, $f(x)\,dx$ – подынтегральное выражение.

Вычисление неопределенного интеграла от заданной функции называется *интегрированием*.

Свойства неопределенных интегралов

1. Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции.

$$\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x) + C)' = f(x);$$

2. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению.

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx;$$

3. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции с точностью до постоянного слагаемого.

$$\int dF(x) = F(x) + C;$$

4. Интеграл от суммы или разности двух и более функций равен сумме или разности интегралов от этих функций

$$\int (u + v - w)dx = \int udx + \int vdx - \int wdx;$$

5. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла

$$\int C \cdot f(x)dx = C \cdot \int f(x)dx;$$

Таблица интегралов

№	Интеграл	Значение	№	Интеграл	Значение
1	$\int dx$	$x+C$	11	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + C =$ $= -\arccos x + C$
2	$\int x^n dx$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$	12	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$	$\frac{1}{2a} \ln\left\|\frac{x-a}{x+a}\right\| + C$
3	$\int \frac{dx}{x}$	$\ln\|x\| + C$	13	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}}$	$\ln\left\|x + \sqrt{x^2 \pm a}\right\| + C$
4	$\int a^x dx$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$	14	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$	$\arcsin \frac{x}{a} + C$
5	$\int e^x dx$	$e^x + C$	15	$\int \frac{dx}{a^2 + x^2}$	$\frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$
6	$\int \sin x dx$	$-\cos x + C$	16	$\int \frac{1}{\sin x} dx$	$\ln\left\|tg \frac{x}{2}\right\| + C$
7	$\int \cos x dx$	$\sin x + C$	17	$\int \frac{1}{\cos x} dx$	$\ln\left\|tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right\| + C$
8	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx$	$tgx + C$	18	$\int tgx dx$	$-\ln\|\cos x\| + C$
9	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx$	$-ctgx + C$	19	$\int ctgx dx$	$\ln\|\sin x\| + C$
10	$\int \frac{dx}{1+x^2}$	$\mathrm{arctg} x + C =$ $= -\mathrm{arcctg} x + C$	20	$\int \frac{dx}{x(a-x)}$	$\frac{1}{a} \ln\left\|\frac{x}{a-x}\right\| + C$

Методы нахождения интегралов

Способ подстановки (замены переменных).

Если требуется найти интеграл $\int f(x)dx$, но сложно отыскать первообразную, то иногда с помощью замены $x = \varphi(t)$ и $dx = \varphi'(t)dt$ можно получить:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Интегрирование по частям.

Вспомним формулу производной произведения:

$$(uv)' = u'v + uv'$$

где u и v – некоторые функции от x. В дифференциальной форме:

$$d(uv) = vdu + udv$$

Проинтегрировав, получаем: $\int d(uv) = \int vdu + \int udv$, а в соответствии с приведенными выше свойствами неопределенного интеграла:

$$uv = \int vdu + \int udv \qquad \text{или} \qquad \int udv = uv - \int vdu;$$

Получили формулу интегрирования по частям, которая позволяет находить интегралы многих элементарных функций.

При использовании метода по частям за *u* берется такая функция, которая при дифференцировании упрощается, а за *dv* – та часть подынтегрального выражения, интеграл от которой известен или может быть найден.

Большую часть интегралов, вычисляемых по частям, можно разбить на три группы:

1. Интегралы вида $\int P(x)arctgxdx$, $\int P(x)arcctgxdx$, $\int P(x)\ln xdx$, $\int P(x)\arcsin xdx$, $\int P(x)\arccos xdx$, где $P(x)$ – многочлен. Для их вычисления следует за u принимать одну из вышеуказанных функций, а $dv = P(x)dx$.

2. Интегралы вида $\int P(x)e^{ax}dx$, $\int P(x)\sin axdx$, $\int P(x)\cos axdx$, где $P(x)$ – многочлен, а a – некоторое число. Для их вычисления следует приять $u = P(x)$, а $dv = e^{ax}dx$, $dv = \sin axdx$, $dv = \cos axdx$.

Как видно, последовательное применение формулы интегрирования по частям позволяет постепенно упростить функцию и привести интеграл к табличному.

3. Интегралы вида $\int e^{ax}\cos bxdx$, $\int e^{ax}\sin bxdx$, где a *и* b – некоторые числа. Эти интегралы вычисляются двукратным интегрированием по частям.

Контрольные вопросы

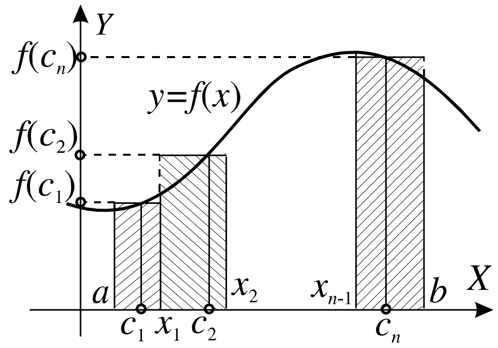
1. Первообразная.
2. Правила нахождения первообразных.
3. Определение неопределенного интеграла.
4. Свойства неопределенного интеграла.
5. Методы интегрирования.

Тема 12.2. Определенный интеграл и его применение

Вычисление определенных интегралов с помощью формулы Ньютона-Лейбница.
Нахождение площадей фигур.

Уметь: вычислять определенные интегралы с помощью формулы Ньютона-Лейбница, вычислять площадь криволинейной трапеции, фигур, ограниченных заданными линиями.
Знать: алгоритм вычисления определенных интегралов с помощью формулы Ньютона-Лейбниц, методы вычисления определенных интегралов алгоритм вычисления площадей фигур.

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a,b]$. Разобьем отрезок $[a,b]$ на *n* произвольных частей точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b$. На каждом из частичных отрезков выберем произвольно по одной точке: $c_1 \in [a, x_1]$, $c_2 \in [x_1, x_2]$, …, $c_n \in [x_{n-1}, b]$.



Введем обозначения: $\Delta x_1 = x_1 - a$, $\Delta x_2 = x_2 - x_1$, …, $\Delta x_n = b - x_{n-1}$.

Составим сумму: $\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$, которая называется *интегральной суммой* функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$.

Геометрический смысл *σ*: Каждое слагаемое интегральной суммы представляет собой площадь прямоугольника с основанием Δx_i и высотой $f(c_i)$, покрытого штриховкой на рисунке.

Обозначим через $\lambda = \max(\Delta x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ – длину наибольшего частичного отрезка. Величину λ иногда называют *параметром разбиения*.

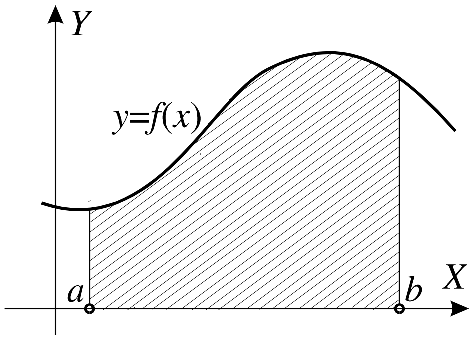
Рассмотрим процесс, при котором число точек разбиения неограниченно возрастает таким образом, что величина λ стремится к нулю.

Если существует предел интегральной суммы $I = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sigma$, то он называется *определенным интегралом* от функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ и обозначается

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

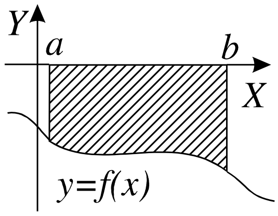
В этом случае функция $f(x)$ называется *интегрируемой на отрезке* $[a,b]$. Число *a* называется *нижним пределом интегрирования*, а число *b* – *верхним пределом интегрирования*.

Если такой предел существует, то он не зависит от первоначального разбиения отрезка $[a,b]$ и выбора точек c_i. Из определения определенного интеграла следует, что его величина зависит только от вида функции $f(x)$ и от чисел *a* и *b*. Следовательно, если заданы $f(x)$ и пределы интегрирования, то интеграл определяется однозначно и представляет собой некоторое число.



Геометрический смысл *определенного интеграла*: Если $f(x) > 0$ на отрезке $[a,b]$, то определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ геометрически представляет собой площадь криволинейной трапеции – фигуры, ограниченной линиями $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$.

Если $f(x) < 0$ на отрезке $[a,b]$, то $S = -\int_a^b f(x)dx$.



Свойства определенного интеграла

1. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$;
2. $\int_a^a f(x)dx = 0$;
3. Если $c \in [a,b]$, то $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$;
4. $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$;
5. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$, где *k* – произвольное число.

Формула Ньютона-Лейбница

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и функция $F(x)$ является ее первообразной на этом отрезке, то имеет место *формула Ньютона-Лейбница*

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

то есть определенный интеграл равен разности значений первообразной при верхнем и нижнем пределах интегрирования

Замена переменных в определенном интеграле

Пусть задан интеграл $\int_a^b f(x)dx$, где $f(x)$ – непрерывная функция на отрезке $[a,b]$. Введем новую переменную в соответствии с формулой $x = \varphi(t)$. Тогда если:

1) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$;

2) $\varphi(t)$ и $\varphi'(t)$ непрерывны на отрезке $[\alpha,\beta]$;

3) $f(\varphi(t))$ определена на отрезке $[\alpha,\beta]$,

то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

Эта формула называется *формулой замены переменной в определенном интеграле*.

Замечание. Если при вычислении неопределенного интеграла с помощью замены переменной следует от новой переменной *t* возвращаться к старой переменной *x*, то при вычислении определенного интеграла этого делать ненужно, т.к.
$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = F[\varphi(t)]\Big|_\alpha^\beta = F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] = F(b) - F(a)$

Интегрирование по частям.

Если функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$, а также непрерывны на этом отрезке их производные, то справедлива формула:

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu.$$

которая называется *формулой интегрирования по частям в определенном интеграле*.

Также при вычислении определенного интеграла используются следующие правила:

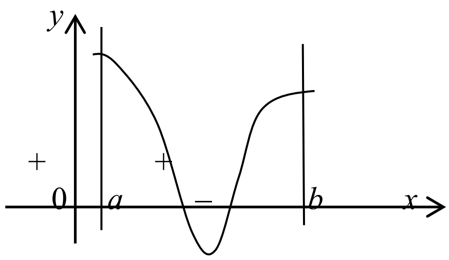
Если $f(x)$ – нечетная, то $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$, если нечетная, $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$

Геометрические приложения определенного интеграла.

Площадь плоской фигуры.

а) Площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, прямыми $x = a$ и $x = b$ и отрезком $[a,b]$, вычисляется по формуле $S = \int_a^b f(x)dx$

Если график расположен ниже оси *Ox*, т.е. $f(x)$ < 0, то площадь имеет знак “–“, если график расположен выше оси *Ox*, т.е. $f(x)$ > 0, то площадь имеет знак “+”.



Таким образом, для нахождения суммарной площади используется формула

$$S = \left|\int_a^b f(x)dx\right|.$$

б) Площадь фигуры, ограниченной кривыми $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$ $\left(f_1(x) \le f_2(x)\right)$ и прямыми $x = a$ и $x = b$, находится по формуле

$$S = \int_a^b \left[f_2(x) - f_1(x)\right]dx$$

в) Если кривая задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$ и $y = y(t)$, то площадь криволинейной трапеции, ограниченной этой кривой, прямыми $x = a$ и $x = b$ и отрезком $[a,b]$, выражается формулой $S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt$, где t_1 и t_2 определяются из уравнений $a = x(t_1)$ и $b = x(t_2)$.

Контрольные вопросы

1. Определение определенного интеграла.
2. Свойства определенного интеграла.
5. Вычисление определенных интегралов с помощью формулы Ньютона-Лейбница.
4. Методы нахождения определенных интегралов.
5.Определение криволинейной трапеции.
6. Алгоритм нахождения площади фигуры, ограниченной заданными линиями.

Тема 13 .Измерения в геометрии.

Тема 13.1. Объем и его измерение. Интегральная формула объема.

Понятие объема и его свойства. Интегральная формула объема. Формулы объема куба, прямоугольного параллелепипеда, призмы, цилиндра.
Формулы объема пирамиды и конуса. Формулы площади поверхностей цилиндра и конуса.
Формулы объема шара и площади сферы.

Уметь: вычислять объем многогранников и объем шара; вычислять площадь поверхностей цилиндра и конуса и сферы.
Знать: понятие объема и его свойства, интегральная формула объема, формулы объема куба, прямоугольного параллелепипеда, призмы, цилиндра, формулы объема пирамиды и конуса, формулы площади поверхностей цилиндра и конуса, формулы объема шара и площади сферы.

Тела равновеликие. Пространство, занимаемое каким-нибудь телом, или вместимость этого тела наз. его объемом. Могут быть такие тела, которые имеют одинаковый объем, но различный вид, так что хотя они и занимают одинаковое пространство, но нельзя вложить одно тело в другое так, чтобы они совместились. Возьмем напр. две прямые треугольные призмы AB и EF (рис.1.), которых основания и высоты равны;

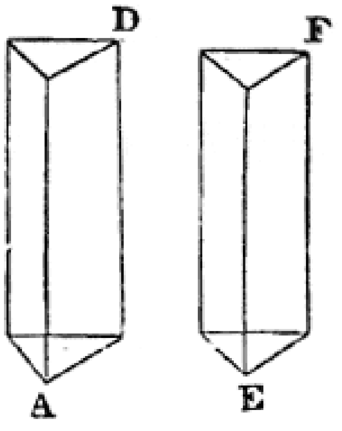


Рис.1

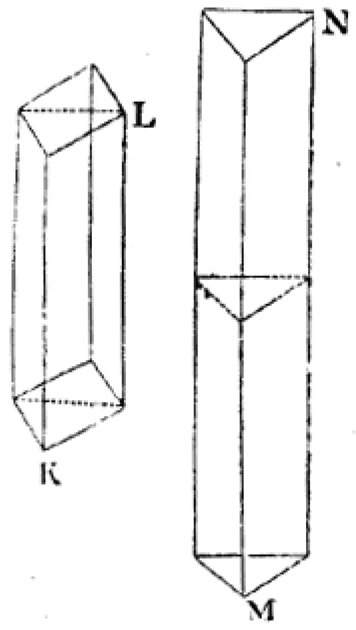


Рис.2.

мы можем приставить эти призмы одну к другой так, что образуется одна призма MN (рис.2.), которой основание то же самое, а высота вдвое больше; можем также составить из них параллелепипед KL; объем параллелепипеда. будет, очевидно, равен объему призмы MN, так как оба эти тела состоят из одних и тех же призм; но параллелепипед, конечно, не может совместиться с призмой. Тела, имеющие равный объем, наз. равновеликими.

Единица для измерения объемов.

Измерить объем какого-нибудь тела, значит найти, сколько раз в нем может поместиться другое тело, объем которого принимается за единицу. Такой единицей служит куб, которого каждое ребро = линейной единице, напр., сажени, аршину и т. под. Таким образом, определить объем или вместимость комнаты значит узнать, сколько поместится в ней кубических саж., куб. арш. и т. под. Для этого надо бы поставить в комнате одну куб. саж. или один куб. арш. рядом с этой единицей поставить другой такой куб, потом третий и т. д., пока вся комната не наполнится. Но такое измерение будет и неудобно, и весьма продолжительно; мы покажем сейчас, каким образом можно измерять объемы тел, не помещая в них куб. мер.

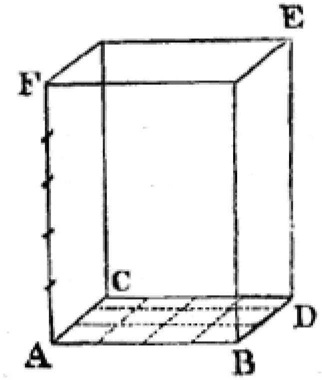
Свойство объемов:

1. Равные тела имеют равные объемы.
2. Если тело составлено из нескольких тел, то его объем равен сумме объемов этих тел.

Объем прямоугольного параллелепипеда.

Итак, чтоб определить объем прямоугольного параллелепипеда, надо измерить одной и той же линейной единицей три ребра его, выходящие из общей вершины, и полученные числа перемножить; произведение покажет, сколько содержится в пар-де соответствующих кубических единиц. В прямоугольном параллелепипеде три ребра, идущие из одной вершины, называется измерениями этого параллелепипеда; поэтому предыдущее правило об определении объема короче выражают так: объем прямоугольного параллелепипеда произведению трех его измерений.

Можно сказать также, что объем прямоугольного параллелепипеда произведению площади его основания на высоту.



Следствие 1. Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению площади основания на высоту.

$$V=Sh,$$

где S – площадь основания, h – высота параллелепипеда.

*Следствие 2.*Объем прямой призмы, основанием которой является прямоугольный треугольник, равен произведению площади основания на высоту.

$$V = S_{ABC} \cdot h$$

Объем пирамиды.

Всякая пирамида составляет 1/3 призмы того же основания и той же высоты. Чтобы проверить это, возьмем ящик А, имеющий вид призмы (рис.3.), и пирамиду В, внутри пустую; основание её такое же, как у призмы, и высота такая же; насыплем в нее песку или нальем воды (для этого, разумеется, ее надо обернуть вершиной вниз) так, чтобы наполнить ее; потом выльем эту воду в призму; затем опять наполним пирамиду и опять выльем; мы увидим, что надо три раза перелить воду из пирамиды в призму - и тогда только призма наполнится. Поэтому *объем пирамиды=1/3 произведения площади её основания на высоту.*

$$V = \frac{1}{3} S \cdot h$$

Объем усеченной пирамиды, высота которой равна h, а площади оснований равны S и S_1, вычисляется по формуле

$$V = \frac{1}{3} h(S + S_1 + \sqrt{S \cdot S_1})$$

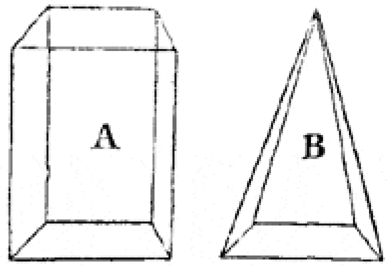


Рис.3.

Объем цилиндра.

Цилиндр можно считать за призму, у которой в основании не многоугольник, а круг; следовательно, объем цилиндра определяется точно так же, как и объем призмы; т.е. объем = произведению площади основания на высоту.

$$V = S \cdot h$$

Объем конуса.

Конус можно считать за правильную пирамиду, у которой в основании круг, а не многоугольник; поэтому объем конуса определяется так же, как и объем пирамиды; т.е. объем = одной трети произведения площади основания на высоту.

$$V = \frac{1}{3} S \cdot h$$

Объем усеченного конуса, высота которой равна h, а площади оснований равны S и S_1, вычисляется по формуле

$$V = \frac{1}{3} h(S + S_1 + \sqrt{S \cdot S_1}).$$

Объем шара.

Поверхность шара можно считать состоящей из чрезвычайно большого количества весьма малых плоских фигур, напр. треугольников; если мысленно соединим вершины этих треугольников с центром шара, то получим множество пирамид, которые все вместе и составляют объем шара; все эти пирам. имеют одну высоту, именно радиус шара, а основания их составляют поверхность шара. Но чтобы найти объем пирамиды, должно площадь её основания умножить на 1/3 высоты; следовательно, мы найдем сумму объемов всех пирамид, или объем шара, если умножим сумму всех оснований или поверхность шара, на треть радиуса. Итак, объем шара = поверхности шара, умноженной на треть радиуса.

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3$$

Контрольные вопросы

1. Понятие объема и его свойства.
2. Интегральная формула объема.
3. Формулы объема куба, прямоугольного параллелепипеда, призмы, цилиндра.
4. Формулы объема пирамиды и конуса.
5. Формулы площади поверхностей цилиндра и конуса.
6. Формулы объема шара и площади сферы.

Подобие тел (дополнительный материал)

Два тела подобны, если одно из них может быть получено из другого путём увеличения (или уменьшения) всех его линейных размеров в одном и том же отношении. Автомобиль и его модель – подобные тела. Два тела (фигуры) зеркально подобны, если одно из них подобно зеркальному отражению другого. Например, картина и её фотонегатив зеркально подобны друг другу.

В подобных и зеркально подобных фигурах все соответственные углы (линейные и двугранные) равны.

В подобных телах многогранные и телесные углы равны; в зеркально подобных телах они зеркально равны.

Если два тетраэдра (две треугольные пирамиды) имеют соответственно пропорциональные рёбра (или соответственно подобные грани), то они подобны или зеркально подобны. Например, если грани первой пирамиды вдвое больше, чем у второй, то высоты, апофемы, радиус описанного круга первой пирамиды также вдвое больше, чем у второй. Эта теорема не имеет места для многогранников с большим числом граней. Предположим, что мы соединили все рёбра куба в его вершинах посредством шарниров; тогда мы можем изменить форму этой фигуры, не растягивая её стержни, и получить из начального куба параллелепипед.

Две правильные призмы или пирамиды с одинаковым числом граней подобны, если радиусы их оснований пропорциональны их высотам. Два круглых цилиндра или конуса подобны, если радиусы их оснований пропорциональны их высотам.

Если два и более тел подобны, то площади всех соответствующих плоских и кривых поверхностей этих тел пропорциональны квадратам любых соответствующих отрезков.

Если два и более тел подобны, то их объёмы, а также объёмы любых их соответствующих частей, пропорциональны кубам любых соответствующих отрезков.

П р и м е р. Чашка диаметром 8 см и высотой 10 см вмещает 0.5 литра воды. Каких размеров должна быть подобная чашка, вмещающая 4 литра воды?

Р е ш е н и е. Поскольку чашки – подобные цилиндры, то отношение их объёмов равно отношению кубов соответствующих отрезков (в нашем случае – высот и диаметров чашек). Следовательно, высота h новой чашки находится из отношения:

$(h/10)^3 = 4/0.5$, то есть $h^3 = 8 \cdot 10^3$, откуда $h = 20$ см;

аналогично, для диаметра d получим:

$(d/8)^3 = 4/0.5$, то есть $d^3 = 8 \cdot 8^3$, откуда $d = 16$ см .

Тема 14. Элементы теории вероятностей и математической статистики (продолжение)

Тема 14.1. Дискретные случайные величины

Понятие дискретной случайной величины. Закон распределения дискретной случайной величины. Вероятность дискретной случайной величины. Характеристики дискретной случайной величины

Уметь: находить вероятность дискретной случайной величины по формуле Бернули, находить ее характеристики.
Знать: определение дискретной случайной величины,закон ее распределения и характеристики

Закон распределения случайной величины

Случайной величиной (с.в) X называется величина, которая в результате опыта может принимать то или иное значение, причем заранее известно какое именно.
Случайные величины можно разделить на две категории: дискретные и непрерывные.

Дискретной случайной величиной (д.с.в.) называется такая величина, которая в результате опыта может принимать определенные значения с определенной вероятностью, образующие счетное множество (множество, элементы которого могут быть занумерованы).

Рядом распределения д.с.в. X называется таблица соответствия значений случайной величины и их вероятностей.

x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_n
p_i	p_1	p_2	$\dots$	p_n

Здесь $p_i = P(X = x_i);\ \sum_{i=1}^{n} p_1 = 1$.

Биноминальный закон распределения Случайная величина X имеет *биномиальное распределение,* если она означает количество появлений события A в n независимых опытах. Вероятность каждого значения этой случайной величины можно найти по формуле Бернулли.

$$P(X = k) = P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \qquad k = 0,1,2,...$$

Числовые характеристики дискретных случайных величин

Математическое ожидание д.с.в.

При решении многих задач бывает достаточным знание нескольких числовых характеристик случайной величины. Одной из таких важнейших числовых характеристик является *математическое ожидание*, которое приближённо равно среднему значению случайной величины, вокруг которого группируются все её остальные значения. Так, например, при изучении распределения некоторого экономического показателя работы данного СМУ прежде всего интересуются его средним значением.

Математическим ожиданием дискретной случайной величины называется сумма произведений всех возможных значений случайной величины на их вероятности:

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i .$$

Дисперсия и среднее квадратическое отклонение

На практике часто требуется оценить рассеяние возможных значений случайной величины вокруг её среднего значения. Например, в артиллерии важно знать, насколько кучно лягут снаряды вблизи цели, которая должна быть поражена.

Дисперсией (рассеиванием) дискретной случайной величины называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания.

$$D(X) = M\left[X - M(X)\right]^2 .$$

Для вычисления дисперсии часто бывает удобно пользоваться следующей теоремой:

Теорема. Дисперсия равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины X и квадратом ее математического ожидания:

$$D(X) = M(X^2) - \left[M(X)\right]^2 .$$

Средним квадратическим отклонением случайной величины X называется квадратный корень из дисперсии:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} .$$

Тема 14.2. Основные понятия математической статистики

Определение математической статистики. Понятие генеральной совокупности. Вариационный ряд. Функции распределения. Представление данных (таблицы, диаграммы, графики, полигон, гистограмма)

Уметь: представлять данные статистического распределения
Знать: основные понятия математической статистики

Математическая статистика – раздел математики, в котором изучаются методы сбора, систематизации и обработки результатов наблюдений массовых случайных явлений для выявления существующих закономерностей.

Предметом математической статистики является изучение случайных величин (или случайных событий, процессов) по результатам наблюдений.

Генеральной совокупностью называется – совокупность всех подлежащих изучению объектов или возможных результатов всех мыслимых наблюдений, производимых в неизменных условиях над одним объектом. Зачастую проводить сплошное обследование, когда изучаются все объекты, трудно или дорого, а иногда и невозможно. В этих случаях наилучшим способом обследования является выборочное наблюдение: выбирают из генеральной совокупности часть ее объектов («выборку») и подвергают ее изучению.

Выборочной совокупностью (выборкой) называют совокупность объектов, отобранных случайным образом из генеральной совокупности. Более строго: выборка – это последовательность X_1, X_2, … X_n независимых одинаково распределенных случайных величин, распределение каждой из которых совпадает с распределением генеральной случайной величины.

Число объектов (наблюдений) в совокупности, генеральной или выборочной, называется ее *объемом*; обозначается соответственно через N и n. Конкретные значения выборки, полученные в результате наблюдений (испытаний), называют *реализацией выборки* и обозначают строчными буквами x_1, x_2 …x_n.

Метод статистического исследования, состоящий в том, что на основе изучения выборочной совокупности делается заключение о всей генеральной совокупности, называется *выборочным.*

Различают выборки с возвращением (повторные) и без возвращения (бесповторные). В первом случае отобранный объект возвращается в генеральную совокупность перед извлечением следующего; во втором – не возвращается. На практике чаще используется бесповторная выборка.

Статистическое распределение выборки

Пусть изучается некоторая случайная величина X. С этой целью над случайной величиной X производится ряд независимых опытов (наблюдений). В каждом из этих опытов величина X принимает то или иное значение. Пусть она приняла n_1 раз значение x_1, n_2 раз – значение x_2, …,n_k раз – значение $x_к$. При этом $n_1 + n_2 +…+ n_k = n$– объем выборки.

Значения x_1, x_2 …$x_к$ называются *вариантами* случайной величины X.

Вся совокупность значений случайной величины X представляет собой первичный статистический материал, который подлежит дальнейшей обработке, прежде всего – упорядочению.

Операция расположения значений случайной величины (признака) по неубыванию называется *ранжированием* статистических данных.

Полученная таким образом последовательность x_1, x_2 …x_n значений случайной величины X (где $x_1 \le n_2 \le ... \le x_n$) называется *вариационным рядом.*

Числа n_i, показывающие, сколько раз встречаются варианты x_i в ряде наблюдений, называются *частотами*, а отношение их к объему выборки – *относительными частотами* (w_i), т.е. $w_i = \frac{n_i}{n}$, где $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$.

Статистическим распределением выборки или *статистическим рядом* называют перечень вариант x_i вариационного ряда и соответствующих им частот n_i или относительных частот w_i.

Записывается статистическое распределение в виде таблицы. Первая строка содержит варианты, а вторая – их частоты n_i (или относительные частоты).

Эмпирическая функция распределения

Одним из способов обработки вариационного ряда является построение эмпирической функции распределения.

Эмпирической (статистической) *функцией распределения* называется функция $F^*(x)$, определяющая для каждого значения x относительную частоту события $\{X < x\}$: $F_n{}^*(x) = p^*\{X < x\}$.

Для нахождения значений эмпирической функции удобно пользоваться формулой

$$F_n{}^*(x) = \frac{n_x}{n},$$

где n – объем выборки, n_x – число наблюдений, меньших x ($X \in R$).

Эмпирическая функция обладает следующими свойствами:

1. Значения эмпирической функции принадлежит отрезку [0,1].
2. $F^*(x)$ – неубывающая функция.
3. Если x_i – наименьшая варианта, а x_k - наибольшая, то $F^*(x_i) = 0$ при $x \le x_i$ и $F^*(x_k) = 1$ при $x > x_k$.

Полигон и гистограмма

Статистическое распределение изображается графически (для наглядности) в виде так называемых *полигона* и *гистограммы.*

Дискретное распределение признака X

Полигон, как правило, служит для изображения дискретного (т.е. варианты отличаются на постоянную величину) статистического ряда. *Полигоном частот* называют ломаную, отрезки которой соединяют точки с координатами (x_1,n_1), (x_2,n_2), …, (x_k,n_k);

Полигоном относительных частот называют ломаную, отрезки которой соединяют точки с координатами (x_1,w_1), (x_2,w_2), …, (w_k,p_k), где x_i - варианты выборки;

Варианты x_i откладываются на оси абсцисс, а частоты и, соответственно, относительные частоты – на оси ординат. Полигон относительных частот является статистическим аналогом многоугольника распределения.

Непрерывное распределение признака X

Для непрерывно распределенного признака (т.е. варианты могут отличаться один от другого на сколь угодно малую величину) можно построить полигон частот, взяв середины интервалов в качестве значений x_1, $x_2, \ldots, x_k$. Более употребительна так называемая гистограмма.

Гистограммой частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длины h, а высоты равны отношению $\frac{n_i}{h}$ – плотность частоты.

Площадь частичного i-го прямоугольника равна $h\frac{n_i}{h} = n_i$ – сумме частот вариант, попавший в i-й интервал.

Очевидно, площадь гистограммы частот равна сумме всех частот, т.е. объему выборки.

Гистограмма относительных частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длины h, а высоты равны отношению $\frac{w_i}{h}$ – плотности относительных частот.

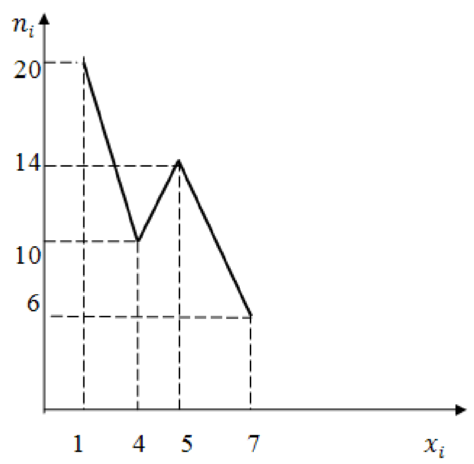
Площадь частичного i-го прямоугольника равна $h\frac{w_i}{h} = n_i$ – сумме частот вариант, попавший в i-й интервал.

Очевидно, площадь гистограммы относительных частот равна сумме всех относительных частот, т.е. единице.

Задание№1. Построить полигон частот по данному распределению выборки:
Решение.

x_i	1	4	5	7
n_i	20	10	14	6

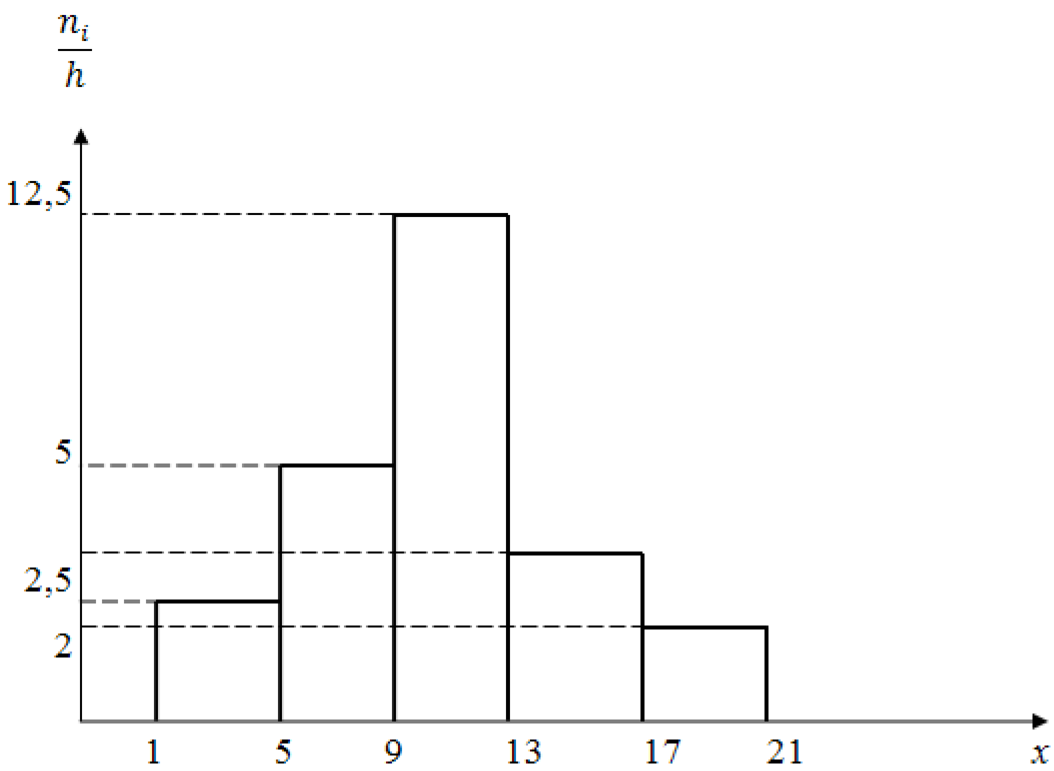
Отметим на оси абсцисс варианты x_i, а на оси ординат – соответствующие им частоты n_i, соединив точки (x_i, n_i) отрезками прямых, получим искомый полигон частот.



Задание №2. Построить гистограмму частот по данному распределению выборки объема n=100:

Номер интервала	Частичный интервал	Сумма частот вариант интервала	Плотность частоты
i	$x_i - x_{i+1}$	n_i	$\frac{n_i}{h}$
1	1-5	10	2,5
2	5-9	20	5
3	9-13	50	12,5
4	13-17	12	3
5	17-21	8	2

Решение. Построим на оси абсцисс заданные интервалы длины h=4. Проведем над этими интервалами отрезки, параллельные оси абсцисс и находящиеся от нее на расстояниях, равных соответствующим плотностям частот. Например, над интервалом (1,5) построим



Отрезок, параллельный оси абсцисс, на расстоянии

$$\frac{n_i}{h} = \frac{10}{4} = 2{,}5,$$

Гистограмма частот изображена на рис.

Контрольные вопросы

1. Представление данных, генеральная совокупность, выборка, среднее арифметическое, медиана.

Уравнения и неравенства (дополнительный материал)

Равносильные уравнения и неравенства.

Равносильные уравнения.

Уравнения, имеющие одно и тоже множество корней, называются равносильными.

Например, уравнения $4x$-3=$2x$+3 и $2x$=6 равносильны, так как каждое из них имеет только один корень x=3. Уравнения (x-2)(x+5)=0 и $x^2+3x-10=0$ также равносильны, так как они имеют одни и те же корни $x_1=2, x_2=-5$. Уравнения $2x$=4 и $3x^2=12$ не равносильны, так как первое имеет корень x=2, а второе – корни $x_1=2, x_2=-2$. Из определения равносильности уравнений следует, что два уравнения равносильны, если каждый корень первого уравнения является корнем второго уравнения и, наоборот, каждый корень второго уравнения является корнем первого уравнения. *Уравнения, не имеющие корней, также считают равносильными.*

Из курса 7 класса вы знаете, что можно сделать следующие преобразования уравнений:

Любой член уравнения можно переносить из одной части в другую, изменив его знак на противоположный.

Обе части уравнения можно умножить или разделить на одно и то же число, не равное нулю.

При этих преобразованиях исходное уравнение заменяется на равносильное ему уравнение. Заметим, что если некоторое выражение в левой части или правой части уравнения заменить тождественно равным ему выражением, то получится уравнение, равносильное исходному. Однако не при любом преобразовании уравнение заменяется на равносильное.

Например, при возведении в квадрат обеих частей уравнения $\sqrt{x}=x-2$ получается уравнение $x=(x-2)^2$, не равносильное исходному: первое уравнение имеет только один корень x=4, а второе – два корня $x_1=4, x_2=1$. В этом случае второе уравнение называют следствием первого уравнения.

Если при переходе от одного уравнения к другому потери корней не происходит, то второе уравнение называют следствием первого уравнения. Иначе, если все корни первого уравнения являются корнями второго уравнения, то второе уравнение называется следствием первого уравнения.

Из этого определения и определения равносильности уравнений следует, что:

1. если два уравнения равносильны, то каждое из них является следствием другого;
2. если каждое из двух уравнений является следствием другого, то эти уравнения равносильны.

При решении уравнений главное – не потерять корни, а наличие посторонних корней можно установить проверкой. Поэтому важно следить за тем, чтобы при преобразовании уравнения каждое следующее уравнение было следствием предыдущего.

Пример: Решить уравнение $\frac{2x}{x-2}-\frac{x+1}{x-1}=\frac{4}{(x-1)(x-2)}$.

Умножив обе части уравнения на общий знаменатель всех трех дробей, т.е. на $(x-1)(x-2)$, получаем $2x(x-1)-(x+1)(x-2)=4$,откуда $x^2-x-2=0, x_1=2, x_2=-1$.

Проверка.

1) При x=2 знаменатели двух дробей уравнения равны нулю. Поэтому x=2 не является корнем данного уравнения.

2) При x=-1 левая часть уравнения равна $\frac{2}{3}$, правая часть равна $\frac{2}{3}$.

Ответ: x=-1.

Заметим, что для проверки корня x=-1 достаточно увидеть, что знаменатели дробей уравнения при x= -1 не равны нулю (если, конечно, при решении уравнения не допущены ошибки). При решении задачи из уравнения $\frac{2x}{x-2}-\frac{x+1}{x-1}=\frac{4}{(x-1)(x-2)}$ получено уравнение $2x(x-1)-(x+1)(x-2)=4$, которое является следствием уравнения $\frac{2x}{x-2}-\frac{x+1}{x-1}=\frac{4}{(x-1)(x-2)}$. Корень $x_1=2$ уравнения $2x(x-1)-(x+1)(x-2)=4$ не является корнем уравнения $\frac{2x}{x-2}-\frac{x+1}{x-1}=\frac{4}{(x-1)(x-2)}$. Его называют *посторонним корнем.*

Посторонние корни могут получиться при умножении обеих частей уравнения на выражение, содержащее неизвестное.

Потеря корней может произойти при делении обеих частей уравнения на выражение, содержащее неизвестное.

Итак, при решении уравнения можно делать только такие преобразования, при которых не происходит потери корней. Если при этом получаются уравнения - следствия данного, то необходима проверка найденных корней.

Равносильные неравенства.

Равносильность неравенств с неизвестным определяется аналогично. Неравенства, имеющие одно и то же множество решений, называют *равносильными.*

Пример: Решить неравенство $\frac{5x-3}{x^2+1}>1$.

Так как $x^2+1>0$ при всех действительных значениях *x*, то, умножив неравенство на x^2+1, получаем неравенство $5x-3>x^2+1$, равносильное данному. Решая это неравенство, поучаем $x^2-5x+4<0, (x-1)(x-4)<0$, откуда $1<x<4$.

Решение систем двух линейных уравнений с двумя переменными.

Решение систем уравнений с помощью формулы Крамера.
Определитель второго порядка. Формула Крамера.

Уравнение с двумя переменными x и y записываются в виде $f(x,y)=0$, где f – выражение с переменными x и y. Решением такого уравнения называется упорядоченная пара чисел (x_0, y_0), при подстановке которых в данное уравнение получается верное числовое равенство $f(x_0, y_0)=0$.

Система уравнений с двумя переменными x и y в общем виде записывается так:

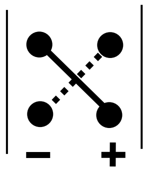
$$\begin{cases} f(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{cases}$$

Решением системы уравнений называется упорядоченная пара чисел, являющаяся решением каждого из уравнений, входящих в систему. Две системы уравнений называются равносильными, если множества решений этих систем совпадают.

Определитель второго порядка равен произведению элементов, расположенных на главной диагонали минус произведение элементов, расположенных на дополнительной диагонали. Для обозначения определителя используются вертикальные черточки и прописная буква Δ. Т.е.

$$\Delta=\det(A)=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1,$$

или, схематически



"+" прямое произведение (главная диагональ)

"–" косое произведение (дополнительная диагональ)

Система двух линейных уравнений с двумя переменными $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ при условии, что определитель системы отличный от нуля, имеет единственное решение, которое находится по формулам $x = \dfrac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \dfrac{\Delta x}{\Delta}$; $y = \dfrac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \dfrac{\Delta y}{\Delta}$ эти равенства называются формулами Крамера.

Если же определитель равен нулю, то система является, либо несовместной (когда $\Delta x \neq 0, \Delta y \neq 0$), либо неопределенной (когда $\Delta x = \Delta y = 0$). В последнем случае система сводится к одному уравнению, а другое является следствием этого уравнения.

Решение систем трех линейных уравнений с тремя переменными.

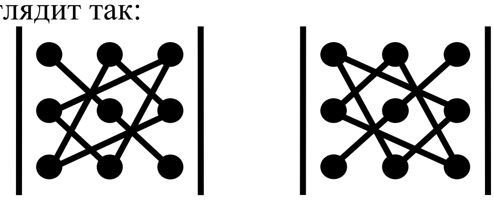
Решение систем уравнений с помощью формулы Крамера.
Определитель третьего порядка. Формула Крамера.

Пусть дана квадратная матрица третьего порядка $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

Определитель третьего порядка равен произведению элементов, расположенных на главной диагонали плюс два произведения элементов, отвечающих треугольникам с основаниями, параллельными главной диагонали; минус произведение элементов, расположенных на дополнительной диагонали и минус два произведения элементов, отвечающих треугольникам с основаниями, параллельными дополнительной диагонали.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Геометрически это выглядит так:



"+" "–"

Системы линейных уравнений.

Система линейных уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь a_{ij} – коэффициенты при неизвестных, b_i – свободные члены, а x_j – неизвестные. Если все свободные члены равны нулю, то система называется *однородной*, если же, хотя бы одно из них отлично от нуля, то *неоднородной*.

Используя понятие произведения матриц, можно переписать систему (1) в виде: $AX = B$, где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$ – матрица, состоящая из коэффициентов при неизвестных системы (1), которая называется *матрицей системы*,

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ – вектор-столбцы, составленные соответственно из неизвестных x_j и из свободных членов b_i.

Упорядоченная совокупность n вещественных чисел (c_1, c_2,..., c_n) называется *решением системы* (1), если в результате подстановки этих чисел вместо соответствующих переменных x_1, x_2,..., x_n каждое уравнение системы обратится в арифметическое тождество; другими словами, если существует вектор $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ такой, что $AC \equiv B$.

Матрица $A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$, образованная путем приписывания справа к матрице A столбца свободных членов, называется *расширенной матрицей системы.*

Система (1), имеющая хотя бы одно решение, называется *совместной*, имеющая только одно решение *определенной*, имеющая более одного решения – *неопределенной*, не имеющая ни одного решения – *несовместной*.

Решить систему (1) – это значит указать все множество ее решений или доказать ее несовместность.

Если над системой (1) выполнить какие-либо из следующих преобразований:

1) поменять местами уравнения;
2) умножить обе части любого уравнения системы на любое не равное нулю число;
3) прибавить к обеим частям одного из уравнений системы соответствующие части другого уравнения, умноженные на любое действительное число,

то система (1) переходит в равносильную ей систему. Перечисленные выше преобразования называются *элементарными преобразованиями системы*. В результате элементарных преобразований может случиться, что в системе появится уравнение, все коэффициенты которого равны нулю. Тогда, если и свободный член этого уравнения равен нулю, то уравнение справедливо при любых x_1, x_2, ..., x_n и, следовательно, его можно отбросить. Если же свободный член не равен нулю, то это уравнение не удовлетворяется никакими значениями неизвестных, следовательно, полученная система является несовместной. Тогда несовместна и исходная система.

Теорема Кронекера-Капелли. (*Леопольд Кронекер* (1823-1891) *немецкий математик*) Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранги матриц A и A^* совпадают.

Рассмотрим системы линейных уравнений, в которых число уравнений равно числу неизвестных

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}. \qquad (2)$$

Такие системы решаются одним из следующих способов:

1) *методом Крамера*;

2) *методом Гаусса*, или *методом исключения неизвестных*;

3) *матричным методом*.

Метод Крамера.

(*Габриель Крамер* (1704 – 1752) *швейцарский математик*)

Данный метод применим только в случае, если система имеет вид (4). Кроме этого, необходимо, чтобы определитель матрицы системы не равнялся 0.

$$\det A \neq 0;$$

Теорема. Если определитель матрицы системы (4) отличен от нуля, то эта система имеет единственное решение, которое находится по формулам Крамера:

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta},$$

где $\Delta = \det A$, а Δ_j – определитель матрицы, получаемой из матрицы системы заменой столбца j столбцом свободных членов b_j

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Так, например, для системы из трех уравнений $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix};$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \qquad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Рациональные и иррациональные уравнения.

Основные приемы их решения (разложение на множители, введение новых неизвестных, подстановка, графический метод). Изображение на координатной плоскости множества решений уравнений и неравенств с двумя переменными и их систем.

Функция вида $P(x) = a_0 x_n + a_1 x_n - 1 + a_2 x_n - 2 + ... + a_n - x + a_n$,
где n — натуральное, $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ — некоторые действительные числа, называется целой рациональной функцией.

Уравнение вида $P(x) = 0$, где $P(x)$ — целая рациональная функция, называется целым рациональным уравнением.

Уравнение вида $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} + ... + \frac{P_m(x)}{Q_m(x)} = 0$,

где $P_1(x), P_2(x), \ldots, P_m(x), Q_1(x), Q_2(x), \ldots, Q_m(x)$ — целые рациональные функции, называется рациональным уравнением.

Решение рационального уравнения $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$, *где* $P(x)$ *и* $Q(x)$ — *многочлены*($Q(x) \neq 0$), *сводится к решению уравнения* $P(x) = 0$ *и проверке того, что корни удовлетворяют условию* $Q(x) \neq 0$.

Основные методы решения рациональных уравнений.

1) Простейшие: решаются путём обычных упрощений — приведение к общему знаменателю, приведение подобных членов и так далее. Квадратные уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ решаются по выведенной нами формуле $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Также используется теорема Виета: $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$, $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.

2) Группировка: путём группировки слагаемых, применения формул сокращённого умножения привести (если удастся) уравнение к виду, когда слева записано произведение нескольких сомножителей, а справа — ноль. Затем приравниваем к нулю каждый из сомножителей.

3) Подстановка: ищем в уравнении некоторое повторяющееся выражение, которое обозначим новой переменной, тем самым упрощая вид уравнения. В некоторых случаях очевидно что удобно обозначить. Например, уравнение

$\frac{x^2 + x - 5}{x} + \frac{3x}{(x^2 + x - 5)} + 4 = 0$, легко решается с помощью подстановки $\frac{x^2 + x - 5}{x} = t$, ,

получаем $t + \frac{3}{t} + 4 = 0$

Или: $21 / (x^2 - 4x + 10) - x^2 + 4x = 6$. Здесь можно сделать подстановку $x^2 - 4 = t$. Тогда $21 / (t + 10) - t = 6$ и т.д.

В более сложных случаях подстановка видна лишь после нескольких преобразований. Например, дано уравнение

$(x^2 + 2x)^2 - (x + 1)^2 = 55$.

Переписав его иначе, а именно $(x^2 + 2x)^2 - (x^2 + 2x + 1) = 55$, сразу увидим подстановку $x^2 + 2x = t$.

Имеем $t^2 - t - 56 = 0$, $t_1 = -7$, $t_2 = 8$. Осталось решить $x^2 + 2x = -7$ и $x^2 + 2x = 8$.

В ряде других случаев удобную подстановку желательно знать “заранее”. Например

1) Уравнение $(x + a)^4 + (x + b)^4 = c$ сводится к биквадратному, если сделать подстановку

$x = t - (a + b) / 2$.

2) Симметрическое уравнение (возвратное) $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0$ (коэффициенты членов, равностоящих от концов, равны) решается с помощью подстановки $x + 1/x = t$, если n —чётное; если n — нечётное, то уравнение имеет корень $x = -1$.

3) Уравнение вида $(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) = 1$ сводится к квадратному, если $a + b = c + d$ и т.д.

4) Подбор: при решении уравнений высших степеней рациональные корни уравнения $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0$ ищем в виде p/q, где p — делитель a_0, q — делитель a_n, p и q взаимно просты, $p \in Z$, $q \in N$.

5) "Искусство", т.е. решать пример нестандартно, придумать "свой метод", догадаться что-то прибавить и отнять, выделить полный квадрат, на что-то разделить и умножить и т.д.

6) Уравнения с модулем: при решении уравнений с модулем используется определение модуля и метод интервалов. Напомним, что $|f(x)| = \begin{cases} f(x), если f(x) \ge 0, \\ -f(x), если f(x) < 0. \end{cases}$

Рациональные неравенства.

Пусть $f(x)$ — числовая функция одного или нескольких переменных (аргументов). Решить неравенство

$$f(x) < 0 \qquad (f(x) > 0) \qquad (1)$$

— это значит найти все значения аргумента (аргументов) функции f, при которых неравенство (1) справедливо. Множество всех значении аргумента (аргументов) функции f, при которых неравенство (1) справедливо, называется множеством решении неравенства или просто решением неравенства.

Множество решений нестрого неравенства

$$f(x) \le 0 \qquad (f(x) \ge 0) \qquad (2)$$

представляет собой объединение множества решений неравенства (1) и множества решений уравнения $f(x) = 0$.

Два неравенства считаются эквивалентными, если множества их решений совпадают.

Под множеством допустимых значений неизвестных, входящих в неравенство, понимают область определения функции $f(x)$.

Неравенства вида (1) или (2), составленные для различных функции $f_i(x)$, могут быть сведены в систему неравенств. Решить систему неравенств — это значит найти множество всех значении аргументов функции $f_i(x)$, при которых справедливы все неравенства системы одновременно.

Говорят, что системы неравенств эквивалентны, если множества их решений совпадают.

Свойства равносильных неравенств.

При решении неравенств используют свойства равносильности. Неравенства с одной переменной называются равносильными, если множества их решении совпадают.

Например, неравенства $3x > 6$ и $x - 2 > 0$ имеют одинаковые множества решении $x \in [2; +\infty]$. Эти неравенства – равносильные.

Неравенства $x > 0$ и $x^2 > 0$ – неравносильные, так как решение первого неравенства есть множество $x \in [0; +\infty]$, а решение второго неравенства есть множество $x \in [-\infty; 0] \cup [0; +\infty]$. Эти множества не совпадают.

При решении неравенств выполняются только такие преобразования, при которых получаются более простые равносильные неравенства. Эти преобразования возможны при выполнении следующих свойств равносильных неравенств:

Свойство 1. Если к обеим частям неравенства прибавить одно и то же число или одно и то же выражение, которое имеет смысл при всех значениях переменной, то получим неравенство, равносильное данному.

Дано. $P(x) > Q(x)$ – неравенство, $T(x)$ – выражение, которое имеет смысл при всех действительных значениях x, $x \in R$.

Доказать. Неравенства $P(x) > Q(x)$ и $P(x) + T(x) > Q(x) + T(x)$ – равносильные.

Доказательство. а) Пусть при $x = a$ неравенство $P(a) > Q(a)$ – верное числовое равенство, т.е. $x = a$ – одно из решении неравенства $P(x) > Q(x)$, $T(a)$ – значение $T(x)$ при $x = a$.

По свойству числовых неравенств $P(a) + T(a) > Q(a) + T(a)$ – верное числовое неравенство.

Следовательно, $x = a$ – одно из решений неравенства $P(x) + T(x) > Q(x) + T(x)$. Поэтому, если $x = a$ есть решение первого неравенства, то это значение есть также решение второго неравенства.

б) Пусть $x = b$ – одно из решений неравенства $P(x) + T(x) > Q(x) + T(x)$, т.е. $P(b) + T(b) > Q(b) + T(b)$ –верное числовое неравенство. По свойству числовых неравенств $P(b) > Q(b)$ – тоже верное числовое неравенство. Следовательно, $x = b$ – решение неравенства $P(x) > Q(x)$.

Так как множества решений неравенства $P(x) > Q(x)$ и $P(x) + T(x) > \quad > Q(x) + T(x)$ совпадают, то эти неравенства равносильные.

Свойство 2. Если в неравенстве любое слагаемое, которое имеет смысл при вех $x \in R$, перенести из одно части в другую с противоположным знаком, то получим неравенство, равносильно данному.

Дано. $P(x) + T(x) > Q(x)$ – неравенство, $T(x)$ – слагаемое, которое имеет смысл при всех $x \in R$.

Доказать. Неравенства $P(x) + T(x) > Q(x)$ и $P(x) > Q(x) – T(x)$ – равносильные.

Доказательство. По свойству 1 можно к обеим частям неравенства $P(x) + T(x) > Q(x)$ прибавить слагаемое $(-T(x))$, так как это слагаемое имеет смысл при всех $x \in R$; получим равносильное неравенство:

$P(x) + T(x) – T(x) > Q(x) – T(x)$, отсюда $P(x) > Q(x) – T(x)$.

Свойство 3. Если обе части неравенства умножить на одно и то же положительное число или на одно и то же выражение, положительное при всех значениях переменной, то получим неравенство, равносильное данному.

Дано. $P(x) > Q(x)$ – неравенство (1),

$T(x) > 0$, $x \in R$,

$P(x)\cdot T(x) > Q(x)\cdot T(x)$ – неравенство (2).

Доказать. Неравенства (1) и (2) равносильные.

Доказательство. Пусть при $x = a$ $P(a) > Q(a)$ – верное числовое неравенство, т.е. $x = a$ – одно из решении первого неравенства. $T(a)$ – значение $T(x)$ при $x = a$ $T(a) > 0$.

По свойству числовых неравенств $P(a)\cdot T(a) > Q(a)\cdot T(a)$ – тоже верное числовое неравенство, т.е. $x = a$ –одно из решении первого неравенства. Следовательно, если $x = a$ – решение первого неравенства, то $x = a$ – также решение второго неравенства.

Пусть при $x = b$ неравенство $P(b)\cdot T(b) > Q(b)\cdot T(b)$ – верное числовое неравенство, т.е. $x = b$ – одно из решении второго неравенства.

По свойству числовых неравенств $P(b) > Q(b)$ – тоже верное числовое неравенство, так как $T(b) > 0$. Следовательно, $x = b$ – одно из решении первого неравенства.

Поскольку множества решении первого и второго неравенств совпадают, то они равносильные.

Свойство 4. Если обе части неравенства умножить на одно и то же отрицательное число или на одно и то же выражение, отрицательное при всех значениях переменной, и изменить знак неравенства на противоположный, то получим неравенство, равносильное данному.

Это свойство доказывается аналогично 3 свойству.

Алгебраические неравенства.

Линейными (строгими и нестрогими) называются неравенства вида

$ax + b > 0$, $ax + b < 0$, $ax + b \geq 0$, $ax + b \leq 0$, $a \neq 0$,

решениями которых будут:

при $a > 0$

$x\in(-\frac{b}{a};\infty)$, $x\in(-\infty;-\frac{b}{a})$, $x\in[-\frac{b}{a};\infty)$, $x\in(-\infty;-\frac{b}{a}]$,

при $a < 0$

$x\in(-\infty;-\frac{b}{a})$, $x\in(-\frac{b}{a};\infty)$, $x\in(-\infty;-\frac{b}{a}]$, $x\in[-\frac{b}{a};\infty)$.

Квадратными (строгими и нестрогими) называются неравенства вида

$ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c < 0$,

$ax^2 + bx + c \ge 0$, $ax^2 + bx + c \le 0$,

где a, b, c — некоторые действительные числа и $a \ne 0$.

Квадратное неравенство $ax^2 + bx + c > 0$ в зависимости от значении своих коэффициентов a, b и c имеет решения:

при $a > 0$ и $D = b^2 - 4ac \ge 0$

$x\in(-\infty;$ **Ошибка! Закладка не определена.**$\frac{-b-\sqrt{D}}{2a})\cup(\frac{-b+\sqrt{D}}{2a};\infty)$;

при $a > 0$ и $D < 0$ x — любое действительное число;

при $a < 0$ и $D \ge 0$

$x\in(\frac{-b+\sqrt{D}}{2a};\frac{-b-\sqrt{D}}{2a})$;

при $a < 0$ и $D < 0$

$x = \varnothing$ (т. е. решений нет).

Решение неравенства $ax^2 + bx + c < 0$ сводится к решению рассмотренного неравенства, если обе части неравенства умножить на (-1).

Метод интервалов.

Пусть $P_n(x)$ — многочлен n-й степени с действительными коэффициентами, а $c_1, c_2, \dots, c_i$ — все действительные корни многочлена с кратностями $k_1, k_2, \dots, k_i$ соответственно, причем $c_1 > c_2 > \dots > c_i$. Многочлен $P_n(x)$ можно представить в виде

$$P_n(x) = (x - c_1)^{k1}(x - c_2)^{k2} \dots (x - c_i)^{ki} Q_m(x), \qquad (3)$$

где многочлен $Q_m(x)$ действительных корней не имеет и либо положителен, либо отрицателен при всех $x\in R$. Положим для определенности, что $Q_m(x) > 0$. Тогда при $x > c_1$ все сомножители в разложении (3) положительны и $P_n(x) > 0$. Если c_1 — корень нечетной кратности (k_1 — нечетное), то при $x\in(c_2; c_1)$ все сомножители в разложении (3), за исключением первого, положительны и $P_n(x)<0$. В этом случае говорят, что многочлен $P_n(x)$ меняет знак при переходе через корень c_1. Если же c_1 — корень четной кратности (k_1 — четное), то все сомножители (в том числе и первый) при $x\in(c_2; c_1)$ положительны и, следовательно, $P_n(x) > 0$ при $x\in(c_2; c_1)$. В этом случае говорят, что многочлен $P_n(x)$ не меняет знак при переходе через корень c_1.

Аналогичным способом, используя разложение (3), нетрудно убедится, что при переходе через корень c_2 многочлен $P_n(x)$ меняет знак, если k_2 — нечетное, и не меняет знака, если k_2 — четное. Рассмотренное свойство многочленов используется для решения неравенств методом интервалов. Для того чтобы найти все решения

$$P_n(x) > 0, \qquad (4)$$

достаточно знать все действительные корни многочлена $P_n(x)$ их кратности и знак многочлена $P_n(x)$ в произвольно выбранной точке, не совпадающей с корнем многочлена.

Неравенства с параметрами.

Неравенства с параметрами являются наиболее трудными задачами курса элементарной математики. Это объясняется тем, что их решения следует получать при всех допустимых значениях входящих в них параметров.

Системы рациональных неравенств.

Пусть надо найти числовые значения *x*, при которых превращаются в верные числовые неравенства одновременно несколько рациональных неравенств. В таких случаях говорят, что надо решить систему рациональных неравенств с одним неизвестным x.

Чтобы решить систему рациональных неравенств, надо найти все решения каждого неравенства системы. Тогда общая часть всех найденных решений и будет решением системы.

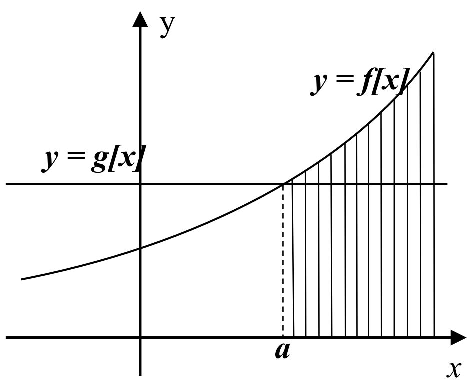
Графическое решение неравенств.

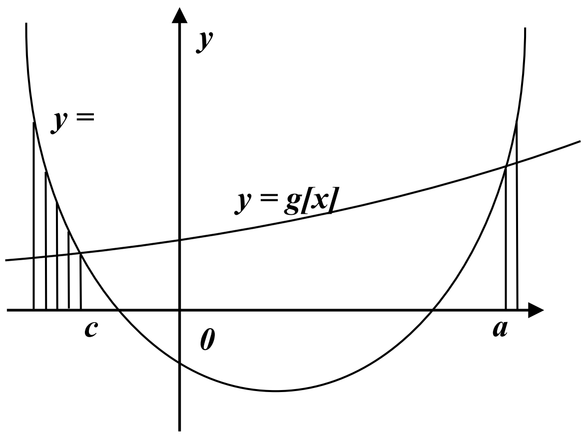
Неравенства с одной или двумя переменными можно решать графически.

Неравенство с одной переменой можно записать так: f(x) > g(x), где f(x) и g(x) – выражения, содержащие переменную.

Построим в одной системе координат графики функций y = f(x) и y = g(x).

Решение неравенства есть множество значений переменой *x*, при которых график функций y=g(x), так как f(x)>g(x).Это показано на рисунках 1 и 2.





Решение неравенства с двумя переменными f(x,y)>0 есть множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют этому неравенству.

Иррациональные уравнения.

Уравнение, содержащее переменную под знаком корня, называется ***иррациональным***.

Решение иррационального уравнения основано на преобразовании его к рациональному уравнению, что достигается возведением обеих его частей в одну и ту же степень (иногда несколько раз).

При возведении обеих частей иррационального уравнения в четную степень получается уравнение, являющееся следствием исходного. Уравнению-следствию удовлетворяют все корни исходного уравнения, но могут появиться и корни, которые не являются корнями исходного уравнения («посторонние» корни). Чтобы выявить «посторонние» корни, все найденные корни уравнения-следствия проверяют подстановкой в исходное уравнение и «посторонние» корни отбрасывают.

Исходное иррациональное уравнение равносильно смешанной системе, состоящей из уравнения-следствия и ограничений, определяемых областью допустимых значений переменной. В этом случае «посторонние» корни не будут входить в область допустимых значений переменной и проверять их подстановкой в исходное уравнение не требуется.

При возведении обеих частей иррационального уравнения в нечетную степень получается уравнение, равносильное исходному.

Иррациональные неравенства с одной переменной.

Решение иррационального неравенства с одной переменной сводится к решению равносильной ему системы рациональных неравенств или совокупности систем рациональных неравенств.

Эти системы решаются при наложении ограничений на переменную и возведении обеих частей неравенства в одну и ту же степень.

Показательные и тригонометрические уравнения и неравенства.

Основные приемы их решения (разложение на множители, введение новых неизвестных, подстановка, графический метод). Использование свойств и графиков функций при решении неравенств. Метод интервалов.

Показательные уравнения и неравенства.

Решение *показательных уравнений* часто сводится к решению уравнения

$$a^x = a^b,$$

где $a > 0, a \neq 1, x$ - неизвестное. Это уравнение решается с помощью свойства степени: степени с одинаковым основанием $a > 0, a \neq 1$ равны только тогда, когда равны их показатели.

Решение *показательных неравенств* часто сводится к решению неравенства

$$a^x > a^b \text{ или } a^x < a^b.$$

Эти неравенства решаются с помощью свойства возрастания или убывания показательной функции: для возрастающей функции большему значению функции соответствует большее значение аргумента, а для убывающей функции большему значению функции соответствует меньшее значение аргумента.

Тригонометрические уравнения и неравенства.

1. Уравнения, сводящиеся к квадратным.
2. Уравнения $a\sin x + b\cos x = c$.
3. Уравнения, решаемые разложением левой части на множители.

Применение математических методов для решения содержательных задач из различных областей науки и практики (дополнительный материал)

Применение математических методов для решения содержательных задач из различных областей науки и практики. Интерпретация результата, учет реальных ограничений.

Решить математическую задачу – это значит найти такую последовательность общих положений математики, применяя которые к условиям задачи получаем то, что требуется найти – ответ.

Основными методами решения текстовых задач являются арифметический и алгебраический метод, а так же комбинированный.

Решить задачу арифметическим методом – значит найти ответ на требование задачи посредством выполнения арифметических действий над данными в задаче числами. Одну и туже задачу можно решить различными арифметическими способами. Они отличаются друг от друга логикой рассуждений в процессе решения задачи.

Решить задачу алгебраическим методом – значит найти ответ на требование задачи путем составления и решения уравнения или системы уравнений.

Текстовые задачи алгебраическим методом решают по следующей схеме:

1) выделяют величины, о которых идет речь в тексте задачи, и устанавливают зависимость между ними;

2) вводят переменные (обозначают буквами неизвестные величины);
3) с помощью введенных переменных и данных задачи составляют уравнение или систему уравнений;
4) решают полученное уравнение или систему;
5) проверяют найденные значения по условию задачи и записывают ответ.

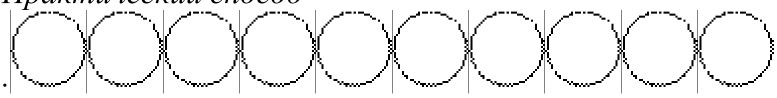
Комбинированный метод решения включает как арифметический, так и алгебраический способы решения.

В начальной школе задачи *делят по количеству действий* при решении на простые и составные. Задачи, в которых для ответа на вопрос нужно выполнить только одно действие, называют *простыми.* Если для ответа на вопрос задачи нужно выполнить два и более действий, то такие задачи называют *составными.*

Составную задачу, тек же как и простую, можно решить, используя различные способы.

Задача. Рыбак поймал 10 рыб. Из них 3 леща, 4 окуня, остальные – щуки. Сколько щук поймал рыбак?

Практический способ



Обозначим каждую рыбу кругом. Нарисуем 10 кругов и обозначим пойманных рыб.

Л Л Л О О О О

Для ответа на вопрос задачи можно не выполнять арифметические действия, так как количество пойманных щук соответствует не обозначенным кругам – их три.

Арифметический способ.

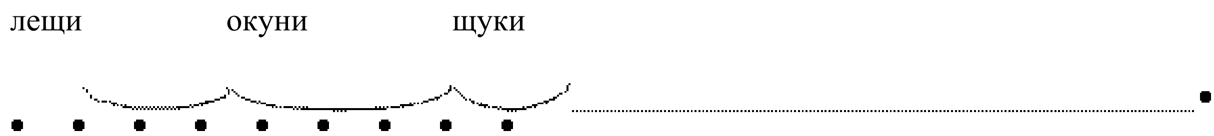
1) 3+4=7(р) – пойманные рыбы;

2) 10 – 7 = 3(р) – пойманные щуки.

Алгебраический способ.

Пусть x – пойманные щуки. Тогда количество всех рыб можно записать выражением: $3 + 4 + x$. По условию задачи известно, что рыбак поймал всего 10 рыб. Значит: $3 + 4 + x = 10$. Решив это уравнение, получим $x = 3$ и тем самым ответим на вопрос задачи.

Графический способ.



Этот способ, так же как и практический, позволят ответить на вопрос задачи, не выполняя арифметических действий.

В математике общепринято следующее деление процесса решения задач:
1) анализ текста задачи, схематическая запись задачи, исследование задачи;

2) поиск способа решения задачи и составление плана решения;
3) осуществление найденного плана;
4) анализ найденного решения задачи, проверка.

Методы поиска решения задачи можно назвать следующие:

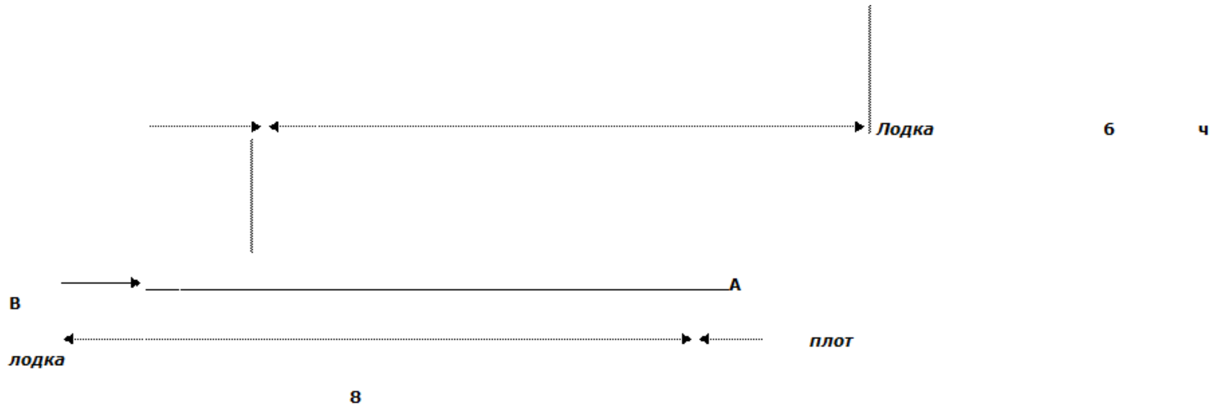
1) Анализ: а) когда в рассуждениях двигаются от искомых к данным задачи; б) когда целое расчленяют на части;
2) Синтез:
а) когда двигаются от данных задачи к искомым;
б) когда элементы объединяют в целое;
3) Переформулировка задачи (четко формулировать промежуточные задания, возникающие по ходу поиска решения);
4) Индуктивный метод решения задачи: на основе точного чертежа усмотреть свойства фигуры, сделать выводы и доказать их;
5) Применение аналогии (вспомнить аналогичную задачу);
6) Прогнозирование – предвидение тех результатов, к которым может привести поиск.

Рассмотрим более подробно процесс решения задачи:

Задача на движение. Лодка прошла по течению реки расстояние между двумя пристанями за 6 ч, а обратно – за 8ч. За сколько времени пройдет расстояние между пристанями плот, пущенный по течению реки?

Анализ задачи. В задаче речь идет о двух объектах: лодка и плот. Лодка имеет собственную скорость, а плот и река, по которой плывут лодка и плот, имеет определенную скорость течения. Именно поэтому лодка совершает путь по течению реки за меньшее время (6ч), чем против течения (8ч). Но эти скорости в задаче не даны, так же как неизвестно и расстояние между пристанями. Однако требуется найти не эти неизвестные, а время, за которое плот проплывет это расстояние.

Схематическая запись:



Поиск способа решения задачи. Нужно найти время, за которое плот проплывет расстояние между пристанями *A* и *B*. Для того, чтобы найти это время, надо знать расстояние *AB* и скорость течения реки. Оба они неизвестны, поэтому обозначим расстояние *AB* буквой S (км),а скорость течения a км/ч.Чтобы связать эти неизвестные с данными задачи, нужно знать собственную скорость лодки. Она тоже неизвестна, положим, она равна V км/ч. Отсюда возникает план решения, заключающийся в том, чтобы составить систему уравнений относительно введенных неизвестных.

Осуществление решения задачи. Пусть расстояние равно S (км), скорость течения реки a км/ч, собственная скорость лодки V км/ч, а искомое время движения плота равно x ч.

Тогда скорость лодки по течению реки равна $(V+a)$ км/ч. За 6ч лодка, идя с этой скоростью, прошла расстояние в S (км). Следовательно, $6(V + a) = S$ (1). Против течения эта лодка идет со скоростью (V – a) км/ч и данный путь она проходит за 8 ч, поэтому $8(V - a) = S$ (2). Плот, плывя со скоростью течения реки a км/ч, проплыл расстояние S (км) за x ч, следовательно, $ax = S$ (3).

Полученные уравнения образуют систему уравнений относительно неизвестных a, x, S, V. Так как требуется найти лишь x, то остальные неизвестные постараемся исключить.

Для этого из уравнений (1) и (2) найдем: V + a = , V – a = . Вычитая из первого уравнения второе, получим: 2a = – . Отсюда a = . Подставим найденное выражение в уравнение (3): x = . Откуда x=48 .

Проверка решения. Мы нашли, что плот проплывет расстояние между пристанями за 48 ч. Следовательно, его скорость, равная скорости течения реки, равна . Скорость же лодки по течению реки равна км/ч, а против течения км/ч. Для того, чтобы убедиться в правильности решения, достаточно проверить, будут ли равны собственные скорости лодки, найденные двумя способами: + и – . Произведя вычисления, получим верное равенство: = . Значит, задача решена правильно.

Ответ: плот проплывет расстояние между пристанями за 48 часов.

Анализ решения. Мы свели решение этой задачи к решению системы трех уравнений с четырьмя неизвестными. Однако найти надо было одно неизвестное. Поэтому возникает мысль, что данное решение не самое удачное, хотя и простое. Можно предложить другое решение.

Зная, что лодка проплыла расстояние AB по течению реки за 6ч, а против – за 8ч, найдем, что в 1ч лодка, идя по течению реки проходит часть этого расстояния, а против течения. Тогда разность между ними – и = есть удвоенная часть расстояния AB, проплываемая плотом за 1ч. Значит. Плот за 1ч проплывет часть расстояния AB, следовательно, все расстояние AB он проплывет за 48 ч.

При таком решении нам не понадобилось составлять систему уравнений. Однако это решение сложнее приведенного выше (не всякий догадается найти разность скоростей лодки по течению и против течения реки). Но если вы так и не смогли разобраться с решением данной задачи, или же у вас просто нет на это время, а на носу ещё куча контрольных, то вы можете заказать решение контрольных работ на специальных биржах.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Основная

1.Гусак, А. А. Математика : пособие-репетитор / А. А. Гусак, Г. М. Гусак, Е. А. Бричикова. — 2-е изд. — Минск : Тетралит, 2018. — 720 с. — ISBN 978-985-708-1-97-4. — Текст : электронный // Электронный ресурс цифровой образовательной среды СПО PROFобразование : [сайт]. — URL: https://profspo.ru/books/88821

2.Карбачинская, Н. Б. Математика : практикум для среднего профессионального образования / Н. Б. Карбачинская, Е. Е. Харитонова. — Москва : Российский государственный университет правосудия, 2019. — 114 с. — ISBN 2227-8397. — Текст : электронный // Электронный ресурс цифровой образовательной среды СПО PROFобразование : [сайт]. — URL: https://profspo.ru/books/94184

3. Математика. Сборник задач по углубленному курсу : учебно-методическое пособие / Б. А. Будак, Н. Д. Золотарёва, Ю. А. Попов [и др.] ; под редакцией М. В. Федотова. — 5-е изд. — Москва : Лаборатория знаний, 2020. — 327 с. — ISBN 978-5-00101-707-3. — Текст : электронный // Электронный ресурс цифровой образовательной среды СПО PROFобразование : [сайт]. — URL: https://profspo.ru/books/98524

4.Башмаков М.И. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия*:* учебник для студентов профессиональных образовательных организаций, осваивающих профессии и специальности СПО. – М., 2021

5. Башмаков М.И Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия: Сборник задач профильной направленности: учеб. Пособие для студентов профессиональных образовательных организаций, осваивающих профессии и специальности СПО. – М., 2021

Дополнительная

1.Башмаков М.И. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия*:* учебник для студентов профессиональных образовательных организаций, осваивающих профессии и специальности СПО. – М., 2017

2. Башмаков М.И Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия: Сборник задач профильной направленности: учеб. Пособие для студентов профессиональных образовательных организаций, осваивающих профессии и специальности СПО. – М., 2017

Интернет-ресурсы

http: //www.iprbookshop.ru/ - Электронно-библиотечная система IPRbooks
http://www.consultant.ru/ - Справочно-правовая система КонсультантПлюс
http: //www.elibrary.ru/ - Национальная электронная библиотека
http: //www.edu.ru/ - Федеральный Интернет-портал «Российское образование»